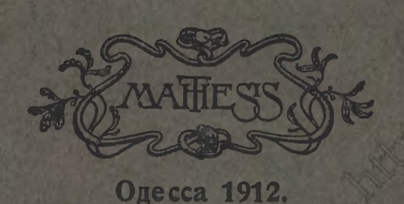
Проф. Ф. КЛЕЙНЪ

ВОПРОСЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ и ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТЬ I

АРИѲМЕТИКА, АЛГЕБРА и АНАЛИЗЪ



Одесса 1912.



F. KLEIN

ВОПРОСЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ И ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Проф. Ф. КЛЕЙНЪ

ВОПРОСЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ и ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Лекціи, читанныя въ Гёттингенскомъ университетѣ

ЧАСТЬ I

АРИѲМЕТИКА, АЛГЕБРА и АНАЛИЗЪ

Переводъ съ нѣмецкаго Д. А. КРЫЖАНОВСКАГО

подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. КАГАНА



Одесса 1912

ОДЕССА.
Тип. Акціонернаго Южно-Русскаго О-ва Печатнаго Дѣла
(Пушкинская ул., соб. д., № 18).

ОГЛАВЛЕНІЕ

ГЛАВА IV.

Комплексныя числа.

ГЛАВА V.

Современное развитіе и строеніе математики вообще

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ: АЛГЕБРА.

Введеніе.

ГЛАВА I.

Вещественныя уравненія съ вещественными неизвѣстными

ГЛАВА II.

Уравненія въ области комплексныхъ чиселъ

Примѣры.

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ: АНАЛИЗЪ.

Введеніе

ГЛАВА I.

Логариѳмы и показательныя функціи.

ГЛАВА II.

О гоніометрическихъ функціяхъ.

ГЛАВА III.

Исчисленіе безконечно-малыхъ въ собственномъ смыслѣ слова.

ПРИЛОЖЕНІЯ

ГЛАВА I.

Трансцендентость чиселъ e и π.

ГЛАВА II.

Ученіе о комплексахъ.

ДОПОЛНЕНІЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНІЮ.

ДОПОЛНЕНІЯ РЕДАКТОРА.



Предисловіе автора къ первому изданію.

Настоящее литографированное изданіе, которое я предлагаю вниманію математической публики и въ особенности преподавателей математики въ нашихъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ, должно представлять собою, по мысли автора, первое продолженіе тѣхъ лекцій „о преподаваніи математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ“, спеціально посвященныхъ вопросу объ „организаціи математическаго преподаванія“, которыя я выпустилъ въ свѣтъ въ прошломъ году вмѣстѣ съ г. Шиммакомъ*). Въ этой послѣдней книгѣ былъ сдѣланъ обзоръ различныхъ формъ, въ которыхъ осуществляется преподаваніе математики въ средней школѣ; теперь было необходимо присоединить сюда разборъ самаго учебнаго матеріала. Въ этихъ лекціяхъ я имѣлъ въ виду представить учителю—или даже болѣе зрѣлому студенту—содержаніе и обоснованіе областей, входящихъ въ кругъ преподаванія, принимая при этомъ во вниманіе фактически существующую постановку послѣдняго; я старался подойти къ этому съ точки зрѣнія современной науки въ возможно простой и живой формѣ. При этомъ я не имѣлъ въ виду дать систематическое изложеніе, какъ это дѣлаютъ, напримѣръ, Веберъ и Вельштейнъ; я хотѣлъ придать этимъ лекціямъ характеръ эскизовъ въ той самой формѣ, въ какую онѣ выливались, когда я ихъ дѣйствительно читалъ.

На такую программу—которая въ данномъ случаѣ проведена пока лишь для Ариѳметики, Алгебры и Анализа,—я указывалъ уже въ предисловіи къ упомянутой книгѣ Клейна-Шиммака (апрѣль 1907 г.); я тогда надѣялся, что г. Шиммакъ, несмотря на многія препятствія, все же найдетъ время, чтобы

*) См. выноску на стр. 3.

снова взять на себя обработку моихъ лекцій для печати. Но я самъ, можно сказать, помѣшалъ ему сдѣлать это, такъ какъ постоянно пользовался его энергіей для работы въ другихъ направленіяхъ по интересующимъ насъ обоихъ педагогическимъ вопросамъ. Какъ бы тамъ ни было, но вскорѣ выяснилось, что выполнить первоначальный планъ въ *короткій* срокъ было неосуществимо, а между тѣмъ это казалось желательнымъ въ интересахъ фактическаго воздѣйствія на вопросы преподаванія, стоящіе теперь на первомъ планѣ. Поэтому я снова прибѣгнулъ, какъ въ прежніе годы, къ болѣе удобному средству — *литографированію* моихъ лекцій; къ тому же мой теперешній ассистентъ, г. *Геллингеръ* (*Ernst Hellinger*) оказался исключительно умѣлымъ помощникомъ въ этомъ дѣлѣ.

Я долженъ сказать, что работу, которая выпала на долю г. *Геллингера*, отнюдь не слѣдуетъ считать незначительной. Вѣдь отъ устнаго изложенія преподавателя, обусловленнаго всевозможными случайными обстоятельствами, до письменнаго изложенія, въ значительной мѣрѣ сглаженнаго и обработаннаго, еще очень далеко. Но только въ литографированномъ изданіи точность обработки и выдержанность изложенія не приводятся съ такою строгостью, какъ это считается необходимымъ, согласно установившемуся обычаю, для печатныхъ произведеній.

Я нѣсколько боюсь опредѣленно обѣщать, что за этими лекціями послѣдуетъ продолженіе этого изданія по вопросу о преподаваніи другихъ отраслей математики и прежде всего *Геометріи**); я хочу только высказать въ заключеніе пожеланіе, чтобы настоящая книга оказалась полезной тѣмъ, что побудитъ иного учителя нашей средней школы къ самостоятельному размышленію о новомъ, болѣе цѣлесообразномъ изложеніи того учебнаго матеріала, который онъ преподаетъ. *Исключительно съ такой точки зрѣнія надо смотрѣть на мою книгу, а не считать ее готовымъ учебнымъ планомъ; разработку послѣдняго я всецѣло предоставляю тѣмъ, которые сами работаютъ въ школѣ.* Если кто нибудь

---

*) Къ счастью, оказалось возможнымъ уже въ 1909 году издать „Геометрію", какъ вторую часть „Элементарной математики съ высшей точки зрѣнія".

предполагаетъ, что я когда либо понималъ свою дѣятельность иначе, то это недоразумѣніе. Въ частности, учебный планъ Педагогической Коммиссіи Общества Германскихъ Естествоиспытателей и Врачей (т. наз. „Меранская программа") *) выработанъ не мною, а лишь при моемъ участіи выдающимися представителями школьной математики.

Наконецъ, относительно характера изложенія въ этой книгѣ достаточно будетъ сказать, что я здѣсь, какъ и прежде въ подходящихъ случаяхъ, старался всюду соединить геометрическую наглядность съ той точностью, какую даютъ ариѳметическія формулы; я особенно старался прослѣдить исторію возникновенія различныхъ теорій, чтобы этимъ путемъ выяснить особенности различныхъ способовъ изложенія, которые въ современномъ преподаваніи постоянно уживаются рядомъ.

Геттингенъ, конецъ іюня 1908 г.

Ф. Клейнъ.

---

*) См. статью В. Кагана „О реформѣ преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Германіи и Франціи". Вступительная статья къ русскому изданію книги: Борель — Штеккель „Элементарная Математика" (См. также примѣч. на стр. 5).

Предисловіе автора ко второму изданію.

Чтобы не слишкомъ задерживать выходъ въ свѣтъ этого новаго изданія, вмѣсто уже разошедшагося перваго, пришлось во всѣхъ существенныхъ пунктахъ повторить первое изданіе безъ измѣненій. Поэтому вся обработка текста свелась къ тому, что во многихъ мѣстахъ было сглажено изложеніе, исправлено было нѣсколько недосмотровъ, а также внесены кое-гдѣ краткія дополненія къ литературнымъ указаніямъ. Нѣсколько болѣе подробныя „добавленія“ по нѣкоторымъ вопросамъ, затронутымъ въ этихъ лекціяхъ, помѣщены отдѣльно въ концѣ книги; въ нихъ, между прочимъ, содержатся—безъ всякой претензіи на полноту—краткіе обзоры новѣйшей литературы и дальнѣйшаго развитія тѣхъ стремленій къ реформѣ преподаванія, о которыхъ упоминается въ лекціяхъ. Выполненіе новаго изданія снова было поручено д-ру Геллингеру, состоящему въ настоящее время приватъ-доцентомъ въ Марбургѣ.

Ф. Клейнъ.

Геттингенъ,
Мартъ, 1911.



Предисловіе редактора.

Лекціи, первую часть которыхъ мы выпускаемъ въ настоящее время въ свѣтъ на русскомъ языкѣ, были читаны профессоромъ Ф. Клейномъ въ Геттингенѣ въ 1907—1908 уч. году для будущихъ учителей среднихъ учебныхъ заведеній. Организація этого курса находится въ тѣсной связи съ дѣятельностью Клейна, направленной въ послѣдніе десять лѣтъ къ реформированію преподаванія математики въ средней школѣ. Въ чемъ заключается эта реформа, какъ она намѣчается и какъ осуществляется, объ этомъ мы помѣстили подробную статью въ предисловіи къ I-ой части сочиненія Бореля-Штеккеля „Элементарная Математика"*). Самъ Клейнъ указываетъ въ своемъ предисловіи, что настоящія лекціи, по существу, представляютъ собой продолженіе другого курса: „Лекціи о преподаваніи математики въ средней школѣ. Ч. I. Организація преподаванія математики", который Клейнъ читалъ на 3 года раньше и опубликовалъ въ 1907 г. въ обработкѣ г. Шиммака. Казалось бы поэтому естественнымъ, чтобы и въ русскомъ переводѣ настоящія лекціи слѣдовали за названной вводной книгой Клейна-Шиммака. Мы, однако, не сочли нужнымъ издать порусски и первую книгу, такъ какъ она слишкомъ много занимается германской, даже болѣе того — прусской школой. Намъ кажется, что все важнѣйшее, имѣющее общій интересъ, передано нами въ упомянутой выше статьѣ.

Но и выпуская въ свѣтъ настоящее сочиненіе, мы считаемъ нужнымъ войти въ нѣсколько большія подробности относительно

---

*) Профессоръ Э. Борель. Ариѳметика и Алгебра. Въ обработкѣ профессора Штеккеля. Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей прив.-доц. Кагана и съ приложеніемъ его статьи: „О реформѣ преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Германіи и Франціи".

содержанія и назначенія этой книги, чѣмъ мы это дѣлаемъ обыкновенно.

Лекціи Клейна представляютъ собой, несомнѣнно, рѣдкій вкладъ въ учебную математическую литературу. Нѣкоторыя главы представляютъ собой настоящіе перлы, тѣмъ болѣе цѣнные, что ни въ какомъ другомъ сочиненіи ихъ въ подобной обработкѣ нельзя найти: многое заимствовано непосредственно изъ научныхъ мемуаровъ, изъ обширныхъ историческихъ сочиненій, малодоступныхъ или даже вовсе недоступныхъ тому читателю, для котораго назначены лекціи Клейна. Мало того, книга интересна отнюдь не только для учителя, а мѣстами, пожалуй, и вовсе не для учителя. Она интересна для всякаго лица, заканчивающаго высшее математическое образованіе: она даетъ ему такой обзоръ руководящихъ идей, проникающій всѣ отдѣлы современной математики, какого онъ не найдетъ нигдѣ.

Но два замѣчанія мы должны къ этому прибавить. Во первыхъ, книга имѣетъ эту цѣнность лишь для того, кто подойдетъ къ ней съ надлежащими требованіями, такъ сказать, съ надлежащей стороны, и съ надлежащей подготовкой. Во вторыхъ, не всѣ части сочиненія достаточно уравновѣшены. На той и другой сторонѣ дѣла намъ необходимо остановиться нѣсколько подробнѣе.

Точное названіе лекцій Клейна такое: „Элементарная математика съ высшей точки зрѣнія“. Понятіе объ „элементарной математикѣ“ вообще очень растяжимое; но Клейнъ имѣетъ на это совершенно особенный взглядъ. Въ указанной выше статьѣ „О реформѣ преподаванія математики“ мы привели принадлежащую Клейну критику различныхъ опредѣленій элементарной математики, вѣрнѣе, его соображенія, въ силу которыхъ онъ считаетъ, что ни одно изъ извѣстныхъ ему опредѣленій не выдерживаетъ критики. Онъ самъ признаетъ лишь слѣдующее опредѣленіе: элементарно все то, что доступно юношѣ школьнаго возраста. Но подойдемъ ли мы именно съ этой или съ какой бы то ни было другой точки зрѣнія на элементарную математику, даже „съ высшей“, какъ сказано въ заглавіи книги, мы должны будемъ признать, что не только многія части сочиненія, а—пожалуй—и большая часть ихъ не можетъ быть признана элементарной. Ни ученіе о кватерніонахъ въ его связи съ механикой, ни уравненія и группы

многогранниковъ въ ихъ связи съ Римановыми поверхностями, ни ученія о малыхъ колебаніяхъ, о рядахъ Фурье, объ интерполяціи не могутъ быть признаны элементарными. Это отнюдь не уменьшаетъ достоинства книги для тѣхъ, кому эти вопросы доступны. Но намъ казалось, что сохранить заглавіе книги значитъ ввести читателя, а главное, покупателя въ заблужденіе; тѣмъ болѣе, что это заблужденіе прикрывалось бы громкимъ и популярнымъ у насъ именемъ „Клейна". Мы сочли поэтому болѣе правильнымъ, болѣе отвѣчающимъ содержанію книги озаглавить ее: „Вопросы элементарной и высшей математики".

Далѣе, обращаясь къ характеру изложенія матеріала, мы должны лишній разъ подчеркнуть то, что объ этомъ говоритъ самъ авторъ: лекціи не содержатъ систематическаго и догматическаго изложенія соотвѣтственныхъ дисциплинъ; онѣ содержатъ только общій обзоръ относящихся сюда ученій, онѣ имѣютъ въ виду ярко освѣтить ихъ основные моменты, сущность задачъ, ихъ трудности, слабыя мѣста, спорные вопросы. Учиться той или иной дисциплинѣ по этой книгѣ нельзя; для этого существуютъ руководства, лучшія изъ которыхъ авторъ всегда указываетъ на своемъ мѣстѣ. Но въ качествѣ дополненія къ руководствамъ эти лекціи особенно цѣнны въ слѣдующемъ отношеніи. Авторы догматическихъ сочиненій стараются побѣдить тѣ трудности, съ которыми связано точное изложеніе дисциплины. Удается ли имъ это или нѣтъ,—въ результатѣ наиболѣе спорные пункты всегда остаются скрытыми, сглаженными. И даже въ тѣхъ случаяхъ, когда удается довести ту или иную теорію до полной точности, учащійся часто недоумѣваетъ, для чего автору понадобился тотъ или иной сложный аппаратъ, тѣ или иныя громоздкія разсужденія. Вотъ эти именно вопросы Клейнъ и старается освѣтить, онъ старается выяснить идею въ свѣтѣ ея историческаго развитія, въ сопоставленіи попытокъ ея разрѣшенія. Но ясно вмѣстѣ съ тѣмъ, что тотъ, кто станетъ читать эту книгу безъ предварительнаго знакомства съ этими вопросами, не найдетъ въ ней того, что ищетъ.

Теперь остановимся на отдѣльныхъ частяхъ настоящаго перваго тома. Первая часть представляетъ собой обзоръ современной теоретической ариѳметики. Кромѣ 3-ей части IV главы („Умноженіе кватерніоновъ и преобразованія поворотнаго растяженія въ пространствѣ"), здѣсь все очень доступно и можетъ въ

такой же мѣрѣ служить введеніемъ въ теоретическую ариѳметику, какъ и дополненіемъ къ ней. Читатель долженъ только помнить, что доказательства нигдѣ не доводятся до конца, что авторъ выясняетъ лишь руководящія ихъ идеи.

Иначе обстоитъ дѣло со второй частью—съ „Алгеброй". Хотя отнесенныя сюда авторомъ вещи принадлежатъ къ числу изящныхъ перловъ математической литературы, мы считаемъ, что выборъ сдѣланъ Клейномъ — въ виду назначенія этихъ лекцій— весьма неудачно. Изъ обширнаго матеріала, который представляетъ Алгебра для бесѣды съ будущими учителями, Клейнъ выбралъ вопросы, составлявшіе, главнымъ образомъ, предметы его собственныхъ работъ и изложенные отчасти въ мемуарѣ „Geometrisches zur Abzählung der Wurzeln algebraischer Gleichungen", и частью въ книгѣ „Vorlesungen über das Ikosaeder". Что заставило Клейна сдѣлать такой странный выборъ? Одна изъ завѣтныхъ идей Клейна заключается въ томъ, чтобы слить различные отдѣлы математики въ одно цѣлое и чтобы геометрическія представленія уясняли аналитическія теоріи. Эти идеи дѣйствительно находятъ себѣ замѣчательное осуществленіе въ разбираемыхъ авторомъ вопросахъ; но онѣ стоятъ чрезвычайно далеко отъ школы, и изученіе ихъ врядъ ли можетъ принести существенную пользу будущему преподавателю. Мы полагали, что авторъ отдалъ здѣсь дань увлеченію собственными работами. Но для студентовъ и молодыхъ математиковъ, которые интересуются алгеброй bona fide, независимо отъ тѣхъ или иныхъ примѣненій, эти главы представляютъ глубочайшій интересъ. Чтеніе первой главы, хотя и потребуетъ отъ хорошаго студента напряженія, но большихъ затрудненій не представитъ. Иначе обстоитъ дѣло со II главой. Она требуетъ знакомства съ Римановыми поверхностями, какого мы у нашихъ студентовъ предполагать не можемъ. Мы сочли поэтому цѣлесообразнымъ присоединить въ качествѣ приложенія къ книгѣ небольшую статью о Римановыхъ поверхностяхъ, въ которой это ученіе изложено въ томъ объемѣ, какой необходимъ для пониманія II-ой главы „Алгебры".

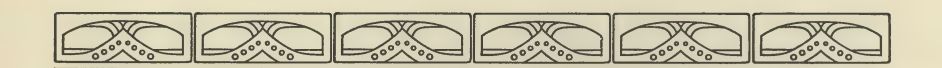
Но и самая руководящая нить, проникающая эту часть книги, можетъ показаться недостаточно опытному читателю неясной. Мы сочли поэтому нужнымъ выяснить также и самый ходъ идей

Клейна въ небольшомъ добавленіи, предпосланномъ статьѣ о Римановыхъ поверхностяхъ.

Въ третьей части, посвященной анализу, Клейнъ вновь возвращается къ основнымъ вопросамъ и трактуетъ ихъ въ высшей степени доступно. Это, на нашъ взглядъ, лучшая часть сочиненія. Такъ же, какъ и первую часть, мы не можемъ не рекомендовать ее всѣмъ, изучающимъ математику съ дѣйствительнымъ интересомъ къ дѣлу.

Переводъ былъ сдѣланъ съ перваго изданія и былъ уже почти отпечатанъ, когда появилось второе нѣмецкое изданіе. Какъ видно изъ предисловія автора ко второму изданію, текстъ остался почти безъ измѣненія; но ко второму изданію приложенъ рядъ дополненій, которыя всѣ внесены въ настоящее русское изданіе.

АРИѲМЕТИКА



ВВЕДЕНІЕ.

Въ послѣдніе годы въ средѣ университетскихъ преподавателей математики и естествознанія сталъ обнаруживаться интересъ къ вопросу о цѣлесообразной, соотвѣтствующей всѣмъ потребностямъ, подготовкѣ кандидатовъ на учительскія должности. Это явленіе замѣчается сравнительно недавно. До того, въ теченіе долгаго періода, въ университетахъ культивировалась исключительно высокая наука безъ вниманія къ тому, что, собственно, нужно школѣ; объ установленіи связи между университетскимъ преподаваніемъ и школьной математикой никто не заботился. Но къ какимъ послѣдствіямъ привела такая практика? Вступая въ высшую школу, молодой студентъ оказывается лицомъ къ лицу съ такими задачами, которыя совершенно не напоминаютъ ему того, чѣмъ онъ до сихъ поръ занимался; естественно, что все это онъ быстро и основательно забываетъ. Когда же онъ заканчиваетъ университетское образованіе и становится преподавателемъ, то онъ вынужденъ въ качествѣ учителя преподавать традиціонную математику; не будучи въ состояніи самостоятельно связать эту задачу съ тѣмъ, что онъ слышалъ въ высшей школѣ, онъ быстро усваиваетъ старую традицію; университетское же образованіе остается у него только въ видѣ болѣе или менѣе пріятнаго воспоминанія, не оказывающаго никакого вліянія на его преподаваніе.

Въ настоящее время возникло стремленіе уничтожить этотъ двойной разрывъ, который несомнѣнно былъ одинаково вреденъ какъ для средней, такъ и для высшей школы. Именно, мы стараемся, съ одной стороны, провести черезъ весь матеріалъ школьнаго обученія тѣ идеи, которыя отвѣчаютъ современному развитію науки и общей культуры (къ этому мы еще неоднократно будемъ возвращаться); съ другой стороны, мы стараемся въ универси-

тетскомъ преподаванiи принять во вниманiе нужды учителей. Въ этомъ именно дѣлѣ очень полезнымъ средствомъ представляются мнѣ научные обзоры, къ одному изъ которыхъ мы нынче приступаемъ. Я имѣю, слѣдовательно, предъ собой не начинающихъ; напротивъ, я считаю, что всѣмъ вамъ общiй матерiалъ важнѣйшихъ математическихъ дисциплинъ хорошо знакомъ. Мнѣ придется неоднократно говорить о задачахъ алгебры, теорiи чиселъ, теорiи функцiй, не входя въ детали. Вы должны быть со всѣми этими вещами до нѣкоторой степени знакомы. Моя задача будетъ постоянно заключаться въ томъ, чтобы выдвигать взаимную связь между вопросами отдѣльныхъ дисциплинъ, которая часто скрадывается въ спецiальныхъ курсахъ,—чтобы указывать ихъ отношенiе къ вопросамъ школьной математики. Я полагаю, что этимъ путемъ мнѣ удастся значительно облегчить вамъ достиженiе той цѣли, которую вы должны имѣть въ виду при изученiи математики въ высшей школѣ: чтобы позже въ вашемъ собственномъ преподаванiи вы сохранили живую связь съ той наукой, которая вамъ здѣсь преподносится въ большомъ обилiи.

Позвольте прежде всего представить вамъ нѣкоторые документы, относящiеся къ послѣднему времени и свидѣтельствующiе о томъ интересѣ, который въ широкихъ кругахъ вызываетъ вопросъ о подготовкѣ учителей; эти документы должны составить и для васъ цѣнный матерiалъ. Въ частности эти вопросы очень занимали также послѣднiй съѣздъ естествоиспытателей въ Дрезденѣ, состоявшiйся въ сентябрѣ 1907 г., на которомъ мы, согласно представленiю педагогической коммиссiи, приняли „предложенiя относительно научной подготовки преподавателей математики и естествознанiя". Эти предложенiя вы можете найти въ послѣдней главѣ общаго доклада коммиссiи*), которая съ 1904 года занималась разработкой всего комплекса вопросовъ обученiя математикѣ и естествознанiю, а въ настоящее время закончила свою дѣятельность. Я настойчиво прошу васъ ознакомиться, какъ съ этими предложенiями, такъ и съ другими частями этого въ высшей степени интереснаго до-

*) Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte, hrsg. von A. Gutzmer (Leipzig und Berlin, 1908).

клада. Вскорѣ послѣ дрезденскаго съѣзда аналогичные вопросы дебатировались также на съѣздѣ германскихъ филологовъ и преподавателей въ Базелѣ, гдѣ движенiе въ пользу реформы преподаванiя математики и естествознанiя представляло собой только одно звено въ цѣпи аналогичныхъ стремленiй, параллельно возникающихъ также въ филологическихъ кругахъ. Одновременно съ моимъ рефератомъ о нашихъ реформаторскихъ стремленiяхъ въ области математики П. Вендландъ (P. Wendland) докладывалъ о вопросахъ, относящихся къ классическимъ наукамъ; Н. Брандль (N. Brandl)—о новыхъ языкахъ, А. Гарнакъ (A. Harnack)—объ исторiи и религiи*). Всѣ четыре доклада соединены въ одной брошюрѣ, на которую я также настойчиво обращаю ваше вниманiе. Я считаю чрезвычайно важнымъ прокладываемый этимъ путь къ совмѣстному культивированiю нашихъ наукъ, такъ какъ связь и взаимное пониманiе въ высшей степени желательны между тѣми группами, которыя обыкновенно чужды, а нерѣдко даже враждебны другъ другу. Мы всегда должны стремиться поддерживать эти добрыя товарищескiя отношенiя, хотя бы иногда, когда мы находимся въ своемъ кругу, у насъ и проскальзывало острое словцо по отношенiю къ филологамъ, что, конечно, не разъ происходитъ и въ ихъ средѣ. Будьте выше этой обособленности спецiалистовъ и помните, что вамъ именно и придется въ школѣ работать совмѣстно съ филологами на общую пользу, а для этого совершенно необходимы взаимное уваженiе и взаимное пониманiе.

Въ качествѣ введенiя въ настоящiй курсъ я хочу сдѣлать вамъ нѣкоторыя болѣе спецiальныя указанiя, именно, я хотѣлъ обратить ваше вниманiе на нѣкоторыя полезныя для васъ сочиненiя. Три года тому назадъ я читалъ лекцiи, преслѣдовавшiя такую же цѣль, какъ и настоящiй курсъ. Мой тогдашнiй ассистентъ г. Шиммакъ (R. Schimmack) разработалъ эти лекцiи, такъ что первая часть ихъ недавно появилась въ печати**). Здѣсь идетъ рѣчь о различнаго рода школахъ, включая и высшiя школы,

*) „Universität und Schule“. Vorträge ..., gehalten von F. Klein, P. Wendland, Al. Brandl, A. Harnack (Leipzig, 1907).

**) F. Klein. „Vorträge über den mathematischen Unterricht an höheren Schulen“. Bearbeitet von R. Schimmack. Teil 1: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Leipzig, 1907. Ниже это сочиненiе мы будемъ цитировать подъ названiемъ „Klein-Schimmack“.

объ общемъ ходѣ школьнаго преподаванія въ нихъ, о взаимной связи между этими школами. Ниже, при случаѣ, мнѣ придется и здѣсь указывать на изложенные въ этомъ сочиненіи вопросы, не повторяя ихъ; но тѣмъ подробнѣе я буду здѣсь, какъ бы въ видѣ продолженія того же изложенія, останавливаться на томъ, что относится собственно къ математикѣ, и что имѣетъ то или иное отношеніе къ преподаванію. Касаясь при этомъ часто преподавательской практики, я основываюсь при этомъ не на однихъ только расплывчатыхъ соображеніяхъ о томъ, какъ это дѣло могло бы обстоять, или же на собственныхъ старыхъ школьныхъ воспоминаніяхъ; напротивъ, я нахожусь въ постоянномъ общеніи съ г. Шиммакомъ, который въ настоящее время преподаетъ здѣсь въ одной гимназіи и постоянно освѣдомляетъ меня о настоящемъ положеніи преподаванія, несомнѣнно ушедшемъ далеко впередъ по сравненію съ прошлымъ. Въ настоящемъ семестрѣ я намѣренъ изложить „три великія А“: ариѳметику, алгебру, и анализъ; продолженіе же этого курса въ слѣдующемъ семестрѣ будетъ посвящено геометріи. Замѣчу кстати, что въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ эти три отдѣла нерѣдко именуются общимъ названіемъ ариѳметики; да и вообще мы не разъ встрѣтимся съ уклоненіемъ терминологіи, принятой въ школѣ отъ той, которая царитъ въ высшемъ учебномъ заведеніи. Только живое общеніе, какъ вы видите на этомъ незначительномъ простомъ примѣрѣ, можетъ привести ко взаимному пониманію.

Во вторую очередь, обращу ваше вниманіе на обширное сочиненіе, которое въ общемъ преслѣдуетъ тѣ же цѣли, какія имѣю и я въ виду, — это „Энциклопедія элементарной математики“ Вебера и Вельштейна*).

Въ настоящемъ семестрѣ намъ придется имѣть дѣло съ I-мъ томомъ — съ „Энциклопедіей элементарной алгебры“ Вебера. Укажу сейчасъ же на нѣкоторое различіе между этимъ сочиненіемъ и планомъ настоящаго курса. У Вебера и Вельштейна вся система элементарной математики систематически и логически развивается на зрѣломъ математическомъ языкѣ, доступномъ студенту, далеко подвинувшемуся въ своихъ занятіяхъ. О томъ, въ

*) „Encyklopädie der Elementarmathematik“ von H. Weber und J. Wellstein; томъ I-й вышелъ въ русскомъ переводѣ подъ редакціей прив.-доц. В. Ф. Кагана, изд. „Mathesis“; второй томъ печатается.

какомъ собственно видѣ этотъ матеріалъ долженъ фигурировать въ школѣ, здѣсь вовсе нѣтъ рѣчи. Между тѣмъ изложеніе въ школѣ, выражаясь образно, должно быть психологическое, а не систематическое. Учитель долженъ быть, такъ сказать, дипломатомъ; онъ долженъ учитывать и душевныя движенія юноши, онъ долженъ умѣть возбудить его интересъ, а это будетъ ему удаваться только тогда, если онъ будетъ излагать вещи въ наглядной, доступной формѣ. Лишь въ старшихъ классахъ возможно также и болѣе абстрактное изложеніе. Приведемъ примѣръ. Ребенокъ никогда не пойметъ, если мы будемъ вводить числа аксіоматически, какъ объекты, не имѣющіе никакого содержанія, надъ которыми мы оперируемъ по формальнымъ правиламъ, установленнымъ нашими собственными соглашеніями. Напротивъ, онъ соединяетъ съ числами реальное представленіе; они являются для него ничѣмъ инымъ, какъ количествами орѣховъ, яблокъ и тому подобныхъ хорошихъ вещей; только въ этой формѣ эти вещи можно передавать въ начальномъ обученіи, только въ этой формѣ ихъ и будутъ въ дѣйствительности передавать дѣтямъ. Но и вообще, во всемъ ходѣ обученія математикѣ, даже въ высшей школѣ, необходимо всегда указывать связь между этой наукой и тѣми интересами, которые занимаютъ учащагося въ повседневной жизни. Это именно имѣютъ въ виду новыя тенденціи, стремящіяся поднять прикладную математику въ университетѣ. Впрочемъ, въ школѣ этимъ требованіемъ никогда не пренебрегали въ такой мѣрѣ, какъ въ университетѣ. Эти психологическіе моменты я и намѣренъ особенно подчеркнуть въ своихъ лекціяхъ. Другое различіе между книгой Вебера и Вельштейна и моей точкой зрѣнія заключается въ разграниченіи матеріала школьной математики. Въ этомъ отношеніи Веберъ и Вельштейнъ настроены „консервативно“, я же—„прогрессивно“. Эти вопросы подробно разобраны въ книгѣ Клейнъ-Шиммакъ. Мы, которыхъ называютъ теперь реформаторами, стремимся положить въ основу преподаванія понятіе о функціи, ибо это есть то понятіе, которое въ теченіе послѣднихъ 200 лѣтъ заняло центральное мѣсто всюду, гдѣ только мы встрѣчаемъ математическую мысль. Это понятіе мы желаемъ выработать при преподаваніи столь рано, какъ это только возможно, постоянно примѣняя графическую методу изображенія каждаго закона си-

стемой $x-y$'ковъ, которая теперь употребляется при всякомъ практическомъ примѣненіи математики. Чтобы сдѣлать возможнымъ это нововведеніе, мы готовы отказаться отъ многихъ частей матеріала, входящаго въ составъ дѣйствующихъ программъ; эти вопросы, несомнѣнно, интересны сами по себѣ; но по общему своему значенію и по связи со всей современной культурой они представляются менѣе существенными. Сильное развитіе пространственныхъ представленій должно при этомъ играть первенствующую роль. Обученіе въ школѣ должно проникнуть вверхъ, въ область началъ исчисленія безконечно малыхъ въ такой мѣрѣ, чтобы молодой человѣкъ выходилъ уже изъ средней школы во всеоружіи того математическаго матеріала, безъ котораго будущій естествоиспытатель или страховой дѣятель совершенно не въ состояніи обойтись. Въ противоположность этимъ сравнительно современнымъ идеямъ Веберъ и Вельштейнъ по существу держатся стараго разграниченія матеріала. Въ настоящихъ лекціяхъ я имѣю, конечно, цѣлью пропагандировать тѣ идеи, которыхъ я придерживаюсь.

Наконецъ, въ третью очередь, я хочу указать вамъ еще одну весьма любопытную книгу, принадлежащую М. Симону, работающему какъ и Веберъ и Вельштейнъ, въ Страсбургѣ, именно,—„Дидактика и методика счета и математики“; новое изданіе этой книги только-что вышло въ свѣтъ*). Во многихъ вопросахъ Симонъ соглашается съ нашими тенденціями, но во многомъ онъ съ нами рѣшительно расходится. Такъ какъ это личность съ ярко выраженнымъ субъективизмомъ и съ горячимъ темпераментомъ, то именно этимъ разногласіямъ онъ нерѣдко даетъ острое выраженіе. Приведемъ примѣръ. Предложенія Педагогической Коммиссіи Съѣзда Естествоиспытателей настаиваютъ на одномъ часѣ геометрической пропедевтики уже во второмъ классѣ, между тѣмъ какъ въ настоящее время геометрія начинается только въ третьемъ классѣ. Вопросъ о томъ, какая собственно система предпочтительнѣе, дебатируется очень давно, да и въ самой школьной практикѣ та и другая система уже не разъ смѣняли другъ друга. Мы имѣемъ предъ собой, такимъ

*) Max Simon. „Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik“. 2 Auflage. München, 1908. Sonderausgabe aus Baumeisters Handbuch der Erziehungs und Unterrichtslehre für höhere Schulen.

образомъ, вопросъ, о которомъ, во всякомъ случаѣ, можно спорить. Между тѣмъ Симонъ категорически заявляетъ, что позиція, которую коммиссія заняла въ этомъ вопросѣ, „хуже, чѣмъ преступленіе", и, главное, этого своего утвержденія онъ не обосновываетъ ни единымъ словомъ. Такихъ мѣстъ можно было бы указать еще много. Въ качествѣ предшественницы названнаго сочиненія укажу еще книгу того же автора—„Методика элементарной ариѳметики въ связи съ алгебраическимъ анализомъ*).

Послѣ этого короткаго введенія обратимся къ главному предмету нашихъ занятій.

---

*) M. Simon. „Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis". Leipzig, 1906.

I. Дѣйствія надъ натуральными числами.

Естественно, что мы начнемъ прежде всего съ основного вопроса всей ариѳметики, т. е. съ дѣйствій надъ цѣлыми положительными числами. Здѣсь, какъ и во всемъ своемъ изложеніи, я намѣренъ прежде всего поставить вопросъ о томъ, какъ этотъ предметъ трактуется въ школѣ, а затѣмъ уже займусь изслѣдованіемъ того, что онъ, собственно, въ себѣ содержитъ съ болѣе глубокой точки зрѣнія.

1. Введеніе чиселъ въ школѣ.

Я ограничусь здѣсь краткими указаніями, такъ какъ вы, несомнѣнно, еще помните, какъ вы сами учились этимъ вещамъ въ школѣ. Я здѣсь, конечно, отнюдь не имѣю въ виду дѣйствительно ввести васъ въ практику школьнаго обученія, какъ это дѣлается на семинарскихъ занятіяхъ, учрежденныхъ при среднеучебныхъ заведеніяхъ. Я намѣренъ только привести матеріалъ, который поможетъ намъ оріентироваться въ нашихъ критическихъ разсужденіяхъ.

Ознакомить дѣтей съ ученіемъ о цѣлыхъ числахъ, приспособляясь къ ихъ пониманію, научить ихъ дѣйствіямъ надъ ними такъ, чтобы они этимъ предметомъ вполнѣ овладѣли,— въ высшей степени трудно и требуетъ многолѣтнихъ усилій, начиная съ перваго года обученія вплоть до третьяго класса гимназіи. Тотъ способъ изложенія этихъ началъ, который въ настоящее время господствуетъ почти во всѣхъ нашихъ школахъ, можно лучше всего характеризовать словами „наглядно" и „генетически". Это значитъ, что весь матеріалъ разрабатывается постепенно съ самаго начала на почвѣ хорошо извѣстныхъ, наглядныхъ представленій. Въ этомъ заключается коренное отличіе отъ логической и систематической системы обученія, которая практикуется въ высшей школѣ. Весь матеріалъ расчленяется приблизительно слѣдующимъ образомъ (въ точности, конечно, этого

указать невозможно). Весь первый годъ обученія посвящается счету въ предѣлахъ *первыхъ двухъ десятковъ*, а, примѣрно, первое полугодіе даже счету въ предѣлахъ одного десятка. Числа вводятся, какъ *числовые образы*, составленные изъ точекъ, или какъ *количества* всевозможныхъ доступныхъ дѣтямъ предметовъ. Сложеніе и умноженіе объясняется дѣтямъ и усваивается ими на нагляцныхъ представленіяхъ. *На второй ступени* разрабатывается числовая область отъ единицы до ста; въ этотъ періодъ обученія, а зачастую еще и раньше, вводятся арабскія цифры, выясняется значеніе мѣста, занимаемаго цифрой въ числѣ, и вообще вводится десятичная система. Хочу здѣсь попутно указать, что установившееся названіе „арабскія цифры“, какъ и многое въ обычной терминологіи, *исторически неправильно*. Эта система счисленія въ дѣйствительности ведетъ начало *отъ индусовъ*, а не отъ арабовъ. Слѣдующая важная задача, относящаяся къ этой ступени обученія, есть разучиваніе *таблицы умноженія*. Сколько составитъ 5×3 или 3×8, нужно всегда помнить наизусть, а поэтому и заставляютъ дѣтей выучить табличку наизусть, конечно, выяснивъ имъ ее предварительно на наглядныхъ примѣрахъ. Для этого служитъ, главнымъ образомъ, „*счетная машина*“, которую обычно проще называютъ *счетами*. Она состоитъ изъ десяти параллельно укрѣпленныхъ проволокъ, по которымъ свободно передвигаются по десять шариковъ на каждой. Отбрасывая надлежащимъ образомъ эти шарики, мы можемъ прочесть на доскѣ результатъ умноженія, написанный уже въ десятичной формѣ.

Третій годъ обученія посвящается *дѣйствіямъ надъ многозначными числами* по извѣстнымъ простымъ правиламъ, справедливость которыхъ дѣтямъ обыкновенно ясна или, по крайней мѣрѣ, должна была бы быть ясна. Правда, этой ясности еще обыкновенно недостаточно для того, чтобы ученикъ вполнѣ усвоилъ правило, и учитель нерѣдко апеллируетъ къ авторитету очень дѣйствительнаго средства: „такъ оно есть, и, если ты этого не будешь знать, то тебѣ придется плохо!“

Я хочу здѣсь подчеркнуть еще одну сторону всего этого обученія, ибо этой стороной дѣла обыкновенно пренебрегаютъ въ высшей школѣ; именно, съ самаго начала удѣляется особенное вниманіе *приложеніямъ счета къ потребностямъ*

практической жизни. Числа съ самаго начала приводятся на конкретныхъ примѣрахъ практической жизни; ученикъ очень скоро начинаетъ считать монетами, мѣрами, вѣсами, и вопросомъ, столь важнымъ въ повседневной жизни, — „что стоитъ?“ — начинается обыкновенно большая часть нашихъ школьныхъ задачъ. Отсюда преподаватель постепенно восходитъ къ такимъ задачамъ (къ такъ называемымъ „скрытымъ“ задачамъ), въ которыхъ ходъ вычисленія предполагаетъ уже нѣкоторое самостоятельное разсужденіе; это приводитъ къ задачамъ на пропорціональное дѣленіе, смѣшеніе. Къ словамъ „наглядно“ и „генетически“, которыми мы старались выше охарактеризовать школьное обученіе, мы могли бы присоединить, въ качествѣ третьей характеристики, „практическія приложенія“.

Если бы мы, наконецъ, еще хотѣли охарактеризовать въ немногихъ словахъ и цѣль обученія ариѳметикѣ, то мы должны были бы сказать слѣдующее: она заключается въ томъ, чтобы пріучить дѣтей увѣренно владѣть ариѳметическими дѣйствіями, пользуясь при этомъ различными параллельно развивающимися душевными свойствами, къ которымъ приходится апеллировать, но не настаивая глубоко на логической концепціи, связывающей этотъ матеріалъ.

Упомяну здѣсь кстати о нѣкоторой враждѣ, играющей для школы нерѣдко фатальную роль, — именно, о враждѣ между преподавателями, получившими образованіе въ учительскихъ семинаріяхъ, и преподавателями, вышедшими изъ высшихъ учебныхъ заведеній *). Начиная съ третьяго класса, на мѣсто преподавателя, получившаго образованіе въ семинаріи, вступаетъ лицо съ высшимъ образованіемъ. Вслѣдствіе этого въ ходѣ обученія часто происходитъ разрывъ, достойный всякаго сожалѣнія. Бѣдныя дѣти часто бываютъ вынуждены внезапно оперировать совершенно другими выраженіями, нежели тѣ, къ которымъ они до того привыкли и надъ которыми теперь даже издѣваются. Небольшимъ примѣромъ является, скажемъ, различіе въ знакахъ умноженія: крестъ, который предпочитаетъ начальный учитель, и точка, ко-

*) Мы имѣемъ въ виду семинаріи для подготовленія начальныхъ учителей; это не относится къ семинарскимъ занятіямъ при средне-учебныхъ заведеніяхъ, о которыхъ мы упоминали выше.

торой охотнѣе пользуются академисты. Это враждебное отношеніе можно изгладить только такимъ путемъ, что преподаватели, идущіе изъ высшей школы, отнесутся съ бо́льшимъ вниманіемъ къ своимъ коллегамъ изъ семинаріи и будутъ стараться сойтись съ ними. Это вамъ легко удастся выполнить, если вы всегда будете помнить, съ какимъ уваженіемъ вы должны относиться къ народному учителю. Подумайте только, какую нужно выработать въ себѣ методическую выдержку, чтобы постоянно обучать ариѳметикѣ сотни тысячъ неразумныхъ мальчишекъ, не приносящихъ въ школу никакой предварительной подготовки. Попытайтесь это сдѣлать и вы убѣдитесь, что вся ваша академическая подготовка принесетъ вамъ здѣсь мало пользы.

Однако, послѣ этого краткаго отступленія возвратимся къ школьному преподаванію. Въ третьемъ и, въ особенности, въ четвертомъ классѣ обученіе счету постепенно принимаетъ уже благородное облаченіе математики, что характеризуется прежде всего переходомъ къ *буквенному исчисленію*. Буквами a, b, c или x, y, z обозначаютъ какія-нибудь числа, хотя первоначально все-же цѣлыя положительныя; надъ этими числовыми понятіями, изображаемыми буквами, производятъ дѣйствія, исходя изъ конкретнаго, нагляднаго содержанія, которое присваивается числамъ. Это представляетъ уже такой шагъ впередъ въ дѣлѣ абстракціи, что *математика, собственно, именно и начинается съ дѣйствій надъ буквами*. Конечно, этотъ переходъ не долженъ совершаться въ школѣ внезапно; напротивъ, мы должны пріучать юношу къ этой абстракціи постепенно.

Но уже здѣсь въ дѣлѣ обученія становится совершенно необходимымъ, чтобы самъ преподаватель былъ хорошо знакомъ *съ логическими законами и основами счета и теоріи цѣлыхъ чиселъ*, хотя бы ему естественно и не приходилось непосредственно сообщать ихъ ученикамъ. Займемся, поэтому, теперь нѣсколько подробнѣе основными законами счета.

2. Основные законы ариѳметическихъ дѣйствій.

Въ ходѣ историческаго развитія, конечно, долго складывали и умножали, не отдавая себѣ отчета въ тѣхъ законахъ, которымъ слѣдуютъ эти операціи. Лишь въ 20-хъ и 30-хъ годахъ предыдущаго столѣтія, главнымъ образомъ, французскіе и англійскіе ма-

тематики выяснили основныя свойства этихъ операцій, на чемъ я, впрочемъ, не буду здѣсь останавливаться. Кто хочетъ ознакомиться съ исторіей этого вопроса подробнѣе, тому я могу рекомендовать здѣсь, какъ буду это дѣлать неоднократно ниже, большую „Энциклопедію математическихъ наукъ“ *), а также ея французское изданіе, отчасти носящее характеръ второго переработаннаго изданія **). Эта „Энциклопедія“ больше, чѣмъ какое бы то ни было другое сочиненіе, должна было бы найти себѣ мѣсто во всякой школьной библіотекѣ, потому что она даетъ возможность всякому математику, учителю въ томъ числѣ, оріентироваться въ любомъ интересующемъ его вопросѣ. Къ тому предмету, которымъ мы теперь занимаемся, относится первая статья I тома ***) „Основы ариѳметики“ Шуберта ****), французское изданіе которой переработано Ж. Таннери (J. Tannery) и Ж. Молькомъ (J. Molk).

Возвращаясь къ нашей темѣ, я имѣю въ виду теперь дѣйствительно перечислить тѣ пять основныхъ законовъ, къ которымъ приводится сложеніе:

1) $a+b$ всегда представляетъ собой число; иначе говоря, дѣйствіе сложенія всегда безъ всякихъ исключеній выполнимо (въ противоположность вычитанію, которое въ области положительныхъ чиселъ не всегда выполняется);

2) сумма $a+b$ всегда однозначна;

3) имѣетъ мѣсто сочетательный, или ассоціативный, законъ: $(a+b)+c=a+(b+c)$, такъ что скобки можно и вовсе опустить;

4) имѣетъ мѣсто перемѣстительный, или коммутативный, законъ: $a+b=b+a$.

---

*) „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen“. Leipzig. B. G. Teubner, съ 1898 года; т. I вышелъ весь, томы II—VI выходятъ постепенно.

**) „Encyklopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées“. Paris (Gauthier-Villars) и Leipzig (Teubner), съ 1904 г.; т. I выходитъ въ настоящее время.

***) I томъ посвященъ ариѳметикѣ и алгебрѣ и выпущенъ подъ редакціей В. Ф. Мейера (W. Fr. Meyer, 1896—1904); во франц. изданіи I томъ редактируетъ Ж. Молькъ.

****) H. Schubert. „Grundlagen der Arithmetik“.

5) имѣетъ мѣсто законъ монотонности: если $b > c$, то $a + b > a + c$.

Эти свойства всѣ понятны безъ дальнѣйшихъ поясненій, если мы имѣемъ передъ глазами наглядное представленіе о числѣ, какъ о количествѣ. Но они должны быть выражены строго формально, чтобы на нихъ можно было основать дальнѣйшее развитіе теоріи строго логически.

Что касается умноженія, то здѣсь дѣйствуетъ, прежде всего, пять законовъ, аналогичныхъ только-что перечисленнымъ:

1) $a . b$ всегда есть число;

2) произведеніе $a . b$ однозначно;

3) законъ сочетательный: $a . (b . c) = (a . b) . c = a . b . c$;

4) законъ перемѣстительный: $a . b = b . a$;

5) законъ монотонности: если $b > c$, то $a . b > a . c$

Наконецъ, связь сложенія съ умноженіемъ устанавливается шестымъ закономъ:

6) законъ распредѣлительный, или дистрибутивный: $a . (b + c) = a . b + a . c$.

Что всѣ вычисленія опираются исключительно на эти 11 законовъ, можно себѣ легко уяснить. Я ограничусь простымъ примѣромъ, скажемъ, умноженіемъ числа 7 на 12; согласно закону распредѣлительному,

$$7 . 12 = 7 (10 + 2) = 70 + 14;$$

далѣе, если мы разобьемъ 14 на $10 + 4$ (чтобы вывести „перенесеніе десятковъ"), то, опираясь на законъ сочетательный, имѣемъ:

$$70 + (10 + 4) = (70 + 10) + 4 = 80 + 4 = 84.$$

Въ этомъ короткомъ разсужденіи вы, конечно, узнаете отдѣльные шаги, которые мы производимъ при вычисленіяхъ въ десятичной системѣ. Предоставляю вамъ самимъ разобрать примѣры посложнѣе. Мы здѣсь выскажемъ только сводный результатъ: наши цифровыя вычисленія заключаются въ повторномъ примѣненіи перечисленныхъ выше одиннадцати основныхъ положеній, а также въ примѣненіи заученныхъ наизусть результатовъ дѣйствій надъ простыми единицами (таблица сложенія и таблица умноженія).

Однако, гдѣ же находятъ себѣ примѣненіе законы монотонности? Въ обыкновенныхъ, формальныхъ вычисленіяхъ мы

на нихъ дѣйствительно не опираемся, но они оказываются необходимыми въ задачахъ нѣсколько иного рода. Напомню вамъ здѣсь о передѣлкѣ, которую въ десятичномъ счетѣ называютъ сокращеннымъ умноженіемъ и дѣленіемъ. Это пріемъ величайшей практической важности, который, къ сожалѣнію, въ школѣ и среди студентовъ далеко еще недостаточно извѣстенъ, хотя при случаѣ о немъ говорятъ уже во второмъ классѣ; я здѣсь ограничусь только примѣромъ. Положимъ, что намъ нужно помножить 567 на 134, при чемъ въ этихъ числахъ простыя единицы установлены, — скажемъ, посредствомъ физическихъ измѣреній, — лишь весьма неточно. Въ такомъ случаѣ было бы совершенно безполезно вычислять произведеніе съ полною точностью, такъ какъ таковое все равно не гарантируетъ намъ точнаго значенія интересующаго насъ числа. Но что намъ дѣйствительно важно, это — знать порядокъ величины произведенія, т. е. опредѣлить, въ предѣлахъ какого числа десятковъ или сотенъ число заключается. Но эту оцѣнку законъ монотонности дѣйствительно даетъ вамъ непосредственно, ибо изъ него вытекаетъ, что искомое число содержится между 560.134 и 570.134 или между 560.130 и 570.140. Дальнѣйшее развитіе этихъ соображеній я опять-таки предоставляю вамъ самимъ. Во всякомъ случаѣ, вы видите, что при „сокращенныхъ вычисленіяхъ" приходится постоянно пользоваться законами монотонности.

Что касается дѣйствительнаго примѣненія всѣхъ этихъ вещей въ школьномъ преподаваніи, то о систематическомъ изложеніи всѣхъ этихъ основныхъ законовъ сложенія и умноженія не можетъ быть и рѣчи. Учитель можетъ остановиться только на законахъ сочетательномъ, перемѣстительномъ и распредѣлительномъ, и то только при переходѣ къ буквеннымъ вычисленіямъ, эвристически выводя ихъ изъ простыхъ и ясныхъ численныхъ примѣровъ.

3. Логическія основы теоріи цѣлыхъ чиселъ.

Если въ дѣлѣ школьнаго преподаванія мы, естественно, еще менѣе можемъ дойти до постановки болѣе трудныхъ вопросовъ, то въ современномъ математическомъ изслѣдованіи серьезные вопросы здѣсь, собственно, и возникаютъ:

какъ обосновать эти законы, какъ обосновать понятіе о числѣ? Здѣсь я намѣренъ оріентировать васъ въ этомъ вопросѣ, оставаясь вѣрнымъ цѣли настоящаго сочиненія — освѣтить матеріалъ школьнаго преподаванія съ высшей точки зрѣнія, и я дѣлаю это тѣмъ охотнѣе, что эти современныя идеи и помимо того проникаютъ къ вамъ со всѣхъ сторонъ въ теченіе вашихъ академическихъ занятій, между тѣмъ какъ психологическая сторона этого дѣла обычно не оговаривается въ той мѣрѣ, въ какой это необходимо.

Что касается, прежде всего, самаго понятія о числѣ, то корни его въ высшей степени трудно вскрыть. Легче всего дышится, быть можетъ, тогда, когда рѣшаешься вовсе оставить въ сторонѣ эти трудныя вещи. За болѣе подробными указаніями относительно этихъ вопросовъ, очень усердно дебатируемыхъ философами, я вновь долженъ указать вамъ на приведенную выше статью французской энциклопедіи; здѣсь же ограничусь немногими замѣчаніями. Очень распространена точка зрѣнія, что понятіе о числѣ тѣсно связано съ понятіемъ о послѣдовательности во времени. Изъ представителей этого воззрѣнія укажу изъ философовъ Канта, изъ математиковъ — Гамильтона. Другіе, напротивъ, полагаютъ, что понятіе о числѣ стоитъ ближе къ пространственнымъ представленіямъ; они сводятъ понятіе о числѣ къ одновременному созерцанію различныхъ предметовъ, находящихся въ пространствѣ другъ подлѣ друга. Наконецъ, третье направленіе усматриваетъ въ представленіи о числѣ выраженіе особой способности нашего духа, независимо стоящей рядомъ съ нашими представленіями о пространствѣ и времени, а, можетъ быть, и выше ихъ. Я полагаю, что эта точка зрѣнія хорошо выражается цитатой изъ „Фауста", которую профессоръ Г. Миньковскій*) приводитъ относительно чиселъ въ сообщеніи о новомъ его сочиненіи „Діофантовы приближенія":

„Göttinen thronen hier in Einsamkeit,
Um sie kein Ort, noch weniger eine Zeit" **).

Если въ этой задачѣ мы имѣемъ дѣло болѣе съ вопросами теоріи познанія и психологіи, то въ проблемѣ

*) H. Minkowsky. „Diophantische Approximationen".

**) „Тамъ царятъ въ уединеніи богини, вокругъ нихъ нѣтъ никакого мѣста, нѣтъ никакого времени".

объ обоснованіи нашихъ одиннадцати законовъ мы стоимъ существенно передъ вопросомъ логики.

Мы здѣсь будемъ различать четыре точки зрѣнія.

1. Первая точка зрѣнія, представителемъ которой я могу назвать Канта, смотритъ на правила дѣйствій, какъ на непосредственный результатъ воззрѣнія (Anschauung), при чемъ это слово въ наиболѣе широкомъ его значеніи нужно понимать, какъ „внутреннее воззрѣніе", или интуицію. Впрочемъ, этотъ взглядъ отнюдь не сводится къ тому, что вся математика опирается на экспериментально контролируемые факты грубаго внѣшняго опыта. Приведемъ простой примѣръ. Законъ перемѣстительный доказывается ссылкой на приведенную здѣсь фигуру, въ которой соединены двѣ группы по три точки въ каждой, при чемъ мы видимъ, что совокупность ихъ распадается также на три группы по двѣ точки въ каждой: $2.3 = 3.2$. Если на это, однако, возражаютъ, что, при сколько-нибудь значительныхъ числахъ, это непосредственное воззрѣніе уже не приводитъ къ сознанію справедливости высказанной истины, то приходится прибѣгнуть къ закону совершенной индукціи: если нѣкоторое предложеніе справедливо для небольшихъ чиселъ, и если, сверхъ того, оно остается справедливымъ для числа $n+1$ всякій разъ, какъ оно справедливо для числа n, то оно справедливо вообще для всякаго числа. Это предложеніе, имѣющее интуитивное происхожденіе, дѣйствительно всегда помогаетъ намъ выйти за тѣ предѣлы, въ которые насъ необходимо ставитъ конкретное воззрѣніе. На этой, приблизительно, точкѣ зрѣнія стоитъ также и Пуанкарэ въ своихъ извѣстныхъ философскихъ сочиненіяхъ.

Если мы хотимъ уяснить себѣ значеніе этого вопроса объ обоснованіи одиннадцати основныхъ законовъ счета, то мы должны принять въ соображеніе, что, совмѣстно съ ариѳметикой, на нихъ, въ конечномъ счетѣ, покоится и вся математика. Мы не впадемъ, поэтому, въ преувеличеніе, если скажемъ, что, согласно выясненной сейчасъ точкѣ зрѣнія, достовѣрность всего зданія математики, въ конечномъ счетѣ, опирается на

воззрѣніе (интуицію), въ самомъ обычномъ смыслѣ этого слова.

2. Во вторую очередь мы приведемъ нѣкоторую модификацію первой точки зрѣнія. Она заключается въ томъ, что пытаются расчленить эти основные законы на значительно болѣе мелкія ступени, такъ что на непосредственномъ воззрѣніи приходится основать только немногіе простѣйшіе случаи, изъ которыхъ можно вывести остальные уже чисто логически, не прибѣгая вновь къ воззрѣнію. Въ то время, какъ обычно чисто логическія операціи примѣняются лишь по установленіи названныхъ одиннадцати законовъ, здѣсь оказывается возможнымъ воспользоваться ими раньше, именно послѣ введенія упомянутыхъ болѣе простыхъ предложеній. Граница, отдѣляющая воззрѣніе отъ логики, отодвигается, и притомъ въ пользу послѣдней. Эту точку зрѣнія впервые провелъ Германъ Грассманнъ (H. Grassmann) въ своемъ „Учебникѣ ариѳметики“ *), выпущенномъ въ 1861 году.

Въ качествѣ примѣра я укажу, что законъ перемѣстительности съ помощью совершенной индукціи можетъ быть выведенъ изъ закона сочетательности. Послѣ книги Грассманна слѣдуетъ указать сочиненіе итальянскаго ученаго Пеано**) (Peano) „Начала ариѳметики, изложенныя новымъ методомъ“. Однако, не думайте по этому заголовку, что книга написана по латыни. Напротивъ, она написана на собственномъ символическомъ языкѣ автора, который имѣетъ цѣлью выдѣлить каждый шагъ логическаго доказательства. Пеано имѣетъ въ виду такимъ образомъ достигнуть гарантій, что онъ дѣйствительно опирается исключительно на тѣ положенія, которыя онъ предварительно принялъ, и не

---

*) H. Grassmann. „Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten“. Berlin, 1861. Важнѣйшія главы отпечатаны въ полномъ собраніи математическихъ и физическихъ сочиненій Г. Грассманна „H. Grassmanns gessammelte mathematische und physikalische Werken“ (herausgegeb. v. F. Engel), Bd. II, 1 (Leipzig, 1904), p. p. 295—349.

**) Peano. „Arithemeticae principia nova methode exposta“. Augustae Taurinorum. Torino, 1889. Замѣтимъ, что авторъ развилъ идею, изложенную въ указанномъ выше сочиненіи, въ новой книгѣ „Aritmetica generale e algebra elementare“ (1902), написанной въ идеографической системѣ.

пользуется никакимъ другимъ интуитивнымъ матеріаломъ. Онъ хочетъ избѣжать опасности, которую необходимо вноситъ обыкновенный языкъ своими безконтрольными ассоціаціями идей и воспоминаніями о наглядныхъ образахъ. Долженъ сказать вамъ къ тому же, что *Пеано* является главой цѣлой школы, очень обширной въ Италіи, которая такимъ же образомъ расчленяетъ предпосылки каждой отдѣльной математической дисциплины и старается посредствомъ идеографіи (по нѣмецки Begriffsschrift, писаніе понятіями) изслѣдовать ея логическія концепціи.

3. Мы переходимъ теперь *къ современному развитію этихъ идей*, которое, впрочемъ, оказало уже свое вліяніе и на *Пеано*. Я разумѣю ту обработку ученія о числѣ, которое кладетъ въ основу понятіе о *комплексѣ*, или *множествѣ*. Общую идею о комплексѣ — вы составите себѣ представленіе о широкомъ объемѣ этого понятія, если я скажу вамъ, что совокупность всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, съ одной стороны, и совокупность всѣхъ точекъ отрѣзка, съ другой стороны, представляютъ собой частные примѣры комплексовъ — эту общую идею впервые сдѣлалъ предметомъ систематическаго математическаго изслѣдованія *Георгъ Канторъ* (G. Kantor), профессоръ въ Галле; созданное имъ *ученіе о комплексахъ, или множествахъ* (Mengenlehre), въ настоящее время значительно заинтересовало молодое поколѣніе математиковъ. Позже я еще попытаюсь дать вамъ возможность заглянуть въ эту теорію; здѣсь же я ограничусь слѣдующей краткой характеристикой этой новой системы ариѳметики: *эта система старается свести свойства цѣлыхъ чиселъ и относящихся къ нимъ операцій къ общимъ свойствамъ комплексовъ и связанныхъ съ ними абстрактныхъ соотношеній*; этимъ имѣется въ виду достигнуть возможно болѣе глубокаго и общаго обоснованія теоріи цѣлыхъ чиселъ. Въ качествѣ піонера этого направленія я долженъ указать еще *Р. Дедекинда* (R. Dedekind), который въ своей небольшой, но весьма содержательной книжкѣ „Что такое числа и каково ихъ значеніе“?*) впервые далъ такое обоснованіе ученія о цѣлыхъ числахъ. Къ этой точкѣ

*) R. *Dedekind*. „Was sind und was sollen die Zahlen“. Braunschweig, 1888.

зрѣнія по существу примыкаетъ и Г. Веберъ (H. Weber) въ первой главѣ I-го тома „Энциклопедіи элементарной математики". Однако, оказывается, что развитіе теоріи становится при этомъ настолько отвлеченнымъ и мало доступнымъ, что въ приложеніи къ третьему тому того же сочиненія авторъ былъ вынужденъ дать болѣе элементарное изложеніе того же предмета, оперирующее исключительно надъ конечными комплексами. На это приложеніе я настойчиво обращаю вниманіе всѣхъ, кто интересуется этимъ предметомъ.

4. Наконецъ, въ заключеніе, я хочу привести еще чисто формальную теорію числа, которая восходитъ еще до Лейбница и которая въ послѣднее время особенно выдвинута Гильбертомъ. Къ ариѳметикѣ относится въ этомъ смыслѣ его докладъ на третьемъ международномъ математическомъ конгрессѣ въ Гейдельбергѣ „Объ основахъ логики и ариѳметики"*). Точка исхода здѣсь заключается въ слѣдующемъ. Если мы уже располагаемъ одиннадцатью законами счета, то мы можемъ вести счетъ въ буквахъ a, b, c, выражающихъ любыя числа, совершенно не считаясь съ тѣмъ значеніемъ, которое таковыя имѣютъ, какъ числа. Или яснѣе: пусть $a, b, c\ldots$ будутъ вещи безъ всякаго значенія, вѣрнѣе, вещи, о значеніи которыхъ намъ ничего неизвѣстно. Положимъ также, что намъ все же извѣстно, что надъ ними можно производить операціи согласно перечисленнымъ одиннадцати основнымъ положеніямъ, хотя бы эти операціи не имѣли какого-либо извѣстнаго намъ содержанія; тогда мы можемъ оперировать надъ этими объектами совершенно такъ же, какъ и надъ обыкновенными числами; но при этомъ возникаетъ только вопросъ, не могутъ ли эти операціи когда-либо привести къ противорѣчію. Если обыкновенно говорятъ, что опытъ обнаруживаетъ существованіе чиселъ, для которыхъ перечисленныя правила имѣютъ мѣсто, и что въ этихъ правилахъ, слѣдовательно, нѣтъ противорѣчія, то теперь, когда мы отказываемся отъ реальнаго значенія этихъ символовъ, такого рода ссылка на наглядное представленіе уже недопустима. Вмѣстѣ съ тѣмъ возникаетъ совершенно новая задача доказать чисто логически, что при любыхъ операціяхъ надъ

*) D. Hilbert. „Über die Grundlagen der Logik u. Arithmetik". Verhandlungen des III internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg von 8 bis 13 August 1904 (Leipzig, 1905), p. p. 174 f. f.

нашими символами согласно перечисленнымъ одиннадцати основнымъ законамъ, мы никогда не придемъ къ противорѣчію, т. е. упомянутые одиннадцать законовъ логически совмѣстны (consistent). Если мы вначалѣ, при изложеніи первой точки зрѣнія, сказали, что достовѣрность математики покоится на существованіи наглядныхъ объектовъ, для которыхъ имѣютъ мѣсто ея законы, то представитель настоящей формальной точки зрѣнія усматриваетъ достовѣрность математики въ томъ, что основные ея законы, съ чисто формальной точки зрѣнія, независимо отъ ихъ нагляднаго содержанія, представляютъ логически цѣльную систему, не содержащую противорѣчія.

Для выясненія и оцѣнки этой новой точки зрѣнія я долженъ сдѣлать еще нѣсколько замѣчаній.

a) Гильбертъ формулировалъ эти идеи по отношенію къ ариѳметикѣ и началъ ихъ разрабатывать, но онъ отнюдь не далъ полнаго развитія ихъ. Послѣ упомянутаго доклада онъ еще разъ возвратился къ этому предмету въ одной лекціи, но больше этими вопросами не занимался. Мы можемъ, слѣдовательно, сказать, что здѣсь мы имѣемъ передъ собой только программу.

b) Попытка совершенно изгнать воззрѣніе и удержать только логическое изслѣдованіе представляется мнѣ въ полной мѣрѣ неосуществимой. Нѣкоторый остатокъ, нѣкоторый минимумъ интуиціи всегда долженъ сохраниться, и эти остаточныя интуитивныя представленія мы необходимо должны соединять съ символами, надъ которыми оперируемъ, даже уже потому, что мы должны эти символы постоянно вновь узнавать, — хотя бы этотъ остатокъ и сводился только къ внѣшнему виду нашихъ символовъ.

c) Но примемъ даже, что поставленная задача дѣйствительно безупречно разрѣшена, что обнаружено чисто логически отсутствіе противорѣчія въ нашихъ одиннадцати основныхъ положеніяхъ. Но тогда все еще остается мѣсто возраженію, которому я придаю наибольшее значеніе. Нужно себѣ уяснить, что эти соображенія собственно обоснованія ариѳметики еще отнюдь не даютъ, и что въ этомъ порядкѣ идей его и нельзя провести. Именно, совершенно невозможно чисто логическимъ путемъ показать, что законы, въ

которыхъ мы обнаружили отсутствіе логическаго противорѣчія, дѣйствительно имѣютъ силу по отношенію къ числамъ, столь хорошо намъ извѣстнымъ эмпирически, что неопредѣленные объекты, о которыхъ здѣсь идетъ рѣчь, могутъ быть отождествлены съ реальными числами, а сопряженія, которыя мы производимъ,—съ реальными эмпирическими процессами. Что здѣсь дѣйствительно достигается—это только *расчлененіе обширной задачи обоснованія ариѳметики, мало доступной по своей сложности, на двѣ части*; первая часть представляетъ собой чисто логическую проблему установленія независимыхъ другъ отъ друга основныхъ положеній, или аксіомъ, и доказательства ихъ независимости и отсутствія противорѣчія. Вторая часть задачи относится скорѣе къ теоріи познанія и въ извѣстной мѣрѣ выражаетъ примѣненіе названныхъ логическихъ изслѣдованій къ реальнымъ соотношеніямъ; къ разработкѣ этой второй задачи, строго говоря, еще не приступлено, хотя для дѣйствительнаго обоснованія ариѳметики и она необходимо должна быть исчерпана. Эта вторая часть вопроса представляетъ крайне глубокую задачу, трудность которой коренится въ общихъ проблемахъ теоріи познанія. Быть можетъ, я выражу наиболѣе ясно постановку этого вопроса, если выскажу нѣсколько парадоксальное утвержденіе, что всякій, который признаетъ *чистой* математикой только чисто логическое изслѣдованіе, необходимо вынужденъ будетъ отнести вторую часть проблемы обоснованія ариѳметики, а вмѣстѣ съ этимъ, стало быть, и самую ариѳметику, къ *прикладной* математикѣ.

Я считаю необходимымъ отчетливо все это здѣсь указать, такъ какъ въ этомъ именно пунктѣ наиболѣе часто возникаютъ недоразумѣнія вслѣдствіе того, что многіе просто не замѣчаютъ существованія этой второй задачи. *Гильбертъ* самъ отнюдь не стоитъ на этой точкѣ зрѣнія, и мы не можемъ признать ни одобреній ни возраженій его теоріи, которыя исходятъ изъ такого именно допущенія. *Томэ* (Thomae), профессоръ въ Вѣнѣ, остроумно назвалъ людей, стоящихъ на почвѣ этихъ чисто абстрактно логическихъ изслѣдованій о вещахъ, ничего не обозначающихъ, и о предложеніяхъ, ничего не выражающихъ, которые, такимъ образомъ, не только забываютъ эту вторую проблему, но вмѣстѣ съ ней и всю остальную математику,—мыслителями безъ мысли;

конечно, это ироническое замѣчаніе не можетъ относиться къ лицамъ, которыя занимаются этого рода изслѣдованіями попутно, рядомъ съ многочисленными другими вопросами.

Въ связи съ этими разсужденіями объ основахъ ариѳметики, обзоръ которыхъ я вамъ изложилъ, я хочу представить вашему вниманію еще нѣкоторыя соображенія общаго характера. Многократно высказывалось мнѣніе, что обученіе математикѣ можно и даже должно вести строго дедуктивно, полагая въ основу цѣлый рядъ аксіомъ и развивая изъ него все остальное строго логически. Этотъ пріемъ, который такъ охотно поддерживаютъ историческимъ авторитетомъ Евклида, однако, отнюдь не соотвѣтствуетъ историческому ходу развитія математики. Напротивъ, въ дѣйствительности математика развивалась подобно дереву, которое разрастается не путемъ тончайшихъ развѣтвленій, идущихъ отъ корней, а разбрасываетъ свои вѣтви и листья вширь и вверхъ, распространяя ихъ зачастую внизъ, къ корнямъ. Совершенно такъ же и математика, оставляя образное выраженіе, начала свое развитіе съ опредѣленнаго пункта, соотвѣтствовавшаго, скажемъ, здравому человѣческому смыслу, и по мѣрѣ того, какъ мы восходили къ новымъ и новымъ познаніямъ, мы одновременно опускались также и внизъ къ изслѣдованію основаній науки. Такъ, напримѣръ, мы стоимъ теперь относительно основаній на совершенно другой точкѣ зрѣнія, чѣмъ та, которой придерживались изслѣдователи нѣсколько десятковъ лѣтъ тому назадъ; точно такъ же то, что мы выдаемъ за послѣдніе принципы, черезъ короткое время сдѣлается пережиткомъ, такъ какъ послѣднія истины будутъ все глубже и детальнѣе расчленяться и приводиться къ болѣе общимъ положеніямъ. *Въ основныхъ изслѣдованіяхъ въ области математики не можетъ быть и конечнаго перваго начала, которое могло бы служить абсолютной исходной точкой для преподаванія.*

Я хотѣлъ бы сдѣлать еще одно замѣчаніе, касающееся отношенія между логической и интуитивной математикой, между чистой и прикладной математикой. Я имѣлъ уже случай упомянуть, что въ школѣ приложеніе съ самаго начала сопровождаетъ обученіе ариѳметикѣ, что ученикъ не только долженъ понимать правила, но долженъ также учиться дѣлать изъ нихъ то или иное употребленіе. Такъ оно нормально должно было оставаться и

всюду, гдѣ идутъ занятія математикой. Чисто логическія концепціи должны составить, такъ сказать, твердый скелетъ организма математики, сообщающій ей устойчивость и достовѣрность. Но самая жизнь математики, важнѣйшія наведенія и ея продуктивность относятся преимущественно къ ея приложеніямъ, т. е. къ взаимнымъ отношеніямъ ея абстрактныхъ объектовъ ко всѣмъ другимъ областямъ. Изгнать приложеніе изъ математики значило бы то же самое, что искать живое существо съ одной только костной основой безъ мускуловъ, нервовъ и сосудовъ.

Въ дѣлѣ научнаго изслѣдованія будетъ, конечно, всегда оставаться раздѣленіе труда между чистой и прикладной наукой, но, если только мы хотимъ сохранить здравое соотношеніе, мы должны заботиться о непрерывной связи между этими сторонами дѣла; здѣсь же я хотѣлъ бы съ особенной силой подчеркнуть то обстоятельство, что въ школѣ такого рода раздѣленіе труда, такого рода спеціализація отдѣльнаго учителя совершенно невозможна. Вообразите себѣ, напримѣръ,—чтобы это рѣзко выразить,—въ какой-либо школѣ учителя, который трактуетъ числа, какъ символы, лишенные значенія; другого, который умѣетъ изъ этихъ ничего не означающихъ символовъ выполучить наглядныя числа; наконецъ, третьяго, четвертаго, пятаго, которые владѣютъ приложеніями этихъ символовъ въ геометріи, механикѣ, физикѣ. Представьте себѣ, что въ распоряженіе всѣхъ этихъ различныхъ учителей будутъ предоставлены ученики. Вы понимаете, что такимъ образомъ дѣло обученія не можетъ быть организовано; этимъ путемъ предметъ не можетъ быть усвоенъ учениками, а различные учителя не смогутъ понимать другъ друга. Потребности школьнаго преподаванія, такимъ образомъ, предполагаютъ извѣстную разносторонность каждаго учителя, умѣнье довольно широко оріентироваться въ области чистой и прикладной математики въ самомъ широкомъ смыслѣ этого слова; этимъ путемъ учитель долженъ всегда создавать коррективъ противъ слишкомъ мелкаго расщепленія науки.

Я возвращусь здѣсь еще разъ къ упомянутымъ уже выше дрезденскимъ предложеніямъ, чтобы дать практическое направленіе всѣмъ послѣднимъ замѣчаніямъ. Въ этихъ предложеніяхъ мы настаиваемъ на томъ, чтобы прикладная математика, которая съ 1898 года введена въ испытаніе на званіе учителя, какъ

особая спеціальность, была признана необходимой составной частью каждаго нормальнаго математическаго образованія, чтобы, такимъ образомъ, удостовѣреніе въ правѣ преподаванія чистой и прикладной математики выдавалось всегда совмѣстно. Наконецъ, упомянемъ также, что̀ педагогическая коммиссія въ такъ называемой меранской программѣ ставитъ цѣлью обученія математикѣ въ выпускномъ классѣ*). Эта цѣль должна быть троякаго рода:

1) научный обзоръ систематическаго построенія математики;

2) умѣнье толково справляться съ численной и графической разработкой отдѣльныхъ задачъ;

3) нѣкоторое ознакомленіе съ значеніемъ математической мысли въ естествознаніи и современной культурѣ.

Ко всѣмъ этимъ резолюціямъ я присоединяюсь съ глубочайшимъ убѣжденіемъ въ ихъ правильности.

4. Практика счета съ цѣлыми числами.

Послѣ отвлеченныхъ разсужденій, которыми я преимущественно занимался до сихъ поръ, я обращусь къ конкретнымъ вещамъ, именно—исключительно къ вычисленіямъ, производимымъ надъ числами. Изъ литературы, дающей возможность въ этомъ вопросѣ оріентироваться, я прежде всего укажу опять-таки на статью въ энциклопедіи по этому предмету, принадлежащую Р. Мемке**). Я лучше всего дамъ вамъ обзоръ относящихся сюда вопросовъ, если сначала изложу вамъ планъ этой статьи. Она распадается прежде всего на двѣ части, именно: А. Ученіе о точныхъ вычисленіяхъ; В. Ученіе о приближенныхъ вычисленіяхъ. Къ отдѣлу А принадлежатъ всѣ методы, облегчающіе точныя дѣйствія надъ большими числами, какъ, напримѣръ, удобное расположеніе тѣхъ или иныхъ схемъ въ вычисленіи, таблицы произведеній и квадратовъ, въ особенности же счетныя машины, которыми мы сей-

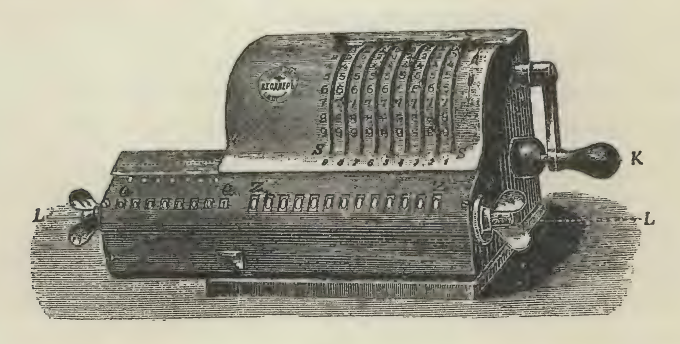
*) Reformvorschläge für den math. und naturw. Unterricht überreicht der Vers. d. Naturforscher u. Aerzte zu Meran (Leipzig 1905). Этотъ отчетъ напечатанъ также въ общемъ отчетѣ коммиссіи на стр. 93 (см. нашу ссылку въ № 479, на стр. 529); свѣдѣнія о немъ можно найти также въ книгѣ Klein-Schimmack, на стр. 208 (см нашу ссылку въ № 479, на стр. 530).

**) R. Mehmke. „Numerisches Rechnen“. Encykl., Bd. I, Teil 2.

часъ займемся подробнѣе. Въ отдѣлѣ В, напротивъ, вы найдете разработку всѣхъ тѣхъ пріемовъ, которые имѣютъ въ виду опредѣлить только порядокъ величины результата, т. е. установить первыя значащія его цифры. Сюда относятся таблицы логариѳмовъ и аналогичныя средства вычисленія, какъ, напримѣръ, счетная линейка, которая, строго говоря, представляетъ собой только графическую таблицу логариѳмовъ, особымъ образомъ приспособленную, и, наконецъ, многочисленные графическіе методы. Кромѣ этого реферата, я могу еще рекомендовать вамъ небольшую книгу Люрота—„Лекціи о ычисленіяхъ, производимыхъ надъ числами“ *), которая написана знатокомъ дѣла и при пріятномъ изложеніи даетъ возможность быстро оріентироваться въ вопросѣ. Изъ всего того, что относится къ вычисленіямъ, производимымъ надъ цѣлыми числами, я намѣренъ описать вамъ подробнѣе счетную машину, которую въ настоящее время въ весьма разнообразныхъ конструкціяхъ можно найти въ любой болѣе или менѣе значительной конторѣ и которая практически дѣйствительно имѣетъ весьма большое значеніе. Въ нашемъ кабинетѣ математическихъ моделей имѣется экземпляръ одного изъ наиболѣе распространенныхъ типовъ, такъ называемой „Brunsviga“, которая изготовляется фирмой „Grimme Natalis und Co.“ въ Брауншвейгѣ. Это одна изъ наиболѣе универсальныхъ и въ то же время изъ наиболѣе простыхъ машинъ; хотя это и не лучшая машина, но она имѣетъ то большое преимущество, что она сравнительно дешева—она стоитъ только отъ 200 до 300 марокъ. Въ первоначальномъ своемъ видѣ она была изобрѣтена русскимъ математикомъ Однеромъ и долгое время была извѣстна подъ названіемъ ариѳмометра (рис. 1). Устройство этой машины я хочу вамъ объяснить здѣсь, въ видѣ примѣра, нѣсколько подробнѣе; описаніе другихъ конструкцій вы найдете въ упомянутыхъ выше сочиненіяхъ. Конечно, по моему описанію вы только въ томъ случаѣ дѣйствительно поймете устройство машины, если вы потомъ къ ней присмотритесь и сами на дѣлѣ ознакомитесь съ ея функціями. Машина находится въ вашемъ распоряженіи послѣ лекціи. Что касается, прежде всего, внѣшняго вида машины „Brunsviga“, то схематически ее можно описать слѣдую-

*) F. Lüroth. „Vorlesungen über numerisches Rechnen“. Leipzig, 1900.

щимъ образомъ. Къ довольно большой крѣпкой коробкѣ (барабану) снизу прикрѣпленъ меньшій продолговатый футляръ (каретка), которая можетъ передвигаться вдоль по барабану впередъ и назадъ. Съ правой стороны съ барабана выступаетъ рукоятка, которую можно крутить рукой. На барабанѣ сдѣлано нѣсколько продолговатыхъ прорѣзовъ, вдоль каждаго изъ которыхъ сверху внизъ нанесены цифры 0, 1, 2, . . . , 9. Изъ каждаго прорѣза выступаетъ спица S, которую можно установить противъ любой изъ этихъ цифръ. Каждому изъ этихъ прорѣзовъ отвѣчаетъ на кареткѣ отверстіе, въ которомъ можетъ появиться цифра. Я полагаю, что устройство машины вамъ выяснится лучше всего, если я опишу вамъ выполненіе какого-нибудь вычисленія и выясню, какъ его производитъ машина. Выбираю для этого умноженіе.



Рпс. 1.

Пріемъ заключается въ слѣдующемъ. *Прежде всего нужно поставить при помощи спицъ, выступающихъ изъ барабана, множимое.* Это значитъ, что нужно поставить сначала первую спицу съ правой стороны на цифру, стоящую въ разрядѣ единицъ, вторую—на цифру въ разрядѣ десятковъ и т. д. Всѣ остальныя спицы остаются на нуляхъ. Если 12 есть множимое, то первая спица справа должна быть поставлена на 2, вторая на 1, а остальныя остаются на нуляхъ (рис. 2).

Теперь повернемъ рукоятку слѣва направо на одинъ оборотъ. Тогда внизу, въ отверстіяхъ каретки, появится множимое. Стало быть, въ нашемъ случаѣ появится двойка въ первомъ отверстіи справа, единица — во второмъ, а въ остальныхъ останутся нули. Одновременно съ этимъ *на счет-*

чикѣ, цифры котораго появляются въ рядѣ отверстій, помѣщающихся съ лѣвой стороны каретки, появляется единица, показывающая, что мы повернули каретку одинъ разъ (рис. 3). *Если мы вообще имѣемъ однозначный множитель, то рукоятку нужно повернуть столько разъ, сколько во множителѣ единицъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ множитель появится на кареткѣ съ лѣвой стороны, а произведеніе — съ правой.*

Какимъ же образомъ аппаратъ воспроизводитъ этотъ результатъ? Прежде всего, внизу въ кареткѣ, съ лѣвой стороны, подъ отверстіемъ счетчика, придѣлано *счетное колесо*, на периферіи котораго, на равныхъ разстояніяхъ, нанесены цифры 0, 1, 2, . . . , 9, при чемъ, при помощи передачи зубчатыми колесами, счетное колесо совершаетъ одну десятую оборота, когда рукоятка дѣлаетъ цѣлый оборотъ, такъ что цифра, находящаяся

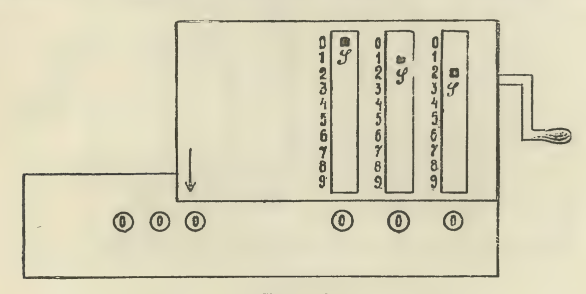


Рис. 2.

наверху колеса подъ отверстіемъ каретки, дѣйствительно показываетъ число оборотовъ рукоятки, т. е. показываетъ множитель.

Что касается умноженія, то для его производства подъ каждымъ отверстіемъ съ правой стороны каретки помѣщается счетное колесо такой же конструкціи. Но какимъ образомъ оказывается, что теперь при оборотѣ рукоятки въ приведенномъ выше примѣрѣ одно колесо проскакиваетъ на одну единицу, второе въ то же время на двѣ единицы? Здѣсь, собственно, и находитъ себѣ примѣненіе конструктивная особенность машины „Brunsviga". Именно, подъ каждымъ прорѣзомъ барабана находится *плоское колесо* (двигательное колесо); къ нему придѣлано девять зубцовъ, которые могутъ двигаться въ радіальномъ направленіи. По краю плоскаго круга движется кольцо R

(рис. 4 и 5), поворачивающееся, когда мы переставляемъ спицу S, о которой была рѣчь выше; именно, смотря по мѣткѣ, на которую мы ставимъ спицу S на прорѣзѣ, наружу выскакиваютъ 0, 1, 2, . . . , или 9 подвижныхъ зубцовъ (на рис. 4 выдвинуты два зубца). Эти зубцы непосредственно попадаютъ подъ соотвѣтствующее отверстіе счетнаго колеса, и поэтому при одномъ оборотѣ рукоятки каждое двигательное колесо поворачиваетъ соотвѣтствующее счетное колесо каретки на столько единицъ, сколько въ немъ выскочило зубцовъ, т. е. сколько указываетъ цифра, на которую мы установили соотвѣтствующую спицу S.

Сообразно этому, въ указанномъ выше примѣрѣ, если мы начинаемъ съ нулевого положенія, послѣ одного поворота рукоятки колесо единицъ должно повернуться на двѣ единицы, колесо десятковъ на одну, и на кареткѣ появится 12; при второмъ поворотѣ рукоятки колесо единицъ вновь повернется на 2, колесо десятковъ на 1 единицу, и машина покажетъ 24. Такимъ же образомъ послѣ трехъ и четырехъ оборотовъ рукоятки мы получимъ $36 = 3 . 12$ и $48 = 4 . 12$.

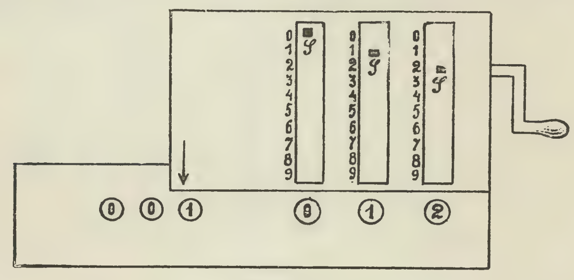


Рис. 3.

Теперь повернемъ рукоятку въ пятый разъ. Согласно тому, что было объяснено выше, колесо единицъ повернется на двѣ единицы и остановится, слѣдовательно, на нулѣ, колесо же десятковъ должно повернуться на одну единицу и стать на 5, такъ что мы получили бы неправильный результатъ 50 вмѣсто $5 . 12 = 60$. Когда мы дѣйствительно будемъ поворачивать рукоятку, то на кареткѣ незадолго до конца поворота дѣйствительно появится 50; но, когда мы доведемъ оборотъ до конца, то въ

послѣдній моментъ цифра мѣняется на 6, такъ что появляется правильный результатъ. Здѣсь произошло, слѣдовательно, еще кое-что, чего мы не описали,—процессъ, представляющій наиболѣе тонкій пунктъ при устройствѣ каждой счетной машины,—

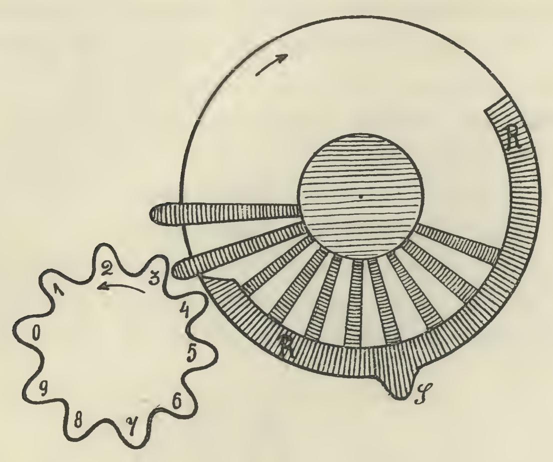


Рис. 4.

такъ называемое перенесеніе десятковъ. Принципъ, при помощи котораго эта задача разрѣшается, заключается въ слѣдующемъ: когда одно изъ счетныхъ колесъ каретки (въ нашемъ примѣрѣ — колесо единицъ) проходитъ черезъ нуль, то оно нажимаетъ одинъ зубецъ, остающійся, обыкновенно, сбоку безъ дѣйствія. Благодаря этому упомянутое двигательное колесо захватываетъ соотвѣтствующее счетное колесо такъ, что послѣднее продвигается на одну единицу больше, чѣмъ это произошло бы безъ нажатія. Детали этой конструкціи вы можете себѣ выяснить, только непосредственно разсмотрѣвъ самый аппаратъ. Останавливаться на этихъ деталяхъ тѣмъ болѣе нецѣлесообразно, что именно въ дѣлѣ перенесенія десятковъ въ машинахъ различныхъ системъ находятъ себѣ примѣненіе другіе прин-

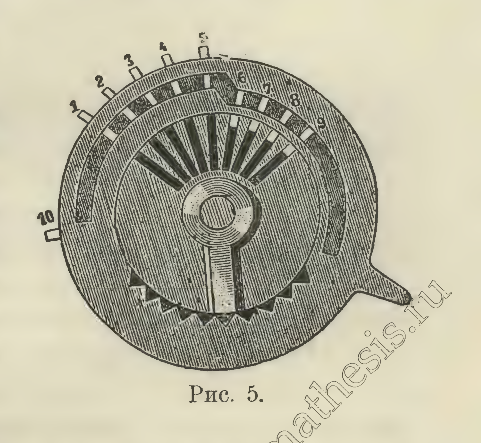


Рис. 5.

ципы. Тѣмъ не менѣе я очень рекомендую вамъ разсмотрѣть нашу машину, какъ примѣръ чрезвычайно остроумной конструкціи. Въ нашей коллекціи имѣются особые экземпляры отдѣльныхъ составныхъ частей машины „Brunsviga“, которыя въ составленной машинѣ почти не видны. Вы можете, такимъ образомъ, составить себѣ вполнѣ ясное представленіе объ устройствѣ машины.

Дѣйствіе машины, насколько мы съ нею до сихъ поръ познакомились, мы можемъ выразить однимъ словомъ, если мы назовемъ ее машиной сложенія въ томъ смыслѣ, что она, при каждомъ оборотѣ рукоятки, прибавляетъ къ числу, стоящему справа внизу каретки, множимое одинъ разъ.

Наконецъ, я хочу еще въ общихъ чертахъ описать то приспособленіе, которое даетъ возможность быстро оперировать также съ многозначными сомножителями. Если бы намъ нужно было

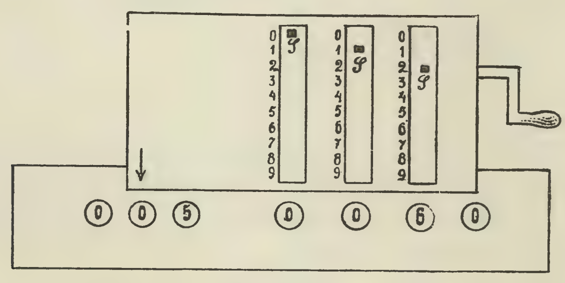


Рис. 6.

умножить 12 на 15, то мы должны были бы, сообразно выясненному пріему, повернуть рукоятку 15 разъ. Кромѣ того, если бы мы пожелали, чтобы съ лѣвой стороны на счетчикѣ появился весь множитель, то и къ счетчику должно было быть придѣлано приспособленіе для счета десятковъ. То и другое устраняется слѣдующимъ образомъ. Мы выполняемъ сначала умноженіе на 5, такъ что на кареткѣ появляется съ правой стороны 60, съ лѣвой стороны — 5. Теперь мы передвигаемъ каретку на одинъ разрядъ направо; при этомъ счетное колесо единицъ выключается, колесо же десятковъ устанавливается подъ прорѣзомъ для единицъ въ барабанѣ и т. д.; въ то же время на лѣвомъ концѣ на счетчикѣ вмѣсто колеса единицъ приходитъ въ соединеніе съ рукояткой колесо десятковъ. Если поэтому мы

повернемъ теперь рукоятку одинъ разъ, то слѣва появляется единица на мѣстѣ десятковъ, такъ что мы можемъ прочесть 15. Справа же производится сложеніе не въ порядкѣ $\begin{matrix}60\\12\end{matrix}$, а въ порядкѣ $\begin{matrix}\;\;60\\12\;\;\end{matrix}$, т. е. къ 60 прибавляется 120: прибавляемая двойка переносится на колесо десятковъ, а единица — на колесо сотенъ. Вы видите, такимъ образомъ, что этотъ пріемъ представляетъ собой машинное осуществленіе того процесса, который мы производимъ, когда дѣлаемъ умноженіе на письмѣ, именно, когда мы подписываемъ послѣдовательныя частныя произведенія одно подъ другимъ, постепенно отодвигая ихъ каждый разъ на одинъ знакъ влѣво. Совершенно такимъ же образомъ мы всегда производимъ умноженіе съ многозначными числами, подвигая послѣ обыкновеннаго умноженія на единицы каретку послѣдовательно на одинъ, на два, на три разряда направо и поворачивая послѣ этого рукоятку соотвѣтственно столько разъ, сколько въ множителѣ есть десятковъ, сотенъ и т. д.

Какъ производятся при помощи машины другія вычисленія, вы можете непосредственно видѣть на аппаратѣ. Здѣсь достаточно будетъ замѣтить, что *вычитаніе и дѣленіе производятся вращеніемъ рукоятки въ обратную сторону.*

Позвольте мнѣ еще указать, подводя итогъ всему сказанному, что теоретическій принципъ этой машины совершенно элементаренъ и представляетъ только практическое осуществленіе правилъ, которыми мы обычно пользуемся при механическомъ вычисленіи. Конечно, чтобы машина вполнѣ надежно функціонировала, чтобы всѣ части были точно прилажены, чтобы не было мертвыхъ точекъ, при которыхъ могла бы произойти остановка во вращеніи счетныхъ колесъ, все это задача конструктора и механика, изготовляющаго машину.

Остановимся еще на минутку *на общемъ значеніи того факта*, что дѣйствительно существуютъ счетныя машины, которыя освобождаютъ математика отъ чисто механическихъ вычисленій и которыя выполняютъ ихъ гораздо быстрѣе и болѣе безошибочно, такъ какъ машина свободна отъ случайныхъ ошибокъ, съ которыми всегда можетъ быть сопряжено бѣглое вычисленіе. *Самое существованіе такого рода машины*

можетъ служить для насъ подтвержденіемъ того, что для производства вычисленій существеннымъ является не значеніе цѣлыхъ чиселъ, а формальныя правила, по которымъ они совершаются, ибо машина можетъ слѣдовать только этимъ правиламъ — такъ она устроена,—но нагляднаго представленія о значеніи чиселъ она имѣть не можетъ. Врядъ ли можно считать случаемъ то обстоятельство, что такой человѣкъ, какъ Лейбницъ, который былъ въ такой же мѣрѣ абстрактнымъ мыслителемъ перваго ранга, какъ и человѣкомъ выдающихся практическихъ дарованій, является

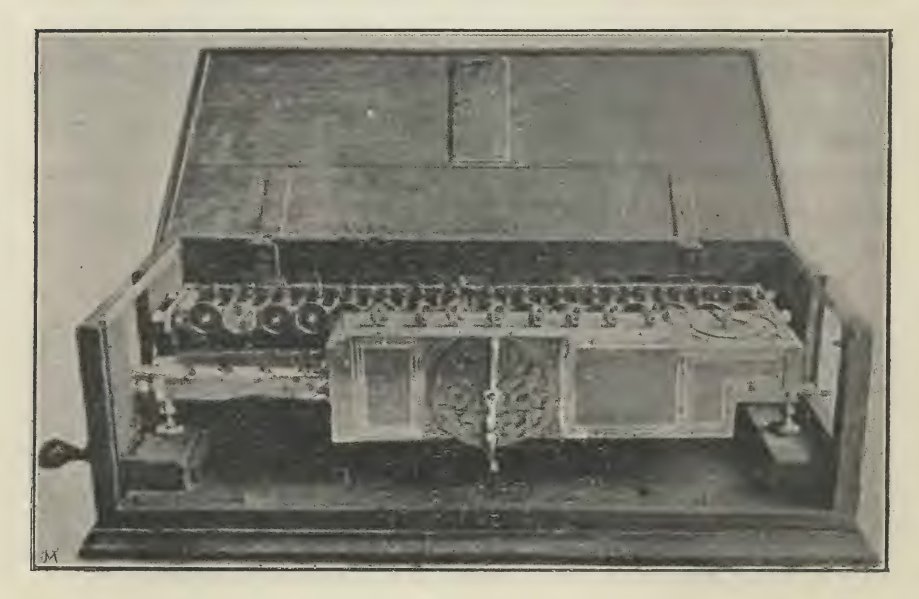


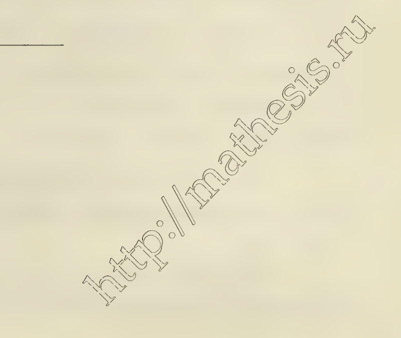
Рис. 7.

Счетная машина Лейбница.

одновременно какъ отцомъ чисто формальной математики, такъ и изобрѣтателемъ первой счетной машины. Его машина (рис. 7) еще по настоящее время представляетъ одно изъ наиболѣе цѣнныхъ достояній музея Кестнера въ Ганноверѣ. Хотя это исторически и неудостовѣрено, но я склоненъ допустить, что Лейбницъ имѣлъ въ виду изобрѣтеніемъ счетной машины не только достигнуть практическихъ значеній, но и ярко освѣтить строго формальный характеръ математическихъ вычисленій.

Само собою разумѣется, однако, что Лейбницъ отнюдь не былъ склоненъ изобрѣтеніемъ счетной машины умалить значеніе математической мысли, а между тѣмъ такого рода выводы иногда приходится слышать. „Если“, говорятъ, „дѣятельность науки можетъ осуществляться также машиной, то на эту науку, конечно, немного можно поставить, и роль ея неизбѣжно должна быть совершенно второстепенной“. Однако, на такого рода аргументацію достаточно возразить, что математикъ, когда онъ самъ оперируетъ надъ числами и формулами, отнюдь не представляетъ собой только жалкой копіи непогрѣшимой машины,— что онъ ни въ какомъ случаѣ не является „мыслителемъ безъ мысли“ по выраженію Томэ. Напротивъ, онъ самъ себѣ ставитъ задачи, имѣющія опредѣленную и полезную цѣль, и разрѣшаетъ ихъ всякій разъ новыми, своеобразными пріемами Онъ изобрѣлъ счетную машину только для того, чтобы освободить себя отъ нѣкоторыхъ операцій, постоянно повторяющихся въ однообразной послѣдовательности; и что̀ нужно менѣе всего забывать, математикъ ее изобрѣлъ, и математикъ постоянно ставитъ ей на разрѣшеніе задачи.

Позвольте мнѣ закончить пожеланіемъ, чтобы со счетной машиной, въ виду большого значенія, которое она пріобрѣтаетъ, познакомились болѣе широкіе круги; въ настоящее время ее, къ сожалѣнію, знаютъ еще весьма немногіе. Прежде всего же съ нею долженъ, конечно, познакомиться учитель; я не могу не высказать пожеланія, чтобы каждый ученикъ въ старшемъ классѣ средней школы имѣлъ возможность хоть разъ посмотрѣть эту машину.



II. Первое расширеніе понятія о числѣ.

Мы намѣрены теперь оставить цѣлыя числа и въ настоящей главѣ перейти къ расширенію понятія о числѣ. Въ школѣ этотъ процессъ раздѣляютъ обыкновенно на слѣдующія ступени.

1. Введеніе дробей и дѣйствія надъ ними.

2. Послѣ ознакомленія съ началами буквеннаго исчисленія слѣдуетъ изложеніе теоріи отрицательныхъ чиселъ.

3. Болѣе или менѣе подробное развитіе понятія объ ирраціональномъ числѣ на примѣрахъ по различнымъ поводамъ; вмѣстѣ съ этимъ устанавливается представленіе о совокупности всѣхъ вещественныхъ чиселъ.

Совершенно безразлично, начинать ли съ пункта перваго или со второго. Мы предпочитаемъ послѣднее.

1. Отрицательныя числа.

Начнемъ съ одного замѣчанія, относящагося къ терминологіи. Въ школѣ положительныя и отрицательныя числа обыкновенно называютъ „относительными" числами, въ противоположность „абсолютнымъ" (положительнымъ); между тѣмъ въ университетѣ эта манера выраженія не принята. Въ школѣ тѣ же относительныя числа называютъ также „алгебраическими" числами *) — терминъ, который въ университетѣ мы употребляемъ въ совершенно иномъ смыслѣ.

Что касается происхожденія и введенія отрицательныхъ чиселъ, то относительно фактическаго матеріала я могу быть кра-

*) Относительно этой терминологіи см. Mehler, „Hauptsätze der Elementarmathematik", 19 Aufl., Berlin, 1795, S. 77.

токъ: этими вещами вы владѣете свободно и, во всякомъ случаѣ, по моимъ указаніямъ вы легко въ нихъ оріентируетесь. Болѣе подробное изложеніе вы найдете, помимо книги Вебера-Вельштейна, также въ сочиненіи Г. Буркгардта „Алгебраическій анализъ“ *). Послѣднюю книгу легко также пріобрѣсти, такъ какъ она невелика.

Ближайшимъ поводомъ для введенія отрицательныхъ чиселъ является, какъ извѣстно, требованіе сдѣлать вычитаніе операціей, выполнимой во всѣхъ случаяхъ. Если $a < b$, то въ области натуральныхъ чиселъ разность $a - b$ не имѣетъ смысла. Существуетъ, однако, число $c = b - a$, и мы полагаемъ:

$$a - b = -c,$$

и $-c$ называемъ отрицательнымъ числомъ. Съ этимъ связываютъ обыкновенно съ самаго начала интерпретацію цѣлыхъ чиселъ при помощи скалы равноотстоящихъ точекъ на прямой, простирающейся безгранично въ обѣ стороны, или „оси абсциссъ“ (рис. 8). Этотъ образъ можно

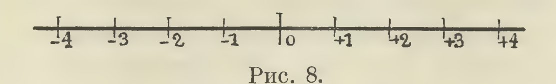


Рис. 8.

считать въ настоящее время достояніемъ всѣхъ образованныхъ людей, и нужно полагать, что своимъ распространеніемъ онъ обязанъ, главнымъ образомъ, извѣстной всѣмъ термометрической скалѣ. Наглядный и хорошо извѣстный образъ отрицательныхъ чиселъ представляетъ купеческій балансъ, или разсчетъ прибылей и убытковъ.

Но мы здѣсь, прежде всего, точно выразимъ, въ чемъ заключается, собственно, принципіальный и чрезвычайно трудный шагъ, который связанъ съ введеніемъ отрицательныхъ чиселъ въ школѣ.

Если ученикъ привыкъ постоянно связывать съ числами и затѣмъ съ буквами, надъ которыми онъ оперируетъ, конкретныя количества и при сложеніи ихъ, а также при другихъ дѣйствіяхъ, всегда имѣлъ предъ глазами соотвѣтствующія опера-

*) H. Burkhardt, „Algebraische Analysis“, Leipzig, 1903.

ціи, которыя можно реально надъ этими количествами производить, то теперь дѣло совершенно мѣняется. Ему приходится имѣть дѣло съ чѣмъ-то новымъ, съ „отрицательными числами“, которыя уже не имѣютъ ничего общаго съ нагляднымъ образомъ о количествѣ предметовъ; ему приходится производить надъ ними дѣйствія, какъ надъ количествами, а между тѣмъ именно эти дѣйствія совсѣмъ ужъ не имѣютъ для него прежняго яснаго, нагляднаго значенія. Здѣсь приходится въ первый разъ дѣлать переходъ *отъ реальной математики къ формальной*, для полнаго уясненія которой нужно значительное развитіе способности къ абстракціи.

Присмотримся, однако, подробнѣе, что́ происходитъ съ ариѳметическими дѣйствіями по введеніи отрицательныхъ чиселъ. Прежде всего ясно, что *сложеніе и вычитаніе по существу сливаются воедино.* Прибавленіе положительнаго числа есть вычитаніе равно-противоположнаго отрицательнаго числа. М. *Симонъ* дѣлаетъ по этому поводу остроумное замѣчаніе, что именно вслѣдствіе введенія отрицательныхъ чиселъ, благодаря которому вычитаніе становится дѣйствіемъ, неимѣющимъ исключенія, оно перестаетъ существовать, какъ самостоятельная операція. Для этого обобщеннаго сложенія, охватывающаго также и вычитаніе, въ области положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ, неизмѣнно остаются въ силѣ тѣ же основные пять формальныхъ законовъ: 1) *постоянная выполнимость*, 2) *однозначность*, 3) *сочетательность*, 4) *перемѣстительность* и 5) *монотонность*. Относительно свойства 5-го нужно замѣтить, что $a < b$ теперь означаетъ, выражаясь кратко, что, при геометрическомъ изображеніи, число a лежитъ влѣво отъ b, такъ что, например́ъ, $-2 < -1$, $-3 < +2$ и т. д.

При *умноженіи* важнѣйшимъ моментомъ является такъ называемое *правило знаковъ*, согласно которому

$$a \,.\, (-c) = (-c) \,.\, a = -(a \,.\, c) \text{ и } (-c) \,.\, (-c') = + cc';$$

въ особенности послѣднее (минусъ на минусъ даетъ плюсъ) часто представляетъ собой камень преткновенія. Къ внутренней сущности этого правила намъ придется еще сейчасъ возвратиться. Мы выразимъ его предварительно однимъ предложеніемъ, отно-

сящимся къ произведенію какого угодно числа положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ: абсолютная величина произведенія равна произведенію абсолютныхъ величинъ сомножителей, по знаку же оно будетъ положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, входитъ ли въ его составъ четное или нечетное число отрицательныхъ множителей. По установленіи этого положенія умноженіе въ области положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ опять обладаетъ слѣдующими свойствами: 1) постоянная выполнимость, 2) однозначность, 3) сочетательность, 4) перемѣстительность и 5) распредѣлительность относительно сложенія. Только въ законѣ монотонности здѣсь оказывается уклоненіе. Его мѣсто теперь занимаетъ слѣдующій законъ: если $a > b$, то $ac > bc$, $ac = bc$ или $ac < bc$, смотря по тому, будетъ ли $c > 0$, $c = 0$ или $c < 0$.

Спросимъ себя теперь, не заключаютъ ли эти законы по чисто формальному своему содержанію логическаго противорѣчія. Мы должны, въ первую очередь, сказать, что доказательство отсутствія противорѣчія, основанное на чисто логическихъ соображеніяхъ, по настоящее время здѣсь еще менѣе удалось провести, чѣмъ для цѣлыхъ чиселъ. Но вопросъ удалось свести къ тому, что названные законы навѣрно не имѣютъ противорѣчія, если они не содержатъ таковаго въ примѣненіи къ цѣлымъ положительнымъ числамъ. До тѣхъ поръ, слѣдовательно, пока этотъ вопросъ не будетъ доведенъ до конца, т. е. пока не будетъ дано логическое доказательство отсутствія противорѣчія въ области тѣхъ же операцій надъ цѣлыми числами, мы можемъ основывать увѣренность въ отсутствіи противорѣчія въ названныхъ законахъ лишь на томъ, что существуютъ наглядные объекты и наглядныя операціи надъ ними, которыя слѣдуютъ этимъ законамъ. Въ качествѣ такихъ наглядныхъ объектовъ мы указали уже выше рядъ равно удаленныхъ одна отъ другой точекъ на оси абсциссъ; намъ остается только прибавить, что означаютъ въ примѣненіи къ этимъ образамъ ариѳметическія дѣйствія. Сложеніе $x' = x + a$ при постоянномъ a относитъ каждой точкѣ x нѣкоторую точку x' такимъ образомъ, что неограниченная прямая просто передвигается по самой себѣ на отрѣ-

зокъ a и при томъ вправо или влѣво, смотря по тому, имѣетъ ли a положительное или отрицательное значеніе. Точно такъ же и умноженіе $x' = ax$ представляетъ собой подобное преобразованіе прямой въ себѣ самой и при томъ при $a > 0$ — прямое растяженіе, при $a < 0$ — растяженіе, связанное съ полуоборотомъ вокругъ нулевой точки.

Я хочу теперь остановиться на томъ, какъ, собственно, всѣ эти вещи исторически возникли. Не нужно думать, что отрицательныя числа представляютъ собой открытіе какого-либо одного умнаго человѣка, который вмѣстѣ съ тѣмъ, быть можетъ, даже обнаружилъ на основаніи геометрическаго ихъ толкованія отсутствіе въ нихъ противорѣчія. Напротивъ, въ процессѣ медленнаго развитія употребленіе отрицательныхъ чиселъ какъ бы само собой напрашивалось, и лишь позже, когда надъ ними уже давно оперировали, именно въ XIX столѣтіи, возникъ вопросъ объ отсутствіи противорѣчія.

Переходя къ исторіи отрицательныхъ чиселъ, позвольте мнѣ обратить ваше вниманіе на то, что древніе греки несомнѣнно не владѣли отрицательными числами, такъ что здѣсь мы имѣемъ пунктъ, въ которомъ грекамъ не приходится отводить перваго мѣста, какъ это нѣкоторые всегда склонны дѣлать. Напротивъ, честь открытія отрицательныхъ чиселъ должна быть приписана индусамъ, которые ввели также нуль и нашу систему цифръ. Въ Европѣ отрицательныя числа постепенно вошли въ употребленіе въ Эпоху Возрожденія въ тотъ именно періодъ, когда стали оперировать надъ буквами. Не могу не упомянуть при этомъ, что болѣе или менѣе совершенное буквенное исчисленіе было впервые дано Віета (Vieta) въ его сочиненіи „In artem analytikam isagoge“ *). На этой почвѣ естественно пришли къ такъ называемымъ правиламъ скобокъ для дѣйствій надъ положительными числами, которыя, конечно, содержатся въ перечисленныхъ нами выше основныхъ формулахъ, если мы только присоединимъ соотвѣтствующіе законы вычитанія. Однако, я хочу остановиться нѣсколько подробнѣе, по крайней мѣрѣ, на двухъ примѣрахъ, чтобы, прежде всего, показать, что для нихъ можно дать крайне простыя и наглядныя доказательства —

*) Tours, 1591.

доказательства, которыя, собственно говоря, исчерпываются фигурой и словечкомъ „смотри“, какъ мы это часто встрѣчаемъ у древнихъ индусовъ.

1) Пусть $a > b$ и $c > a$. Въ такомъ случаѣ $a - b$ есть положительное число, меньшее, нежели c. Поэтому разность $c - (a - b)$ будетъ положительное число (рис. 9). Если мы нанесемъ эти числа на ось абсциссъ и замѣтимъ, что разстояніе

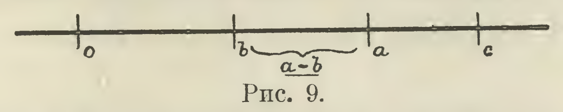


Рис. 9.

между точками b и a имѣетъ длину $a - b$, то достаточно взглянуть на рисунокъ, чтобы убѣдиться въ слѣдующемъ: если мы отнимемъ отъ c отрѣзокъ $a - b$, то мы получимъ то же самое, что получили бы, если бы мы отняли сначала весь отрѣзокъ a, а затѣмъ прибавили отрѣзокъ b, т. е.

$$c - (a - b) = c - a + b. \qquad (1)$$

2) Пусть $a > b$ и $c > d$; тогда разности $a - b$ и $c - d$ представляютъ собой цѣлыя положительныя числа. Разсмотримъ произведеніе $(a - b) . (c - d)$. Съ этою цѣлью мы построимъ

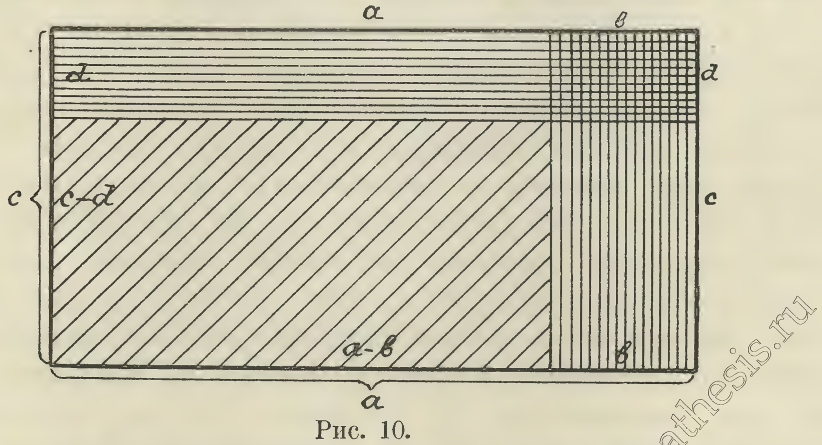


Рис. 10.

прямоугольникъ со сторонами $a - b$ и $c - d$ (рис. 10); онъ составитъ часть прямоугольника, имѣющаго стороны a и c. Чтобы изъ послѣдняго получить первый, мы отнимемъ сначала верхній, горизонтально заштрихованный прямоугольникъ $a . d$, а потомъ расположенный и заштрихованный вертикально прямоугольникъ $b . c$. Однако, небольшой прямоугольникъ $b . d$, заштрихованный накрестъ, мы отняли лишній разъ; мы должны его поэтому снова

прибавить. Этимъ путемъ мы приходимъ къ извѣстной формулѣ

$$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd. \qquad (2)$$

Въ дальнѣйшемъ развитіи этихъ идей сказывается общая особенность человѣческой натуры, заключающаяся въ томъ, что мы постоянно стремимся распространять правила, выведенныя для частныхъ случаевъ, на другіе, болѣе общіе случаи. Ганкель въ своемъ сочиненіи „Теорія комплексныхъ числовыхъ системъ“ *) называетъ это принципомъ перманентности формальныхъ законовъ и придаетъ ему значеніе руководящаго основного положенія. Эту въ высшей степени интересную книгу я могу вамъ очень настойчиво рекомендовать. Этотъ общій принципъ въ примѣненіи къ интересующему насъ случаю означалъ бы, что мы желаемъ освободить формулы (1) и (2) отъ условій, касающихся относительной величины чиселъ a и b, въ предположеніи которыхъ онѣ только и выведены, и сдѣлать ихъ примѣнимыми также къ другимъ случаямъ. Если мы примѣнимъ, такимъ образомъ, формулы (2), напримѣръ, къ случаю $a=c=0$ (для каковаго случая мы этой формулы отнюдь не доказали), то мы получимъ $(-b).(-d)=+bd$, т. е. получимъ правило знаковъ при умноженіи отрицательныхъ чиселъ. Такимъ образомъ, мы дѣйствительно можемъ почти безсознательно придти ко всѣмъ четыремъ правиламъ, которыя мы, пожалуй, склонны будемъ даже признать за совершенно необходимыя допущенія. Въ дѣйствительности же они будутъ необходимы лишь постольку, поскольку мы хотимъ сохранить для этихъ новыхъ объектовъ прежнія правила дѣйствія. Старые математики, конечно, не съ легкимъ сердцемъ рѣшались на образованіе этихъ новыхъ понятій, и тяжелое чувство, съ которымъ они на это шли, сказывалось въ тѣхъ названіяхъ, которыя они часто давали отрицательнымъ числамъ: „придуманныя числа“, „ложныя числа“ и т. д. Однако, несмотря на всѣ эти сомнѣнія, въ XVI и XVII столѣтіи отрицательныя числа постепенно пріобрѣтаютъ всеобщее признаніе; много способствовало этому, безъ сомнѣнія, развитіе аналитической геометріи. Конечно, сомнѣнія еще оста-

*) Hermann Hankel. „Theorie der komplexen Zahlsysteme“. Leipzig, 1867.

вались и должны были оставаться до тѣхъ поръ, пока все еще старались интерпретировать отрицательное число, какъ количество предметовъ, и не уясняли себѣ возможности апріорнаго установленія формальныхъ законовъ; въ связи съ этимъ стояли постоянныя попытки доказать правило знаковъ. Простое разъясненіе, которое принесъ только XIX вѣкъ, заключается въ томъ, что о логической необходимости этого положенія, о его доказуемости не можетъ быть никакой рѣчи. Напротивъ, рѣчь можетъ идти только о томъ, чтобы признать его логическую допустимость; въ остальномъ же оно является совершенно произвольнымъ и регулируется лишь соображеніями цѣлесообразности и приведеннымъ выше принципомъ перманентности.

При этихъ соображеніяхъ нельзя не высказать мысли, которая и помимо того часто напрашивается, что вещи нерѣдко представляются разумнѣе, нежели люди. Вы видите, что одинъ изъ важнѣйшихъ шаговъ въ математикѣ, именно введеніе отрицательныхъ чиселъ и дѣйствій надъ ними, былъ сдѣланъ не вслѣдствіе сознательнаго логическаго сужденія одного человѣка, а органически развился благодаря интенсивнымъ занятіямъ этими вещами; можетъ даже показаться, что человѣкъ научился этимъ правиламъ отъ буквъ. Сознательное убѣжденіе, что мы при этомъ поступаемъ правильно, не впадая въ коллизію со строгой логикой, явилось лишь гораздо позже. Вообще, чистая логика при образованіи такихъ новыхъ понятій всегда можетъ имѣть регулирующее значеніе, руководящей же роли она играть не можетъ, ибо единственное требованіе, которое она ставитъ, заключается въ томъ, чтобы не было внутренняго противорѣчія, а этому, конечно, могутъ удовлетворить и многія другія абстрактныя системы.

Если васъ еще интересуетъ литература вопросовъ по теоріи отрицательныхъ чиселъ, то я могу вамъ указать еще на книгу Тропфке—„Исторія элементарной математики“ *). Это—

---

*) Tropfke — „Geschichte der Elementarmathematik“, 2 Bände, Leipzig, 1902/1903.

Въ настоящее время печатается также подъ редакціей приватъ-доцента И. Ю. Тимченко въ русскомъ переводѣ сочиненіе Ф. Кэджори „Исторія элементарной математики“.

превосходное собраніе матеріаловъ, содержащее очень много подробностей относительно развитія элементарныхъ понятій, воззрѣній и обозначеній въ ясномъ изложеніи, очень удобномъ для обозрѣнія.

Обращаясь къ критическому обзору того, какъ отрицательныя числа излагаются въ школѣ, нужно прежде всего сказать, что преподаватели часто здѣсь дѣлаютъ ту же ошибку, въ которую впадали старые математики, именно они все пытаются *доказать* правило знаковъ, какъ нѣчто логически необходимое. Особенно часто выдаютъ за доказательство приведенный выше эвристическій выводъ правила $(-b).(-d)=+bd$ изъ формулы для $(a-b).(c-d)$, фактически совершенно забывая, что эта формула первоначально неразрывно связана съ неравенствами $a>b$, $c>d$. Такимъ образомъ, доказательство какъ бы *симулируется*, и *психологическій моментъ*, который, въ силу принципа перманентности, приводитъ къ этому правилу, смѣшивается съ логическимъ доказательствомъ. Ученикъ, которому это въ такомъ видѣ въ первый разъ преподносится, естественно не можетъ этого понять, но повѣрить этому онъ, въ концѣ концовъ, вынужденъ; если же при повтореніи на высшей ступени обученія, какъ это часто бываетъ, ученикъ не получаетъ болѣе точныхъ разъясненій, то у многихъ можетъ установиться убѣжденіе, что эта теорія содержитъ нѣчто мистическое, непонятное.

По поводу этихъ пріемовъ я долженъ, однако, вообще высказать требованіе, что никогда не слѣдуетъ пытаться симулировать невозможныя доказательства. Слѣдовало бы, напротивъ, на простыхъ примѣрахъ, сообразно фактическому положенію дѣла, убѣдить ученика, а, если возможно, то заставить его самого придти къ тому, что именно эти положенія, основанныя на принципѣ перманентности, способны дать однообразный и удобный алгорифмъ, между тѣмъ какъ при другихъ правилахъ всегда придется различать отдѣльные случаи. Конечно, при этомъ не нужно проявлять лишней поспѣшности, нужно дать ученику время освоиться съ тѣмъ внутреннимъ переворотомъ, который въ немъ совершается при этомъ познаніи. И въ то время, какъ ученику легко понять, что другія положенія нецѣлесообразны, необходимо настойчиво и безъ остатка выяснить ему, что *чудесная сторона* дѣла въ томъ именно и заключается, что дѣй-

ствительно существуетъ общее и цѣлесообразное положеніе; онъ долженъ ясно понять, что существованія такой системы отнюдь нельзя было съ увѣренностью впередъ ожидать.

Этимъ я заканчиваю теорію отрицательныхъ чиселъ и обращусь къ ученію о дробяхъ.

2. Дроби.

Обращаясь теперь къ такому же изложенію ученія о дробяхъ, мы начнемъ съ того, какъ трактуется этотъ вопросъ въ школѣ. Здѣсь дробь $\frac{a}{b}$ съ самаго начала имѣетъ чисто конкретное значеніе. Только по сравненію съ наглядными образами, которыми интерпретируются цѣлыя числа, здѣсь субстратъ мѣняется,— именно, отъ количества предметовъ мы переходимъ къ измѣренію, отъ предметовъ, подлежащихъ счету, мы переходимъ къ предметамъ, подлежащимъ измѣренію. Примѣромъ измѣримыхъ многообразій служатъ съ нѣкоторыми ограниченіями система монетъ и система вѣсовъ и безъ всякихъ ограниченій, въ полной мѣрѣ — система всѣхъ длинъ. На этихъ именно примѣрахъ каждому ученику и выясняется значеніе дробей, ибо каждому человѣку очень легко выяснить, что такое $\frac{1}{3}$ метра или $\frac{1}{2}$ фунта. Изъ конкретныхъ же соображеній легко устанавливается также значеніе соотношеній $=, >, <$ для дробей, а также устанавливается сложеніе и вычитаніе дробей. Затѣмъ умноженіе выясняется обыкновенно путемъ незначительной модификаціи первоначальнаго опредѣленія этого дѣйствія. Помножить число на дробь $\frac{a}{b}$ — значитъ помножить его на цѣлое число a (согласно старому опредѣленію) и затѣмъ раздѣлить на b. Или иначе, произведеніе составляется изъ множимаго совершенно такъ же, какъ множитель $\frac{a}{b}$ составляется изъ единицы. Вслѣдъ за этимъ дѣленіе на дробь опредѣляется, какъ операція, обратная умноженію: раздѣлить a на $\frac{2}{3}$ — значитъ найти такое число, которое, бу-

дучи умножено на $\frac{2}{3}$, дастъ число a. Эти опредѣленія въ теоріи дробей мы комбинируемъ далѣе съ введеніемъ отрицательныхъ чиселъ и такимъ образомъ получаемъ окончательно совокупность всѣхъ раціональныхъ чиселъ. Мы не имѣемъ возможности входить въ детали всего этого построенія, развитіе котораго въ школѣ естественно требуетъ много времени; мы лучше сравнимъ это изложеніе съ современной разработкой этого изложенія въ математикѣ; въ видѣ примѣровъ, остановлюсь на приведенныхъ выше сочиненіяхъ Вебера-Вельштейна и Буркгардта.

У Вебера-Вельштейна выступаетъ на первый планъ формальная сторона дѣла, выдвигающая изъ различныхъ возможныхъ интерпретацій необходимыя общія свойства дробей. Здѣсь дробь $\frac{a}{b}$ просто является символомъ (числовой парой), надъ которой нужно совершать дѣйствія согласно опредѣленнымъ правиламъ.

Эти правила, которыя, какъ мы упомянули выше, естественно вытекаютъ изъ реальнаго значенія дробей, имѣютъ здѣсь характеръ совершенно произвольныхъ соглашеній. Такъ, напримѣръ, то, что представляетъ для ученика наглядное предложеніе объ умноженіи дробей, пріобрѣтаетъ здѣсь форму опредѣленія равенства: двѣ дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называются равными, если $ad = bc$. Аналогичнымъ образомъ опредѣляется понятіе „больше“ или „меньше“; сумма двухъ дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ просто опредѣляется, какъ дробь $\frac{ad + bc}{bd}$, и т. д. Затѣмъ уже доказывается, что опредѣленныя такимъ образомъ дѣйствія въ получающейся при этомъ болѣе обширной числовой области строго подчиняются прежнимъ формальнымъ законамъ, т. е. 11 основнымъ законамъ, которые мы уже неоднократно приводили.

Не столь формально, какъ въ системѣ Вебера-Вельштейна, изложенной здѣсь, конечно, только въ самыхъ общихъ чертахъ, трактуетъ этотъ вопросъ Буркгардтъ. На дробь

$\frac{a}{b}$ онъ смотритъ, какъ на послѣдовательность *двухъ операцій въ области цѣлыхъ чиселъ, именно умноженіе на число* a *и дѣленіе на число* b; объектомъ, надъ которымъ эти операціи должны быть выполнены, является совершенно произвольное цѣлое число. Если мы произведемъ двѣ такія пары операцій $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, то это разсматривается, какъ *умноженіе дробей*. Легко видѣть, что происходящая такимъ образомъ операція представляетъ собой не что иное, какъ умноженіе на ac и дѣленіе на bd. Такимъ образомъ, правило умноженія дробей

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

вытекаетъ здѣсь изъ значенія дробей и не представляется произвольнымъ соглашеніемъ. Совершенно аналогично можно, конечно, опредѣлить и развить дѣленіе дробей; однако, сложеніе и вычитаніе не поддаются интерпретаціи въ этомъ порядкѣ идей. Формула

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

остается, такимъ образомъ, и у *Буркгардта* соглашеніемъ, въ пользу котораго онъ приводитъ только наводящія указанія.

Сравнимъ теперь школьную постановку вопроса съ указаннымъ современнымъ изложеніемъ. Существенно важно то, что въ этой новой постановкѣ мы какъ въ одной, такъ и въ другой системѣ *остаемся всецѣло на почвѣ цѣлыхъ чиселъ*. Извѣстными предполагаются только совокупность цѣлыхъ чиселъ и дѣйствія надъ ними; новыя же числа являются только объектами, которые опредѣляются, какъ числовыя пары и какъ операціи надъ цѣлыми числами. *Школьное же изложеніе существенно опирается на новое наглядное представленіе объ измѣримыхъ величинахъ*, дающихъ непосредственное интуитивное представленіе о дробяхъ. Мы уяснимъ себѣ это различіе лучше всего, если представимъ себѣ существо, владѣющее только идеей о цѣломъ числѣ и вовсе не знающее измѣреній. Для такого существа школьное изложеніе

казалось бы совершенно непонятнымъ, между тѣмъ какъ постановка вопроса у *Вебера* и *Вельштейна* была бы ему совершенно доступна.

Какая же изъ двухъ точекъ зрѣнія лучше, и что́ даетъ каждая изъ нихъ? Отвѣтъ на этотъ вопросъ будетъ такой же, какъ и выше, когда мы разбирали аналогичный вопросъ относительно цѣлыхъ чиселъ. *Новая точка зрѣнія, несомнѣнно, чище, но въ то же время и бѣднѣе.* Она, собственно говоря, даетъ только половину того, что въ цѣльномъ видѣ содержитъ въ себѣ школьное изложеніе: *абстрактное, ариѳметическое, логически точное введеніе дробей и дѣйствія надъ ними.*

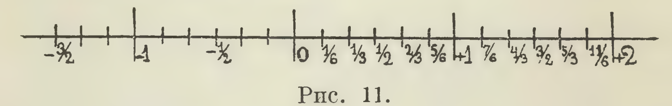


Рис. 11.

Но когда это исчерпано, то остается еще другой, независимый и не менѣе важный вопросъ: можно ли примѣнить построенную такимъ образомъ теоретическую доктрину къ нагляднымъ, измѣримымъ величинамъ, съ которыми намъ приходится имѣть дѣло. И здѣсь, конечно, можно было бы смотрѣть на этотъ вопросъ, какъ на относящійся къ „прикладной математикѣ" и допускающій строго самостоятельную обработку. Представляется, однако, сомнительнымъ, можно ли такое раздѣленіе считать цѣлесообразнымъ и съ педагогической точки зрѣнія. У *Вебера-Вельштейна* это раздѣленіе задачи на двѣ части находитъ себѣ, впрочемъ, своеобразное выраженіе: вводя абстрактно дѣйствія съ дробями, онъ затѣмъ посвящаетъ отдѣльную главу подъ заглавіемъ „отношенія" вопросу о томъ, какъ раціональныя дроби могутъ быть примѣняемы къ внѣшнему міру. При этомъ изложеніе носитъ у него болѣе абстрактный, чѣмъ наглядный характеръ.

Я закончу еще настоящее разсужденіе о дробяхъ общимъ замѣчаніемъ, относящимся къ совокупности всѣхъ цѣлыхъ чиселъ; при этомъ, для наглядности, я буду пользоваться изображеніемъ чиселъ на прямой линіи. Мы представимъ себѣ, что на прямой (рис. 11) отмѣчены всѣ точки съ раціональными абсциссами, которыя мы будемъ короче называть просто „раціональными

точками". Говорятъ, что совокупность всѣхъ этихъ раціональныхъ точекъ на оси абсциссъ образуетъ, „сгущенное" многообразіе. Этимъ хотятъ сказать, что въ каждомъ интервалѣ, какъ бы малъ онъ ни былъ, имѣется еще безчисленное множество раціональныхъ точекъ. Точнѣе, не вводя чуждыхъ понятій, можно еще выразить то же самое слѣдующимъ образомъ: между двумя раціональными точками имѣется еще, по крайней мѣрѣ, одна раціональная точка. Слѣдствіемъ этого является то обстоятельство, что изъ совокупности всѣхъ раціональныхъ чиселъ всегда возможно выдѣлить конечную часть, не содержащую ни наибольшаго ни наименьшаго элемента. Примѣромъ можетъ служить совокупность всѣхъ раціональныхъ дробей, содержащихся между 0 и 1, если самыя эти два числа не включать. Въ самомъ дѣлѣ, какова бы ни была правильная дробь, всегда существуетъ еще меньшая дробь, содержащаяся между нею и 0, и большая, содержащаяся между нею и 1. Эти понятія въ систематическомъ развитіи относятся уже къ Канторовой теоріи многообразій, или комплексовъ. Ниже намъ дѣйствительно придется воспользоваться раціональными числами съ указанными ихъ свойствами, какъ важнымъ примѣромъ комплекса.

3. Ирраціональныя числа.

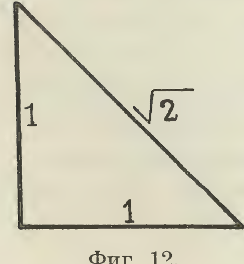
Мы переходимъ теперь къ дальнѣйшему развитію понятія о числѣ, именно къ ирраціональнымъ числамъ. Здѣсь мы не будемъ останавливаться на томъ, какъ этотъ вопросъ излагается въ школѣ, такъ какъ относительно ирраціональныхъ чиселъ въ школѣ ограничиваются обыкновенно нѣсколькими примѣрами. Мы лучше перейдемъ прямо къ историческому развитію вопроса.

Исторически возникновеніе понятія объ ирраціональномъ числѣ имѣетъ своимъ источникомъ геометрическую интуицію и потребности геометріи. Представимъ себѣ ось абсциссъ съ нанесеннымъ на ней сгущеннымъ комплексомъ раціональныхъ точекъ. На этой оси остаются тогда еще и другія числа, какъ это, повидимому, показалъ Пиѳагоръ, примѣрно, слѣдующимъ образомъ. Если мы имѣемъ прямоугольный треугольникъ, въ которомъ два катета равны единицѣ длины, то его гипотенуза рав-

няется $\sqrt{2}$ (фиг. 12); это же навѣрное не раціональное число. Въ самомъ дѣлѣ, если мы положимъ

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b},$$

гдѣ a и b суть числа первыя между собой, то мы легко придемъ къ противорѣчію съ извѣстными законами дѣлимости цѣлыхъ чиселъ. Такимъ образомъ, мы геометрически построили такой отрѣзокъ, отложивъ который на оси абсциссъ отъ нулевой точки, мы придемъ къ точкѣ, нераціональной, т. е. къ такой точкѣ, которая въ прежнемъ комплексѣ раціональныхъ точекъ не содержится. Вообще, въ большинствѣ случаевъ гипотенуза $\sqrt{m^2+n^2}$ прямоугольнаго треугольника, въ которомъ катеты выражаются цѣлыми числами m и n, будетъ выражена ирраціональнымъ числомъ. Школа Пиѳагора очень усердно занималась разысканіемъ такихъ паръ чиселъ m и n, которымъ соотвѣтствуетъ раціональная гипотенуза; это такъ называемыя Пиѳагоровы числа, простѣйшимъ примѣромъ которыхъ является группа 3, 4, 5; мы къ нимъ еще возвратимся ниже. Во всякомъ случаѣ было извѣстно, что при этомъ построеніи, вообще говоря, получаются ирраціональные отрѣзки; это открытіе стоило жертвы въ сто быковъ, по поводу которыхъ такъ часто приходится слышать дурныя остроты.



Фиг. 12.

Послѣдующіе греческіе математики изучали болѣе сложныя ирраціональности; такъ, напримѣръ, у Евклида мы находимъ ирраціональности вида $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ и т. п. Вообще же можно сказать, что они, по существу, сводятся къ такимъ ирраціональностямъ, которыя можно получить повторнымъ извлеченіемъ квадратнаго корня, и которыя, сообразно этому, можно строить циркулемъ и линейкой. Общей же идеей объ ирраціональномъ числѣ они еще не владѣли.

Я долженъ, однако, еще нѣсколько точнѣе формулировать это замѣчаніе, чтобы избѣжать недоразумѣній. Мы имѣли въ

виду сказать только то, что греки не владѣли такимъ пріемомъ, при помощи котораго можно было бы дать общее ариѳметическое опредѣленіе ирраціональнаго числа, какъ мы это сдѣлаемъ ниже. При всемъ томъ понятіе объ общемъ вещественномъ числѣ, которое можетъ и не быть раціональнымъ, для нихъ было ясно, — правда, съ иной точки зрѣнія, чѣмъ у насъ; все это носитъ у нихъ другой характеръ, такъ какъ они не пользовались буквами для общаго обозначенія числа. Именно, они разсматривали, какъ это излагаетъ систематически Евклидъ, отношенія двухъ произвольныхъ отрѣзковъ и оперировали надъ ними собственно точно такъ же, какъ мы теперь оперируемъ надъ произвольными вещественными числами. У Евклида встрѣчаются даже такія опредѣленія, которыя совсѣмъ напоминаютъ современную теорію ирраціональныхъ чиселъ. Однако, названіемъ своимъ они уже существенно отличаются отъ цѣлаго раціональнаго числа; послѣднее называется «*ἄριθμος*», между тѣмъ какъ отношеніе отрѣзковъ, т. е. любое вещественное число, называется «*λόγος.*».

Къ этому присоединимъ еще замѣчаніе относительно самаго слова „ирраціональный". Оно ведетъ свое начало, вѣроятно, отъ неправильнаго перевода греческаго слова «*ἄλογος*» на латинскій языкъ. Это греческое слово, повидимому, означало „невыговариваемое число". Этимъ желали сказать, что эти новыя числа, т. е. отношенія отрѣзковъ, не могутъ быть выражены отношеніемъ двухъ цѣлыхъ чиселъ; лишь непониманіемъ переводчика объясняется то, что эти числа оказались „нелогичными", какъ это, повидимому, выражается словомъ „ирраціональныя числа". Общее понятіе объ ирраціональномъ числѣ появилось, повидимому, только въ концѣ XVI столѣтія послѣ введенія десятичныхъ дробей, употребленіе которыхъ получило право гражданства въ связи съ возникновеніемъ логариѳмическихъ таблицъ. Когда мы обращаемъ раціональную дробь въ десятичную, то мы можемъ, кромѣ конечныхъ дробей, получать еще безконечныя десятичныя дроби, которыя, однако, всегда должны быть періодическими. Простѣйшій примѣръ будетъ

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots;$$

мы имѣемъ здѣсь десятичную дробь, однозначный періодъ которой 3 начинается непосредственно послѣ запятой. Но тогда нѣтъ препятствій къ тому, чтобы представить себѣ неперіодическую десятичную дробь, цыфры которой слѣдуютъ другъ за другомъ по какому-либо другому опредѣленному закону; каждый, конечно, признáетъ такую дробь опредѣленнымъ и въ тоже время нераціональнымъ числомъ. Но въ этомъ, собственно, уже содержится понятіе объ ирраціональномъ числѣ, къ которому, такимъ образомъ, насъ непосредственно приводитъ десятичная дробь. Исторически дѣло и здѣсь происходило совершенно такъ, какъ мы это выяснили выше относительно отрицательныхъ чиселъ: вычисленія съ необходимостью приводили къ введенію новыхъ понятій и надъ ними оперировали, не размышляя много объ ихъ сущности и объ ихъ обоснованіи, тѣмъ болѣе, что они часто оказывались чрезвычайно полезными.

Лишь въ шестидесятыхъ годахъ XIX столѣтія была признана потребность въ точной ариѳметической обработкѣ ученія объ ирраціональныхъ числахъ, что и было выполнено Вейерштрассомъ (Weierstrass) въ его лекціяхъ, относящихся къ указанному періоду. Общую теорію ирраціональныхъ чиселъ далъ въ 1879 году Г. Канторъ (G. Kantor) въ Галле, основатель ученія о многообразіяхъ, или комплексахъ, и независимо отъ него Р. Дедекиндъ (R. Dedekind) въ Брауншвейгѣ. Точку зрѣнія Дедекинда я намѣренъ пояснить здѣсь въ немногихъ словахъ. Допустимъ, что мы владѣемъ совокупностью всѣхъ раціональныхъ чиселъ, и устранимъ всѣ пространственныя представленія, навязывающія намъ интуитивно непрерывность числового ряда. Чтобы, исходя отсюда, придти къ чисто ариѳметическому опредѣленію ирраціональнаго числа, Дедекиндъ*) строитъ понятіе о сѣченіи въ области раціональныхъ чиселъ. Именно, если r есть раціональное число, то оно дѣлитъ всю совокупность раціональныхъ чиселъ на двѣ категоріи A и B такимъ образомъ, что каждое число категоріи A меньше, нежели любое число категоріи B, каждое же раціо-

*) См. Р. Дедекиндъ „Непрерывность и ирраціональныя числа". переводъ съ нѣмецкаго прив.-доц. С. Шатуновскаго. Изд. 2-ое, Одесса, 1909. „Mathesis".

нальное число принадлежитъ *той или иной категоріи.* Категорія A есть совокупность всѣхъ чиселъ, которыя меньше числа r, а категорія B — совокупность всѣхъ чиселъ, которыя больше, нежели r; самое же число r можно отнести какъ къ одной, такъ и къ другой категоріи. Кромѣ этихъ „собственныхъ“ сѣченій бываютъ еще сѣченія „несобственныя“: подъ этимъ мы разумѣемъ такія подраздѣленія чиселъ на двѣ категоріи, которыя обладаютъ перечисленными выше свойствами, но не производятся раціональными числами; иными словами, это — сѣченія, въ которыхъ категорія A не имѣетъ наибольшаго, а категорія B не имѣетъ наименьшаго числа. Примѣръ такого рода несобственнаго сѣченія даетъ намъ, скажемъ, $\sqrt{2} = 1,\ 414\ldots$ или вообще всякая непеіодическая безконечная дробь. Относительно каждаго раціональнаго числа мы можемъ тотчасъ рѣшить, больше ли оно или меньше, чѣмъ эта безконечная десятичная дробь, и сообразно этому отнести каждое раціональное число либо къ категоріи A, либо къ категоріи B. Въ такомъ случаѣ ясно, что каждое число категоріи A меньше каждаго числа категоріи B, а, съ другой стороны, въ категоріи A не можетъ быть наибольшаго, а въ категоріи B не можетъ быть наименьшаго числа, ибо между каждымъ раціональнымъ числомъ и нашей безконечной дробью еще всегда найдется безчисленное множество другихъ раціональныхъ дробей.

Въ виду этихъ соображеній *Дедекиндъ* устанавливаетъ слѣдующее опредѣленіе, которое съ точки зрѣнія строго логической должно быть, конечно, разсматриваемо, какъ чисто условное соглашеніе. *Каждое сѣченіе въ области раціональныхъ чиселъ мы будемъ называть раціональнымъ или ирраціональнымъ числомъ, смотря по тому, будетъ ли это сѣченіе собственнымъ или несобственнымъ.*

Къ этому непосредственно примыкаетъ опредѣленіе равенства: *два числа называются равными, если они производятъ одно и то же сѣченіе въ области раціональныхъ чиселъ.* Исходя изъ этого опредѣленія, можно, напримѣръ, доказать, что $\frac{1}{3}$ равняется безконечной десятичной дроби 0,333... Тотъ, кто станетъ на нашу точку зрѣнія, дѣйствительно долженъ требовать доказательства, основаннаго на опредѣле-

ніи, хотя человѣку, наивно къ этому дѣлу подходящему, это можетъ показаться совершенно ненужнымъ. Получить же это доказательство нетрудно, если мы сообразимъ, что каждое раціональное число, которое меньше $\frac{1}{3}$, при обращеніи въ десятичную дробь рано или поздно дастъ меньшій десятичный знакъ, чѣмъ въ нашей безконечной дроби; всякое же раціональное число, которое больше этой безконечной дроби, раньше или позже дастъ большій десятичный знакъ.

Въ лекціяхъ *Вейерштрасса* соотвѣтствующее опредѣленіе гласитъ такъ: *два числа называются равными, если они отличаются другъ отъ друга меньше, чѣмъ на любое данное число.* Связь между этимъ опредѣленіемъ и предыдущимъ легко усмотрѣть. Особенно нагляднымъ представляется послѣднее опредѣленіе, если мы сообразимъ, почему дробь $0{,}999\ldots = 1$: разница, очевидно, меньше, чѣмъ $0{,}1$, чѣмъ $0{,}01, \ldots$; слѣдовательно, на основаніи опредѣленія, она равна 0.

Теперь спрашивается, благодаря чему мы имѣемъ возможность ввести въ нашу систему ирраціональныя числа и производить дѣйствія надъ тѣми и другими числами, совершенно ихъ не различая? Причина кроется въ томъ, что сохраняетъ силу законъ монотонности элементарныхъ операцій. Принципъ этотъ заключается въ слѣдующемъ: *если два ирраціональныхъ числа нужно сложить, перемножить и т. п., то мы ихъ заключаемъ во все болѣе и болѣе тѣсные предѣлы и надъ этими предѣлами соотвѣтственно производимъ тѣ же дѣйствія, которыя намъ нужно произвести надъ самыми ирраціональными числами; вслѣдствіе закона монотонности и результатъ послѣдовательно замыкается во все болѣе и болѣе тѣсныя границы.*

Мнѣ нѣтъ надобности излагать здѣсь эти вещи, такъ какъ вы можете подробно знакомиться съ ними по многимъ учебникамъ, лучше всего опять-таки у *Вебера-Вельштейна* и *Буркгардта*. Тамъ вы найдете и бóльшія подробности относительно опредѣленія ирраціональнаго числа, которое я здѣсь изложилъ только въ общихъ чертахъ.

Здѣсь я предпочелъ бы остановиться еще на томъ, чего вы въ книгахъ обыкновенно не найдете: именно на томъ, какъ можно перейти отъ изложенной здѣсь ариѳметической теоріи ирраціональныхъ чиселъ къ ихъ примѣненію въ другихъ областяхъ. Въ особенности я имѣю въ виду здѣсь аналитическую геометрію, которую мы, по наивной интуиціи, принимаемъ обратно за источникъ ирраціональныхъ чиселъ, и которая психологически дѣйствительно является этимъ источникомъ.

Если мы возьмемъ ось абсциссъ, на которой, какъ выше, нанесены начало и всѣ раціональныя точки, то основное положеніе, на которомъ покоится это примѣненіе, гласитъ: каждому раціональному или ирраціональному числу отвѣчаетъ точка, имѣющая это число своей абсциссой; каждой точкѣ на прямой отвѣчаетъ въ качествѣ абсциссы раціональное или ирраціональное число.

Такого рода исходное положеніе, которое стоитъ во главѣ дисциплины, изъ котораго все дальнѣйшее вытекаетъ чисто логически, тогда какъ само оно не можетъ быть логически доказано, мы называемъ аксіомой. Отдѣльные математики, въ зависимости отъ сложившихся у нихъ взглядовъ, смотрятъ на аксіому, какъ на интуитивно ясную истину или какъ на болѣе или менѣе произвольное соглашеніе. Настоящая аксіома объ однозначномъ соотвѣтствіи между всѣми вещественными числами, съ одной стороны, и точками прямой, съ другой стороны, обыкновенно называется аксіомой Кантора, который первый точно ее формулировалъ*).

Здѣсь, именно, будетъ умѣстно сказать нѣсколько словъ о природѣ нашихъ пространственныхъ представленій.

Самое это выраженіе, строго говоря, можно понимать двояко: съ одной стороны, можно имѣть въ виду непосредственное чувственное, эмпирическое представленіе о пространствѣ, которое мы контролируемъ при помощи измѣренія; съ другой стороны,—отвлеченное, внутреннее представленіе о пространствѣ, можно было бы сказать, присущую намъ идею о пространствѣ, которая воз-

*) Mathem. Annalen, Bd. V, 1872.

вышается надъ неточностью чувственныхъ воспріятій. Такого рода различіе вообще имѣетъ мѣсто при каждомъ интуитивномъ воззрѣніи, какъ я уже имѣлъ случай указать при развитіи понятія о числѣ; лучше всего оно выясняется, быть можетъ, слѣдующимъ примѣромъ. Что означаетъ небольшое число 2, 5 или 7, намъ непосредственно ясно, но о большихъ числахъ — напримѣръ, о числѣ 2503 — мы уже не имѣемъ такого непосредственнаго, нагляднаго представленія. Здѣсь, напротивъ, находитъ себѣ примѣненіе внутреннее представленіе о расположенномъ числовомъ рядѣ, которое мы себѣ составляемъ, исходя отъ начальныхъ чиселъ при помощи совершенной индукціи. Что касается представленія о пространствѣ, то дѣло обстоитъ такъ: если мы разсматриваемъ разстояніе между двумя точками, то мы можемъ оцѣнить и измѣрить его лишь съ ограниченнымъ приближеніемъ, такъ какъ нашъ глазъ неспособенъ различать отрѣзки, падающіе ниже нѣкоторой границы; это есть такъ называемый порогъ ощущенія, понятіе, играющее чрезвычайно важную роль во всей психологіи. Но по существу дѣло не измѣняется и въ томъ случаѣ, если мы усиливаемъ нашъ глазъ самыми тонкими инструментами, такъ какъ существуютъ физическія свойства, которыя лишаютъ насъ возможности выйти за извѣстныя границы точности. Такъ, напримѣръ, оптика учитъ насъ, что длина свѣтовой волны, отъ которой зависитъ цвѣтъ, есть величина порядка 0,001 миллиметра (1 микронъ). Она обнаруживаетъ далѣе, что предметы небольшіе, по сравненію съ этими размѣрами, не могутъ быть ясно видимы, потому что никакіе инструменты здѣсь не даютъ уже оптическаго изображенія, точно воспроизводящаго детали. Вслѣдствіе этого оптическимъ путемъ мы не можемъ уже различать длины, меньшія одного микрона, такъ что при выраженіи длины въ миллиметрахъ дѣйствительное значеніе могутъ имѣть только первые три десятичныхъ знака. Такимъ же образомъ и при всякихъ другихъ физическихъ наблюденіяхъ и измѣреніяхъ мы наталкиваемся на такого рода пороги ощущенія, которые устанавливаютъ предѣлъ возможной точности. Указанія, падающія за эти предѣлы, никакого значенія уже не имѣютъ и свидѣтельствуютъ о невѣжествѣ или даже о недобросовѣстности. Такого рода преувеличенно точныя числа мы находимъ, напримѣръ, въ курортныхъ рекламахъ, указывающихъ содержаніе той или иной соли

въ источникѣ съ такою точностью, установленіе которой при помощи дѣйствительнаго взвѣшиванія совершенно невозможно.

Въ противоположность этому свойству эмпирическаго представленія о пространствѣ, необходимо ограниченнаго извѣстнымъ приближеніемъ, абстрактное или идеальное представленіе о пространствѣ обладаетъ неограниченной точностью и въ силу Канторовой аксіомы вполнѣ параллельно ариѳметическому опредѣленію понятія о числѣ.

Сообразно этому подраздѣленію нашихъ представленій является цѣлесообразнымъ и самую математику раздѣлить на двѣ части: на математику точную и математику приближенную. Выяснимъ это различіе на уравненіи $f(x)=0$. Въ приближенной математикѣ, какъ и въ случаѣ нашихъ дѣйствительныхъ эмпирическихъ представленій, здѣсь рѣчь идетъ не о томъ, чтобы $f(x)$ точно обратилось въ нуль, а только о томъ, чтобы значеніе функціи $|f(x)|$ упало ниже достижимаго порога точности; такимъ образомъ, равенство $f(x)=0$ должно служить только сокращеннымъ выраженіемъ неравенства

$$|f(x)| < \varepsilon,$$

съ которымъ фактически и приходится имѣть дѣло. Выполнить же строго требованіе равенства $f(x)=0$ составляетъ уже задачу точной математики. Такъ какъ въ приложеніяхъ играетъ роль только приближенная математика, то можно, выражаясь грубо, сказать, что нужду мы имѣемъ собственно въ этой послѣдней дисциплинѣ, между тѣмъ какъ точная математика существуетъ только для удовольствія тѣхъ, которые ею занимаются, а въ остальномъ составляетъ лишь опору для математики приближенной.

Возвращаясь опять къ нашей темѣ, я долженъ сказать, что логическое опредѣленіе ирраціональнаго числа несомнѣнно относится къ точной математикѣ. Въ самомъ дѣлѣ, утвержденіе, что двѣ точки отстоятъ другъ отъ друга на разстояніе, выражающееся ирраціональнымъ числомъ миллиметровъ, фактически не имѣетъ никакого смысла, такъ какъ десятичные знаки дальше шестого не имѣютъ реальнаго значенія. Въ практикѣ мы можемъ, такимъ образомъ, свободно замѣнять ирраціональныя числа раціо-

нальными. На первый взглядъ это находится въ противорѣчіи съ закономъ раціональныхъ указателей въ кристаллографіи, или, напримѣръ, съ тѣмъ обстоятельствомъ, что въ астрономіи приходится отличать случаи, существенно разные, когда времена оборотовъ двухъ планетъ имѣютъ раціональное или ирраціональное отношеніе. Въ дѣйствительности же здѣсь опять проявляется только многозначность нашего языка, такъ какъ здѣсь понятія раціональное и ирраціональное нужно понимать въ совершенно другомъ смыслѣ,—именно въ смыслѣ, свойственномъ *приближенной математикѣ*. Когда здѣсь говорятъ, что величины имѣютъ раціональное отношеніе, то подъ этимъ разумѣютъ, что ихъ отношеніе выражается парой небольшихъ чиселъ,—напримѣръ, $\frac{3}{7}$. Такое же отношеніе, какъ $\frac{2021}{7053}$ здѣсь несомнѣнно отнесли бы уже къ ирраціональнымъ. Насколько, собственно, велики могутъ быть числитель и знаменатель, это мѣняется отъ случая къ случаю, въ зависимости отъ условій вопроса.

Всѣ эти интересныя соображенія развиты мною въ лекціяхъ, читанныхъ въ весеннемъ семестрѣ 1901 года и изданныхъ подъ названіемъ „Anvendung der Differential und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien“ (Ausgearb. v. C. H. Müller).

Въ двухъ словахъ я хотѣлъ бы еще указать, въ заключеніе, какъ я себѣ представляю желательное изложеніе этихъ вещей въ школѣ. Точное изложеніе теоріи ирраціональныхъ чиселъ здѣсь врядъ ли умѣстно, такъ какъ она не можетъ быть интересна для большинства учениковъ. Юноша несомнѣнно всегда удовлетворится указаніемъ ограниченнаго приближенія; точность же въ 0,001 миллиметра уже вызоветъ удивленіе, а потребности въ полной точности у него несомнѣнно не будетъ. Вслѣдствіе этого будетъ вполнѣ достаточно, если въ школѣ выяснить ирраціональное число только на общихъ примѣрахъ, какъ это большею частью и дѣлаютъ. Конечно, немногіе юноши, обладающіе ясно выраженнымъ математическимъ дарованіемъ, этимъ не удовлетворятся и захотятъ вникнуть глубже въ сущность вопроса. До стойной задачей учителя будетъ удовлетворить эту потребность, не нарушая интересовъ большинства учениковъ.

III. Особыя свойства цѣлыхъ чиселъ.

Мы начнемъ теперь новую главу, которую мы посвятимъ собственно ученію о цѣлыхъ числахъ, теоріи чиселъ, или ариѳметикѣ въ болѣе узкомъ смыслѣ этого слова.

Я прежде сдѣлаю сводку отдѣльныхъ вопросовъ, въ которыхъ эта дисциплина соприкасается со школьнымъ преподаваніемъ.

1) Первой задачей теоріи чиселъ является вопросъ о дѣлимости: дѣлится ли одно число на другое?

2) Можно указать простыя правила, которыя даютъ возможность легко распознать, дѣлится ли произвольное число на небольшія числа, какъ 2, 3, 4, 5, 9, 11 и т. д.

3) Имѣется безчисленное множество простыхъ чиселъ, т. е. такихъ, которыя не имѣютъ собственныхъ дѣлителей (иными словами, которыя дѣлятся только на себя и на единицу): 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

4) Мы владѣемъ всѣми соотношеніями, касающимися дѣлимости любыхъ чиселъ, если мы знаемъ ихъ разложеніе на простыхъ множителей.

5) Теорія чиселъ играетъ роль въ вопросѣ объ обращеніи раціональныхъ дробей въ десятичныя: она поясняетъ, почему десятичная дробь должна стать періодической, и какъ великъ періодъ.

Эти вопросы появляются уже въ младшихъ классахъ; позже вопросы теоріи чиселъ появляются только спорадически. Во всякомъ случаѣ, приходится встрѣчать слѣдующее:

6) Если и не во всѣхъ школахъ, то, во всякомъ случаѣ, во многихъ излагаются непрерывныя дроби.

7) Иногда излагаются Діофантовы уравненія, т. е. уравненія со многими неизвѣстными, при разрѣшеніи которыхъ мы ограничиваемся цѣлыми значеніями неизвѣстныхъ. Въ видѣ

примѣра я приведу пиѳагоровы числа, о которыхъ мы имѣли уже случай говорить. Какъ извѣстно, здѣсь рѣчь идетъ о системахъ цѣлыхъ рѣшеній уравненія

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

8) Въ тѣсной связи съ теоріей чиселъ находится вопросъ о дѣленіи окружности на равныя части, хотя этотъ вопросъ врядъ ли когда либо разбирается въ школѣ. Если намъ нужно раздѣлить окружность на n равныхъ частей,— разумѣется, пользуясь всегда только циркулемъ и линейкой,— то это легко удается при $n = 2$, 3, 4, 5, 6. Но при $n = 7$ это уже не удается, и учитель обыкновенно почтительно останавливается на этомъ пунктѣ, не высказывая даже категорически того, что это выполнить вовсе невозможно. Причина этого обстоятельства коренится въ глубокихъ соображеніяхъ теоріи чиселъ. Чтобы избѣжать недоразумѣній, съ которыми, къ сожалѣнію, въ этомъ именнно вопросѣ приходится довольно часто встрѣчаться, я еще разъ подчеркну, что здѣсь мы вновь имѣемъ дѣло съ вопросомъ точной математики, не имѣющимъ для практическихъ примѣненій никакого значенія. Для практическихъ цѣлей врядъ ли кто-либо станетъ пользоваться точнымъ построеніемъ даже въ тѣхъ случаяхъ, когда это возможно. Напротивъ, будетъ гораздо цѣлесообразнѣе, оставаясь на почвѣ приближенной математики, простыми и умѣло подобранными испытаніями раздѣлить окружность на любое число равныхъ частей; при этомъ можно легко достигнуть всякой практически доступной точности. Такъ, несомнѣнно, поступаетъ каждый механикъ, которому нужн остроить инструменты съ раздѣленными кругами.

9) Еще въ одномъ мѣстѣ въ школѣ приходится столкнуться съ высшей теоріей чиселъ — именно, въ вопросѣ о квадратурѣ круга и связаннымъ съ нимъ вычисленіемъ π. При изложеніи этого отдѣла тѣмъ или инымъ путемъ вычисляютъ первые десятичные знаки числа π, а затѣмъ, несомнѣнно, упоминаютъ о современномъ доказательствѣ трансцендентности числа π, рѣшающемъ древнюю задачу о квадратурѣ круга при помощи циркуля и линейки въ отрицательномъ смыслѣ. Въ концѣ своего курса я возвращусь къ этому доказательству, здѣсь же я ограничусь точ-

ной формулировкой этого утвержденія; дѣло сводится къ тому, что число π не можетъ удовлетворять никакому алгебраическому уравненію съ цѣлыми коэффиціентами вида:

$$a\pi^m + b\pi^{m-1} + c\pi^{m-2} + \ldots + k\pi + l = 0.$$

То обстоятельство, что коэффиціенты должны быть цѣлыми числами, играетъ здѣсь особую роль; оно именно и относитъ этотъ вопросъ къ теоріи чиселъ.

Само собой разумѣется, что и здѣсь мы имѣемъ дѣло съ вопросомъ точной математики, ибо для нея только и имѣетъ значеніе числовой характеръ π. Для математика, ограничивающагося приближеніемъ, достаточно опредѣлить первые десятичные знаки, которые даютъ ему возможность произвести квадратуру круга съ любой доступной намъ точностью.

Этимъ исчерпывается роль теоріи чиселъ въ школѣ. Спросимъ еще, какое мѣсто она занимаетъ въ университетскомъ преподаваніи и въ научномъ изслѣдованіи. Я склоненъ раздѣлить математиковъ, занимающихся самостоятельными изслѣдованіями, по ихъ отношенію къ теоріи чиселъ — на двѣ категоріи; однихъ я назову энтузіастами, другихъ индиферентными. Для первыхъ не существуетъ никакой науки, которая была бы такъ прекрасна и такъ важна, какъ теорія чиселъ,— никакой науки, которая давала бы столь ясныя и точныя доказательства и теоремы такой безукоризненной строгости. „Если математика есть царица наукъ, то теорія чиселъ есть царица математики", говоритъ Гауссъ. Индиферентные же стоятъ далеко отъ теоріи чиселъ, очень мало заботятся о ея развитіи и стараются вовсе ея избѣгать. Большинство изучающихъ математику по своимъ симпатіямъ относятся къ послѣдней категоріи.

Причина этого замѣчательнаго раздѣленія, по моему мнѣнію, коренится въ слѣдующемъ: съ одной стороны, теорія чиселъ несомнѣнно имѣетъ основное значеніе для всякаго глубокаго математическаго изслѣдованія. Необычайно часто мы наталкиваемся, исходя изъ совершенно различныхъ областей, на сравнительно простые ариѳметическіе факты. Но, съ другой стороны, чистая теорія чиселъ является крайне абстрактной дисциплиной; способностью же воспринимать съ удовольствіемъ весьма абстрактныя вещи обладаютъ немногіе. Уже это обстоятельство само по себѣ

могло бы содѣйствовать безучастности, которую проявляютъ многіе къ теоріи чиселъ. Но это еще усиливается тѣмъ, что въ современныхъ сочиненіяхъ по теоріи чиселъ предметъ излагается обыкновенно чрезвычайно абстрактно. Я полагаю, что теорія чиселъ сдѣлалась бы гораздо болѣе доступной и встрѣтила бы гораздо больше интереса къ себѣ, если бы ее излагали наглядно и на подходящихъ фигурахъ. Ея предложенія, конечно, не зависятъ отъ этихъ вспомогательныхъ средствъ, но они могли бы много содѣйствовать пониманію. Эту точку зрѣнія я и старался провести въ лекціяхъ, читанныхъ мною въ 1905-1906 учебномъ году*). Ту же цѣль имѣетъ въ виду Минковскій въ своей книгѣ „О Діофантовыхъ приближеніяхъ“**). Мои лекціи носятъ болѣе элементарный, вводный характеръ, тогда какъ Минковскій скоро углубляется въ спеціальныя задачи.

Что касается учебниковъ по теоріи чиселъ, то вы можете собственно вполнѣ ограничиться тѣмъ матеріаломъ, который вы находите въ учебникахъ алгебры. Изъ числа же спеціальныхъ сочиненій я охотнѣе всего рекомендовалъ бы вамъ новую книгу Бахмана „Основанія новой теоріи чиселъ“***).

Разъясненія, спеціально относящіяся къ теоріи чиселъ, я хотѣлъ связать съ упомянутыми выше вопросами и постараюсь изложить ихъ возможно болѣе наглядно. Само собой разумѣется, что я по прежнему имѣю въ виду тотъ матеріалъ, который, по моему мнѣнію, долженъ знать учитель, и отнюдь не думаю, чтобы весь этотъ матеріалъ можно было непосредственно въ той же формѣ сообщать ученику. Я долженъ указать на опытъ, вынесенный мною изъ учительскихъ экзаменовъ. Мнѣ пришлось убѣдиться, что въ большинствѣ случаевъ кандидаты на учительское званіе ограничиваются лишь ходячими выраженіями, не имѣя сколько-нибудь серьезныхъ свѣдѣній въ этой области. Что π есть трансцендентное число — это говоритъ, конечно, каждый:

---

*) „Ausgewählte Kapitel aus der Zahlentheorie“ (Ausgegeben von A. Sommerfeld und P. Furtwängler). Нов. изд. 1907 г.

**) H. Minkowsky, „Diophantische Approximationen“. Eine Einführung in die Zahlentheorie. Leipzig, 1907.

***) P. Bachman, „Grundlagen der neueren Zahlentheorie“. Sammlung Schubert, № 53, Leipzig, 1907.

но что это собственно означаетъ, это знаютъ уже немногіе. Разъ я получилъ даже и такой отвѣтъ, что π не есть ни раціональное, ни ирраціональное число. Точно такъ же довольно часто приходится встрѣчать экзаменующихся, которые знаютъ, правда, что имѣется безчисленное множество простыхъ чиселъ, но не имѣютъ ни малѣйшаго представленія о доказательствѣ этого предложенія.

Съ этого послѣдняго доказательства я и начну; при этомъ тѣ простыя вещи, которыя содержатся въ пунктахъ 1 и 2 предыдущаго перечисленія, я буду считать извѣстными. Упомяну еще, что исторически доказательство этого предложенія принадлежитъ Евклиду, „Начала" (по-гречески Στοιχεῖα) котораго содержатъ не только систему геометріи, но также алгебраическіе и ариѳметическіе факты, часто облеченные въ геометрическія формы. Евклидовъ пріемъ доказательства указаннаго предложенія заключается въ слѣдующемъ. Положимъ, что рядъ простыхъ чиселъ ограниченъ и исчерпывается числами $2, 3, 5, \ldots, p$; въ такомъ случаѣ число $N = (1, 2, 3, 5, \ldots, p) + 1$, очевидно, не дѣлится ни на 2, ни на $3, \ldots$, ни на p, такъ какъ при дѣленіи на каждое изъ этихъ чиселъ мы получаемъ въ остаткѣ единицу. Поэтому должно имѣть мѣсто одно изъ двухъ: либо это есть простое число, либо существуютъ простыя числа, отличныя отъ $2, 3, \ldots, p$. Но то и другое противорѣчитъ нашему предположенію, и теорема, такимъ образомъ, доказана.

Что касается 4-го пункта — разложенія чиселъ на простые множители, то я хочу показать вамъ одну изъ старѣйшихъ таблицъ разложенія, принадлежащую Чермаку*). Эти обширныя полезныя таблицы съ исторической точки зрѣнія заслуживаютъ тѣмъ большаго вниманія, что онѣ въ высокой степени точны. Названіе таблицъ происходитъ отъ переданнаго намъ еще изъ древности термина „рѣшето Эратосѳена". Основаніемъ для этого термина послужило представленіе, что мы изъ всего натуральнаго ряда чиселъ послѣдовательно просѣиваемъ тѣ, которые дѣлятся на $2, 3, 5, \ldots$, такъ что, въ концѣ концовъ, остаются только простыя числа. Чермакъ даетъ разложеніе на простые множители чиселъ, не дѣлящихся на 2, 3 или 5, и доводитъ свою таблицу до 1 020 000. При этомъ всѣ простыя числа отмѣ-

*) Chermac, „Cribum arithmeticum", Daventriae, 1811.

чены горизонтальной чертой и въ такихъ высокихъ предѣлахъ приведены въ этомъ сочиненіи въ первый разъ. Впрочемъ, въ XIX столѣтіи вычисленіе простыхъ чиселъ продолжено значительно дальше и доведено до 9-го милліона.

Обращаюсь теперь къ пятому пункту, именно къ обращенію раціональныхъ дробей въ десятичныя. Подробную теорію вы найдете въ книгѣ Вебера-Вельштейна; я же хочу выяснить здѣсь только принципы этой теоріи на простѣйшемъ типичномъ примѣрѣ. Разсмотримъ дробь $\frac{1}{p}$, гдѣ p есть простое число, отличное отъ 2 и 5; мы покажемъ, что дробь $\frac{1}{p}$ развертывается въ безконечную періодическую дробь, и что число цифръ δ періода есть наименьшій показатель, при которомъ 10^δ даетъ при дѣленіи на p въ остаткѣ 1, или, выражаясь языкомъ теоріи чиселъ, δ есть наименьшій показатель, при которомъ имѣетъ мѣсто сравненіе

$$10^\delta \equiv 1 \ (\text{mod. } p).$$

Доказательство прежде всего предполагаетъ извѣстнымъ, что такое сравненіе всегда возможно; это устанавливается такъ называемой малой теоремой Ферма, заключающейся въ томъ, что при всякомъ простомъ p, не дѣлящемъ числа 10,

$$10^{p-1} \equiv 1 \ (\text{mod. } p).$$

На доказательствѣ этого основного предложенія, служащаго постояннымъ орудіемъ изслѣдованія всякому математику, я здѣсь не буду останавливаться. Далѣе, изъ теоріи чиселъ мы должны заимствовать еще предложеніе, что наименьшій показатель δ, о которомъ идетъ выше рѣчь, либо равенъ числу $p-1$, либо есть дѣлитель этого числа. Это мы можемъ примѣнить къ нашему числу p и получимъ, такимъ образомъ, что

$$\frac{10^\delta - 1}{p}$$

есть цѣлое число N, такъ что

$$\frac{10^\delta}{p} = \frac{1}{p} + N.$$

Если мы поэтому представимъ себѣ дроби $\frac{1}{p}$ и $\frac{10^\delta}{p}$ обращенными въ десятичныя, то соотвѣтствующіе десятичные знаки должны будутъ совпадать, такъ какъ разность между этими дробями есть цѣлое число. Такъ какъ, съ другой стороны, дробь $\frac{10^\delta}{p}$ получается изъ дроби $\frac{1}{p}$ перенесеніемъ запятой вправо на δ десятичныхъ знаковъ, то отсюда слѣдуетъ, что отъ такого перенесенія запятой десятичные знаки дроби $\frac{1}{p}$ не измѣняются, иными словами, что десятичные знаки дроби $\frac{1}{p}$ представляютъ собой послѣдовательное повтореніе періода, состоящаго изъ δ цифръ. Теперь покажемъ, что не можетъ быть меньшаго періода, состоящаго изъ $\delta' < \delta$ цифръ. Для этого намъ достаточно обнаружить, что число цифръ δ' каждаго періода удовлетворяетъ сравненію $10^{\delta'} \equiv 1$, ибо намъ извѣстно, что δ есть наименьшее рѣшеніе этого сравненія *). Это доказательство представляетъ собой простое обращеніе прежняго разсужденія. Въ самомъ дѣлѣ, изъ условія слѣдуетъ, что дроби $\frac{1}{p}$ и $\frac{10^{\delta'}}{p}$ имѣютъ одни и тѣ же десятичные знаки; слѣдовательно, разность этихъ дробей $\frac{10^{\delta'}}{p} - \frac{1}{p}$ есть цѣлое число N, а потому $10^{\delta'} - 1$ дѣлится на p; такимъ образомъ, дѣйствительно, $10^{\delta'} \equiv 1 \pmod{p}$; этимъ вполнѣ исчерпывается доказательство.

Я приведу еще нѣкоторые возможно болѣе простые и поучительные примѣры, изъ которыхъ вы увидите, что δ дѣйствительно можетъ принимать всѣ возможныя значенія, какъ меньшія $p-1$, такъ и равныя $p-1$. Замѣтимъ прежде всего, что для дроби

$$\frac{1}{3} = 0,333\ldots$$

*) Если это предложеніе будетъ доказано и мы допустимъ, что существуетъ періодъ, содержащій $\delta' < \delta$ цифръ, то будетъ существовать число $\delta' < \delta$, при которомъ $10^{\delta'} \equiv 1 \pmod{p}$; это противно условію.

число десятичныхъ знаковъ $\delta = 1$; въ самомъ дѣлѣ, уже $10^1 \equiv 1 \pmod{3}$. Далѣе мы находимъ, что для дроби

$$\frac{1}{11} = 0{,}09\ldots$$

$\delta = 2$, и, соотвѣтственно этому,

$$10^1 \equiv 10,\ 10^2 \equiv 1 \pmod{11}.$$

Наивысшее значеніе $\delta = p - 1$ мы встрѣчаемъ при разложеніи дроби

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots;$$

здѣсь $\delta = 6$. И дѣйствительно, не трудно видѣть, что по модулю 7

$10^1 \equiv 3,\ 10^2 \equiv 2,\ 10^3 \equiv 6,\ 10^4 \equiv 4,\ 10^5 \equiv 5$ и, наконецъ, $10^6 \equiv 1$.

Я хочу также нѣсколько остановиться на вопросѣ, содержащемся въ *шестомъ* пунктѣ предыдущаго перечисленія, именно на *непрерывныхъ дробяхъ*. При этомъ я не буду здѣсь, однако, приводить обыкновеннаго отвлеченнаго ариѳметическаго изложенія, которое вы найдете во многихъ другихъ сочиненіяхъ, напримѣръ, у *Вебера-Вельштейна*. Напротивъ, я воспользуюсь случаемъ, чтобы вамъ показать, какую ясную и понятную форму пріобрѣтаютъ вопросы теоріи чиселъ при наглядномъ геометрическомъ ихъ изложеніи. Къ тому же, прибѣгая къ этимъ геометрическимъ пріемамъ въ области теоріи чиселъ, мы возвращаемся только къ тѣмъ путямъ, по которымъ шли *Гауссъ* и *Дирихле*. Лишь новѣйшіе математики, начиная примѣрно съ 1860 года, изгнали эти методы изъ теоріи чиселъ. Само собой разумѣется, что здѣсь я имѣю возможность кратко привести только ходъ разсужденій и важнѣйшія теоремы безъ доказательствъ; я естественно предполагаю также, что начала элементарной теоріи непрерывныхъ дробей вамъ небезызвѣстны. Впрочемъ, обстоятельное изложеніе вы можете найти въ моихъ литографированныхъ лекціяхъ по теоріи чиселъ.

Вы знаете, *какъ разворачивается данное положительное число* ω *въ непрерывную дробь*: мы выдѣляемъ наибольшее цѣлое число n_0, содержащееся въ ω, и полагаемъ:

$$\omega = n_0 + r_0,$$

гдѣ

$$0 \leqslant r_0 < 1;$$

далѣе, съ дробью $\frac{1}{r_0}$ мы поступаемъ такъ же, какъ съ числомъ ω:

$$\frac{1}{r_0} = n_1 + r_1,$$

гдѣ

$$0 \leqslant r_1 < 1,$$

и этотъ процессъ ведемъ дальше:

$$\frac{1}{r_1} = n_2 + r_2, \qquad 0 \leqslant r_2 < 1,$$

$$\frac{1}{r_2} = n_3 + r_3, \qquad 0 \leqslant r_3 < 1,$$

. . . .

Если ω есть раціональное число, то этотъ процессъ обрывается послѣ конечнаго числа ступеней; если же ω есть ирраціональное число, то процессъ продолжается безконечно. Во всякомъ случаѣ мы будемъ писать кратко „разложеніе числа ω въ непрерывную дробь“:

$$\omega = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ldots}}}$$

Въ видѣ примѣра приведу разложеніе въ непрерывную дробь числа π.

$$\pi = 3{,}14159265\ldots = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{292 + \ldots}}}$$

Если мы оборвемъ непрерывную дробь на первомъ, второмъ, третьемъ... частномъ, то мы получимъ раціональныя такъ называемыя „подходящія дроби“:

$$n_0 = \frac{p_0}{q_0}, \quad n_0 + \frac{1}{n_1} = \frac{p_1}{q_1}, \quad n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2}} = \frac{p_2}{q_2}, \ldots$$

Эти дроби представляютъ собой чрезвычайно хорошія приближенія къ числу ω; выражаясь точнѣе, каждое изъ нихъ даетъ самое лучшее приближеніе, какого только возможно достигнуть, не увеличивая знаменателя приближенной дроби.

Благодаря этому свойству подходящихъ дробей теорія непрерывныхъ дробей пріобрѣтаетъ практически важное значеніе во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, гдѣ нужно выразить ирраціональныя числа или даже раціональныя дроби, но имѣющія большихъ знаменателей (напримѣръ, десятичныя дроби со многими знаками), возможно простыми дробями, т. е. дробями съ возможно меньшими знаменателями. Насколько хорошее приближеніе мы получаемъ, можно видѣть изъ слѣдующей таблички, содержащей обратное перечисленіе первыхъ подходящихъ числа π въ десятичныя дроби.

$$\pi = 3{,}14159265...$$

$$\frac{p_0}{q_0} = 3, \ \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7} = 3{,}14285...; \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106} = 3{,}141509...,$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113} = 3{,}14159292...$$

Кстати вы замѣчаете на этихъ примѣрахъ, что подходящія дроби поперемѣнно то больше π, то меньше этого числа; это есть, какъ извѣстно, общее свойство подходящихъ дробей: развертывая число ω въ непрерывную дробь, мы заключаемъ его при помощи подходящихъ дробей въ предѣлы, постоянно суживающіеся сверху и снизу.

Оживимъ теперь всѣ эти вещи при помощи геометрическаго образа. Съ этою цѣлью представимъ себѣ въ положительномъ квадрантѣ плоскости xy-овъ (предполагая, что мы ограничиваемся положительными числами) всѣ точки, которыя имѣютъ координатами цѣлыя числа; онѣ образуютъ такъ называемую „сѣть точекъ“ *). Будемъ разсматривать эту сѣть — я могъ бы даже сказать это „звѣздное небо“ — точекъ изъ начала координатъ

*) „Punktgitter“—сравнительно новый терминъ, который былъ введенъ Г. Миньковскимъ.

O (фиг. 13); лучъ, идущій отъ начала къ точкѣ $x = a$, $y = b$, имѣетъ уравненіе

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b};$$

и обратно, на каждомъ лучѣ $\frac{x}{y} = \lambda$, гдѣ λ есть раціональное число $\frac{a}{b}$, лежитъ безчисленное множество цѣлочисленныхъ точекъ (ma, mb), гдѣ m есть произвольное цѣлое число. Такимъ образомъ, изъ точки O во всѣхъ возможныхъ раціональныхъ направленіяхъ и только въ этихъ направленіяхъ мы видимъ точки нашей рѣшетки; поле зрѣнія повсюду сгущено и заполнено „звѣздами", но оно еще не свободно отъ пробѣловъ, оно не заполнено ими непрерывно, оно какъ бы напоминаетъ „млечный путь". На ирраціональномъ лучѣ $\frac{x}{y} = \omega$, гдѣ ω есть число ирраціональное, не лежитъ, слѣдовательно, ни одна цѣлочисленная точка — фактъ, замѣчательный уже и самъ по себѣ. Но, очевидно, такого рода прямая, выражаясь терминомъ, напоминающимъ Дедекиндово опредѣленіе ирраціональныхъ чиселъ, производитъ сѣченіе въ области всѣхъ цѣлочисленныхъ точекъ; именно, она разбиваетъ ихъ на двѣ группы точекъ, расположенныхъ справа и слѣва отъ прямой. Если мы спросимъ себя теперь, гдѣ же у нашего луча отдѣляются другъ отъ друга эти группы, то мы придемъ къ чрезвычайно интересному свойству разложенія числа ω въ непрерывную дробь. Именно, если мы отмѣтимъ точки $x = p_r$, $y = q_r$, соотвѣтствующія каждой подходящей дроби $\frac{p_r}{q_r}$ въ разложеніи числа ω (p_r и q_r суть числа первыя между собой), то лучи, идущіе къ этимъ точкамъ, должны все ближе и ближе подходить къ лучу $\frac{x}{y} = \omega$ и при томъ попеременно, то съ одной,

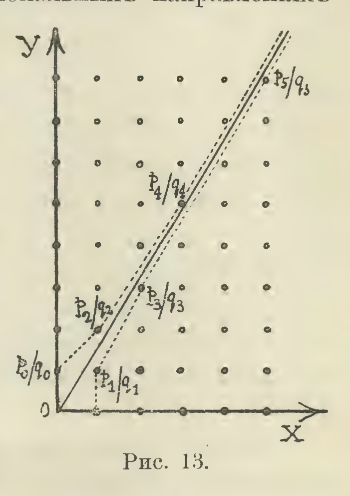


Рис. 13.

то съ другой стороны; это приближеніе должно происходить съ такой же быстротой, съ какой дробь $\frac{p_r}{q_r}$ приближается къ ирраціональному числу ω. Развитіе этой идеи приводитъ къ слѣдующей теоремѣ, которую нетрудно доказать, пользуясь извѣстными въ теоріи чиселъ свойствами чиселъ p_r и q_r.

Представимъ себѣ, что во всѣ цѣлочисленныя точки воткнуты штифтики или булавки, какъ на китайскомъ билліардѣ. Каждую изъ двухъ группъ булавокъ, расположенныхъ справа и слѣва отъ луча $\frac{x}{y}=\omega$, мы обведемъ нитью; если мы натянемъ каждую нить такъ, чтобы она охватывала соотвѣтствующую группу булавокъ и прилегала бы вплотную къ ближайшимъ, то она приметъ форму выпуклой ломанной линіи; вершинами этой ломанной именно и будутъ служить точки p_r, q_r, координатами которыхъ служатъ соотвѣтственные числители и знаменатели подходящихъ дробей; при этомъ слѣва будутъ лежать точки, отвѣчающія четнымъ подходящимъ дробямъ, а справа нечетнымъ.

Этимъ путемъ мы приходимъ къ новому и, нужно сказать, чрезвычайно наглядному геометрическому опредѣленію разложенія числа въ непрерывную дробь. Приведенный выше рис. 13 относится къ случаю:

$$\omega=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}},$$

т. е. къ ирраціональному числу, выражающему отношеніе сторонъ правильнаго десятиугольника къ радіусу. Здѣсь первыми вершинами двухъ ломанныхъ линій будутъ:

слѣва: $p_0=0,\ q_0=1;\ p_2=1,\ q_2=2;\ p_4=3,\ q_4=5;\ldots$
справа: $p_1=1,\ q_1=1;\ p_3=2,\ q_3=3;\ p_5=5,\ q_5=8;\ldots$

Для числа π значенія p_r, q_r возрастаютъ гораздо быстрѣе, такъ что нанести соотвѣтствующую фигуру на чертежъ было бы довольно трудно. Полное же доказательство указаннаго предложенія вы можете найти въ упомянутыхъ выше моихъ литографированныхъ лекціяхъ.

Я перехожу теперь къ седьмому пункту, къ ученію о такъназываемыхъ пиѳагоровыхъ числахъ; здѣсь мы опять воспользуемся наглядными представленіями, но въ нѣсколько иной формѣ. Задача о пиѳагоровыхъ числахъ заключается, какъ извѣстно, въ томъ, чтобы найти цѣлыя числа, удовлетворяющія уравненію:

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (1)$$

Положивъ

$$\frac{a}{c} = \xi, \quad \frac{b}{c} = \eta, \quad (2)$$

мы разсмотримъ вмѣсто уравненія (1) уравненіе

$$\xi^2 + \eta^2 = 1, \quad (3)$$

къ которому оно проводится при помощи преобразованія (2); намъ нужно, слѣдовательно, разыскать всѣ раціональныя дроби, удовлетворяющія этому уравненію. Имѣя это въ виду мы разсмотримъ совокупность всѣхъ раціональныхъ точекъ на плоскости (т. е. всѣхъ тѣхъ точекъ, которыя имѣютъ раціональныя координаты ξ, η); точки эти образуютъ въ плоскости сгущеннный комплексъ*).

Уравненіе (3) выражаетъ окружность на плоскости, описанную изъ начала координатъ радіусомъ, равнымъ 1; наша задача сводится къ тому, чтобы опредѣлить, какъ проходитъ наша окружность въ этомъ сгущенномъ комплексѣ раціональныхъ точекъ, какія изъ нихъ она содержитъ. Нѣкоторыя изъ раціональныхъ точекъ, принадлежащихъ окружности, мы хорошо знаемъ напередъ: сюда относятся, напримѣръ, точки ея пересѣченія съ четырьмя осями. Но мы остановимся предпочтительно на точкѣ S ($\xi = -1$, $\eta = 0$;

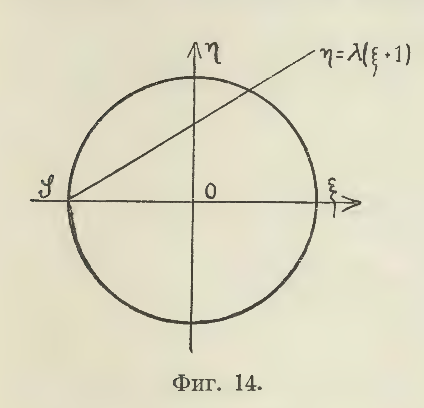
*) Т. е. такой комплексъ точекъ, въ которомъ, сколько угодно близко къ любой его точкѣ, имѣется безчисленное множество другихъ точекъ того же комплекса.

Ред.

фиг. 14). Представимъ себѣ всѣ лучи, проходящіе черезъ точку S; они выражаются уравненіемъ:

$$\eta = \lambda(\xi + 1). \qquad (4)$$

Каждый изъ этихъ лучей мы будемъ называть раціональнымъ или ирраціональнымъ, смотря по тому, имѣетъ ли параметръ λ раціональное значеніе или ирраціональное.



Фиг. 14.

Теперь нетрудно доказать слѣдующее двойное предложеніе: каждая раціональная точка окружности проектируется изъ точки S раціональнымъ лучемъ, и обратно — каждый раціональный лучъ (4) пересѣкаетъ окружность въ раціональной точкѣ.

Первая половина непосредственно ясна*). Вторую мы докажемъ прямымъ вычисленіемъ. Именно, подставляя выраженіе (4) для η въ уравненіе (3), мы получимъ для абсциссы точки пересѣченія уравненіе:

$$\xi^2 + \lambda^2(\xi + 1)^2 = 1,$$

или

$$(1 + \lambda^2)\xi^2 + 2\lambda^2\xi + \lambda^2 - 1 = 0.$$

Но одинъ корень ($\xi = -1$), соотвѣтствующій точкѣ S, намъ извѣстенъ; для другого корня мы простымъ вычисленіемъ получаемъ выраженіе:

$$\xi = \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}; \qquad (5a)$$

*) Въ самомъ дѣлѣ, если прямая (4) проходитъ черезъ какую бы то ни было раціональную точку ξ_0, η_0, отличную отъ S, то въ ея уравненіи $\lambda = \frac{\eta_0}{\xi_0 + 1}$, т. е. λ имѣетъ раціональное значеніе.

Ред.

а тогда уравненіе (4) даетъ для ординаты:

$$\eta = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}; \tag{5b}$$

при раціональномъ λ мы, такимъ образомъ, дѣйствительно получаемъ раціональную точку пересѣченія.

Доказанное такимъ образомъ предложеніе можно еще выразить такъ: всѣ раціональныя точки нашей окружности выражаются формулами (5), гдѣ λ обозначаетъ любое раціональное число. Этимъ наша задача собственно рѣшена; намъ остается только сдѣлать переходъ къ цѣлымъ числамъ. Для этого мы полагаемъ:

$$\lambda = \frac{n}{m},$$

гдѣ n и m суть цѣлыя числа; тогда выраженія (5) принимаютъ видъ:

$$\xi = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \quad \eta = \frac{2mn}{m^2 + n^2}.$$

Это будетъ общій видъ всѣхъ раціональныхъ рѣшеній уравненія (3). Совокупность всѣхъ цѣлыхъ рѣшеній первоначальнаго уравненія (1), т. е. всѣ пиѳагоровы числа, содержатся, стало быть, въ формулахъ:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2;$$

мы получаемъ отсюда всѣ рѣшенія, не имѣющія общихъ дѣлителей, если числа m и n пробѣгаютъ черезъ всѣ пары чиселъ, первыхъ между собой.

Мы пришли такимъ образомъ къ чрезвычайно наглядному рѣшенію этого вопроса, которое обыкновенно получается при помощи весьма абстрактныхъ соображеній.

Здѣсь я хочу кстати остановиться на такъ называемой „великой теоремѣ Ферма“. Я поступлю совершенно въ духѣ древнихъ геометровъ, если перенесу вопросъ о пиѳагоровыхъ числахъ, принаровленный въ обыкновенной его постановкѣ къ плоскости, въ пространство 3-хъ и болѣе высокаго числа измѣреній, и именно слѣдующимъ образомъ: возможно ли, чтобы сумма кубовъ двухъ цѣлыхъ чиселъ представляла собой полный кубъ?

или возможно ли, чтобы сумма четвертыхъ степеней представляла собой полную четвертую степень? Вообще, можетъ ли уравненіе

$$x^n + y^n = z^n$$

при любомъ цѣломъ n быть разрѣшено въ цѣлыхъ числахъ? Ферма далъ отрицательный отвѣтъ на этотъ вопросъ; отвѣтъ этотъ заключается въ слѣдующей теоремѣ, носящей имя ея автора: уравненіе

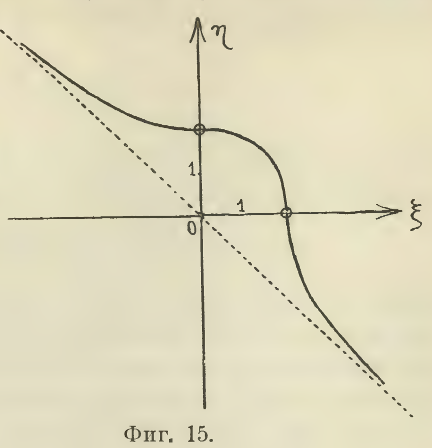
$$x^n + y^n = z^n$$

не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній ни при какомъ n, большемъ 2.

Позвольте мнѣ начать съ нѣкоторыхъ историческихъ свѣдѣній. Ферма жилъ отъ 1608 до 1665 года и былъ въ Тулузѣ совѣтникомъ парламента,— стало быть, юристомъ. Но онъ много занимался математическими вопросами и при томъ настолько плодотворно, что его слѣдуетъ отнести къ числу величайшихъ математиковъ. Ферма можетъ быть вполнѣ заслуженно отнесенъ къ числу основателей аналитической геометріи, исчисленія безконечно малыхъ и теоріи вѣроятностей; но особенно важное значеніе имѣютъ его труды въ области теоріи чиселъ. Однако, всѣ результаты, полученные имъ въ этой области, оставлены имъ въ видѣ помѣтокъ на поляхъ экземпляра Діофанта, знаменитаго античнаго математика, написавшаго книгу по теоріи чиселъ около 300-го года по Р. Хр., т. е. приблизительно черезъ 600 лѣтъ послѣ Евклида. Эти замѣтки Ферма были опубликованы его сыномъ лишь черезъ 5 лѣтъ послѣ его смерти; онъ самъ при жизни ихъ не печаталъ. Среди этихъ замѣтокъ имѣется также и „великая теорема“, о которой теперь идетъ рѣчь, съ припиской: я нашелъ „воистину удивительное доказательство, но за недостаткомъ мѣста не могу его здѣсь привести“ *). Однако, по настоящее время не удалось найти доказательства этого предложенія.

*) См. изданіе сочиненій Ферма Парижской Академіи—„Oeuvres de Fermat“, т. III, (Paris, 1896), p. 241.

Чтобы нѣсколько ближе оріентироваться въ содержаніи этой теоремы Ферма, мы, какъ и въ случаѣ $n = 2$, попытаемся сначала найти раціональныя рѣшенія уравненія



Фиг. 15.

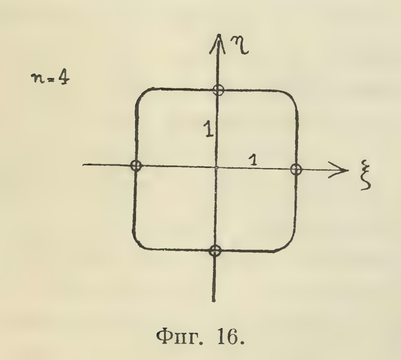
$$\xi^n + \eta^n = 1;$$

т. е. постараемся выяснить себѣ положеніе выражаемой этимъ уравненіемъ кривой относительно раціональныхъ точекъ плоскости. Фигуры 15 и 16 приблизительно изображаютъ кривыя, соотвѣтствующія значеніямъ $n = 3$ и $n = 4$. Онѣ, во всякомъ случаѣ, содержатъ точки

$$\xi = 0,\ \eta = 1 \text{ и } \xi = 1,\ \eta = 0$$

и соотвѣтственно точки

$$\xi = 0,\ \eta = \pm 1 \text{ и } \xi = \pm 1,\ \eta = 0.$$



Фиг. 16.

Утвержденіе Ферма сводится, такимъ образомъ, къ тому, что эти кривыя въ противоположность разсмотрѣннной выше окружности извиваются въ сгущенномъ комплексѣ раціональныхъ точекъ, не проходя ни черезъ одну точку комплекса, кромѣ упомянутыхъ выше.

Интересъ этого предложенія заключается прежде всего въ томъ, что полнаго его доказательства до сихъ поръ никому не удалось найти, несмотря на всѣ употребленныя къ этому усилія. Что касается попытокъ доказательства этого предложенія, то здѣсь на первомъ мѣстѣ приходится назвать Куммера (Kummer), существенно подвинувшаго вопросъ впередъ. Куммеръ привелъ этотъ вопросъ въ связь съ теоріей алгебраи-

ческихъ чиселъ, въ частности, съ числами, къ которымъ приводитъ задача о дѣленіи окружности на равныя части. Пользуясь корнемъ n-той степени изъ единицы

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n};$$

можно разложить разность $z^n - y^n$ на линейныхъ множителей; уравненіе Ферма принимаетъ тогда видъ:

$$x^n = (z-y)(z-\varepsilon y)(z-\varepsilon^2 y)\ldots\ (z-\varepsilon^{n-1}y);$$

иными словами, n-тая степень числа должна разлагаться на множителей, которые указаннымъ выше способомъ составляются изъ чиселъ y и z и изъ числа ε. Для такого рода чиселъ Куммеръ построилъ теоріи, совершенно аналогичныя тѣмъ, которыя издавна извѣстны для цѣлыхъ чиселъ: онъ построилъ понятіе о дѣлимости этихъ чиселъ, о разложеніи числа на простыхъ множителей и т. д. Сообразно этому мы говоримъ теперь о цѣлыхъ алгебраическихъ числахъ и, въ частности, о цѣлыхъ числахъ, къ которымъ приводитъ задача о дѣленіи окружности на равныя части. Съ точки зрѣнія Куммера предложеніе Ферма является теоремой о разложеніи на множителей въ области чиселъ ε *). Исходя изъ этихъ соображеній, онъ и пытается доказать теорему. Это ему дѣйствительно удалось для значительнаго большинства значеній показателя n; въ частности, напримѣръ, предложеніе имъ доказано для всѣхъ показателей, которые меньше 100. Но между большими числами оказываются исключенія, освободиться отъ которыхъ не удалось ни ему ни крупнѣйшимъ математикамъ, слѣдовавшимъ его пути. Я вынужденъ здѣсь естественно ограничиться этими указаніями; подробности о состояніи этой задачи вы найдете въ „Математической Энциклопедіи", въ концѣ реферата Гильберта „О теоріи алгебраическихъ чиселъ". Гильбертъ самъ принадлежитъ къ числу тѣхъ, которые продолжали и развили изслѣдованія Куммера.

---

*) Область цѣлыхъ чиселъ ε есть совокупность всѣхъ чиселъ вида

$$a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \cdots + a_{n-1}\varepsilon^{n-1},$$

гдѣ ε есть указанный выше корень n-ой степени изъ 1.

Врядъ ли можно сомнѣваться, что „удивительное“ доказательство Ферма не падало въ эту область идей. Трудно думать, чтобы онъ владѣлъ операціями надъ алгебраическими числами въ ту пору, когда относительно мнимыхъ чиселъ математики еще не были достаточно оріентированы,—когда была еще въ зачаточномъ состояніи самая теорія чиселъ, которая именно благодаря глубокимъ изслѣдованіямъ Ферма получила импульсъ къ дальнѣйшему развитію. Съ другой стороны, очень мало вѣроятно, чтобы такой математикъ, какъ Ферма, въ своемъ доказательствѣ допустилъ ошибку, хотя такого рода случаи и бывали у величайшихъ математиковъ. Нужно думать поэтому, что онъ нашелъ доказательство благодаря какой-либо особенно удачной, простой идеѣ. Но такъ какъ мы не имѣемъ никакихъ указаній, которыя позволили бы доискаться этой идеи, то полнаго доказательства теоремы Ферма можно, повидимому, ожидать только путемъ систематическаго развитія работъ Куммера.

Эти вопросы въ настоящее время особенно привлекаютъ вниманіе потому, что Гёттингенское Ученое Общество располагаетъ въ настоящее время преміей въ 100 000 марокъ за разрѣшеніе задачи Ферма. Это есть завѣщаніе скончавшагося около года тому назадъ математика Вольфскеля изъ Дармштадта, который, вѣроятно, всю жизнь занимался этимъ вопросомъ и оставилъ часть своего громаднаго состоянія счастливцу, которому удастся либо доказать это предложеніе во всей его общности, либо опровергнуть его однимъ противорѣчащимъ ему примѣромъ. Однако, разыскать такой примѣръ, конечно, не легко, такъ какъ для показателей, не превышающихъ ста, теорема уже доказана, и здѣсь приходится, такимъ образомъ, оперировать надъ чрезвычайно большими числами. Что долженъ думать о трудности получить эту премію математикъ, знакомый съ усиліями Куммера и его послѣдователей, это ясно изъ изложеннаго мною выше; но большая публика другого мнѣнія объ этомъ предметѣ. Въ концѣ лѣта этого года извѣстіе о преміи было распространено газетами (которыя, впрочемъ, не были къ тому уполномочены); съ этого времени у насъ накопился уже цѣлый складъ доказательствъ. Люди всѣхъ профессій—инженеры, народные учителя, священники, банкиры, дамы и т. д.

— являются авторами этихъ работъ. Общее во всѣхъ этихъ работахъ лишь то, что ихъ авторы не имѣютъ ни малѣйшаго представленія о серьезномъ математическомъ значеніи проблемы; они не дѣлаютъ даже ни малѣйшей попытки освѣдомиться въ литературѣ вопроса и всегда стараются справиться съ задачей какой-либо необычайной идеей и, конечно, неизмѣнно попадаютъ въ просакъ. Не могу отказать себѣ въ томъ, чтобы привести особенно разительный примѣръ изъ этого вороха нелѣпостей. Человѣкъ, не знающій значенія знака $>$, вмѣсто

$$x^n + y^n = z^n \; (n > 2)$$

читаетъ:

$$x^n + y^n = z^n \; (n + 2)$$

и, конечно, уже при $n = 1$ находитъ рѣшеніе уравненія

$$x + y = z \,.\, 3.$$

Это открытіе онъ шлетъ Гётингенскому Ученому Обществу и считаетъ математиковъ такими глупцами, которые способны за это дать такую премію.

Теперь обратимся къ восьмому изъ перечисленныхъ выше пунктовъ, именно: къ задачѣ о дѣленіи окружности на равныя части. Я буду при этомъ принимать, что дѣйствія надъ комплексными числами вида $x + yi$ и изображеніе ихъ на такъ называемой „комплексной плоскости“ всѣмъ вамъ уже извѣстны. Итакъ, задача заключается въ томъ, чтобы раздѣлить окружность на n равныхъ частей или построить правильный n-угольникъ. Мы отождествимъ эту окружность съ окружностью, описанной радіусомъ, равнымъ единицѣ, изъ нулевой точки комплексной плоскости, и примемъ точку $x + yi = 1$ за первую изъ n точекъ дѣленія; тогда комплексныя числа, соотвѣтствующія остальнымъ вершинамъ, имѣютъ видъ (фиг. 17):

$$z = x + yi = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi}{n}i} \quad (k = 0, 1 \ldots, n-1).$$

Они удовлетворяютъ поэтому уравненію:

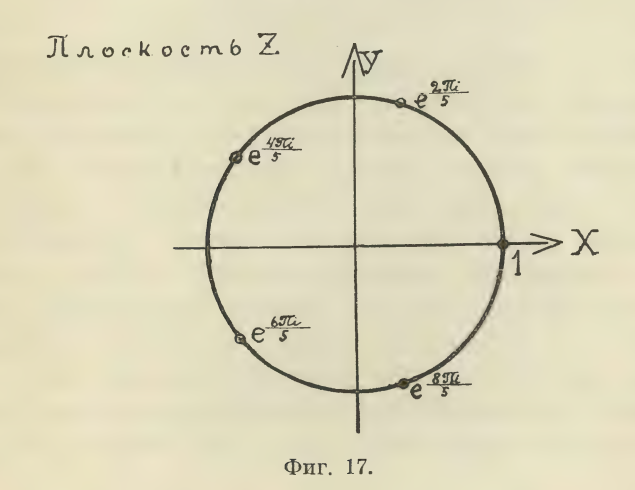
$$z^n = 1,$$

и задача о дѣленіи окружности на равныя части сводится къ рѣшенію этого простѣйшаго алгебраическаго уравненія. Такъ какъ это уравненіе постоянно имѣетъ раціональный корень $z = 1$, то двучленъ $z^n - 1$ дѣлится на $z - 1$, и потому мы для остальныхъ корней получаемъ уравненіе:

$$z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \cdots + z^2 + z + 1 = 0.$$

Это есть уравненіе $(n-1)$-ой степени, въ которомъ всѣ коэффиціенты равняются 1.

Уже въ глубокой древности вызывалъ большой интересъ вопросъ о томъ, какіе правильные многоугольники



Фиг. 17.

можно построить циркулемъ и линейкой. Въ древности же было уже извѣстно, что при $n = 2^h$, 3, 5 (гдѣ h есть произвольное цѣлое число), а также для составныхъ значеній: $n = 2^h . 3$, $n = 2^h . 5$, $n = 2^h . 3 . 5$, эта задача рѣшается; на этомъ пунктѣ вопросъ остановился вплоть до конца восемнадцатаго столѣтія, когда имъ занялся молодой Гауссъ. Онъ нашелъ, что для всѣхъ простыхъ значеній n, имѣющихъ видъ

$$n = 2^{(2^\mu)} + 1,$$

возможно дѣленіе окружности на равныя части циркулемъ и линейкой; при другихъ же значе-

ніяхъ оно невозможно. И дѣйствительно, первыя значенія $\mu = 0, 1, 2, 3$ даютъ въ этой формулѣ простыя числа: 3, 5, 17, 257. Изъ нихъ первые два случая были уже хорошо извѣстны раньше, а остальные являются новыми. Особенно знаменитъ правильный семнадцатиугольникъ, построяемость котораго посредствомъ циркуля и линейки была въ этомъ сочиненіи въ первый разъ обнаружена. Впрочемъ, общій вопросъ о томъ, при какихъ значеніяхъ показателя μ предыдущая формула даетъ простыя числа, остается и по сей день нерѣшеннымъ. Я и здѣсь не буду останавливаться на деталяхъ, а предпочту изложить въ общихъ чертахъ ходъ и значеніе этого открытія; подробности же относительно правильнаго семнадцатиугольника вы найдете въ книгѣ Вебера-Вельштейна.

По этому поводу я считаю необходимымъ особенно обратить ваше вниманіе на „Дневникъ" Гаусса, опубликованный въ 57 томѣ журнала „Mathematische Annalen". Это небольшая, невзрачная тетрадка, которую Гауссъ началъ вести съ 1796 года, незадолго передъ тѣмъ, какъ ему исполнилось 19 лѣтъ. Какъ разъ первая запись относится къ вопросу о возможности построенія правильнаго семнадцатиугольника. Сдѣлавъ такъ рано это важное открытіе, Гауссъ принялъ окончательное рѣшеніе посвятить себя математикѣ. Всякому математику будетъ очень интересно просмотрѣть этотъ дневникъ, такъ какъ здѣсь можно прослѣдить и за дальнѣйшими выдающимися работами Гаусса, относящимися къ теоріи чиселъ, къ теоріи эллиптическихъ функцій и т. д.

Въ первый разъ это первое крупное открытіе Гаусса было опубликовано въ видѣ краткаго сообщенія въ „Jenaer Literaturzeitung" отъ перваго іюня 1796 года. Это было сдѣлано по почину учителя и покровителя Гаусса, Циммермана изъ Брауншвейга, который помѣстилъ также и отъ себя коротскую замѣтку объ этой статьѣ*). Доказательство Гауссъ далъ въ своемъ основномъ сочиненіи по теоріи чиселъ „Disquisitiones arithmeticae", опубликованномъ въ 1801 году.

*) Эта замѣтка также перепечатана въ 57 томѣ „Mathematische Annalen".

Здѣсь мы находимъ также и вторую, отрицательную часть предложенія, которой въ упомянутой замѣткѣ не было, именно, что для другихъ простыхъ чиселъ, которыя не могутъ быть приведены къ виду $2^{(2^\mu)}+1$, дѣленіе окружности на равныя части не можетъ быть произведено циркулемъ и линейкой. Я хочу разсмотрѣть здѣсь одинъ частный случай этого важнаго доказательства невозможности, тѣмъ болѣе, что въ большой математической публикѣ имѣютъ очень мало представленія о доказательствахъ невозможности вообще. Современной математикѣ удалось при помощи такого рода доказательствъ невозможности исчерпать цѣлый рядъ знаменитыхъ проблемъ, надъ которыми съ древнихъ временъ тщетно трудились многіе выдающіеся математики. Достаточно указать на задачи: о построеніи правильнаго семиугольника, о трисекціи угла и квадратурѣ круга. При всемъ томъ имѣется много людей, которые и по сей день занимаются этими задачами, не только не имѣя никакого представленія о высшей математикѣ, но и не зная даже постановки вопроса о доказательствѣ невозможности; сообразно своимъ познаніямъ, ограничивающимся обыкновенно элементарной геометріей, они обыкновенно пытаются преодолѣть затрудненія вспомогательными прямыми и окружностями и, въ концѣ концовъ, нагромождаютъ ихъ въ такомъ количествѣ, что никто не въ состояніи разобраться въ получающейся путаницѣ и непосредственно показать автору его ошибку. Вы напрасно будете ссылаться на существующее доказательство невозможности, такъ какъ на этихъ людей въ лучшемъ случаѣ можно повліять только прямымъ указаніемъ допущенной ими ошибки. Каждый сколько-нибудь извѣстный математикъ каждый годъ получаетъ цѣлую уйму такого рода посланій; и вы будете получать такія доказательства въ большомъ количествѣ, когда будете стоять у дѣла. Очень хорошо, чтобы вы впередъ были готовы къ этимъ переживаніямъ и знали, какъ себя въ этомъ отношеніи держать. Я полагаю поэтому, что вамъ будетъ полезно ознакомиться съ однимъ изъ такихъ доказательствъ невозможности въ простѣйшей формѣ.

Вотъ я и хочу изложить вамъ теперь подробное доказательство того, что правильный семиугольникъ не можетъ быть построенъ циркулемъ и линейкой. Извѣстно, что каждое постро-

еніе, производимое циркулемъ и линейкой, при переходѣ къ вычисленію эквивалентно цѣлому ряду послѣдовательныхъ извлеченій квадратнаго корня и что, обратно, каждое такое квадраторадикальное выраженіе можетъ быть осуществимо геометрически пересѣченіемъ прямыхъ и окружностей. Это вы и сами себѣ легко уясните. Поэтому наше утвержденіе мы можемъ аналитически формулировать такъ, что уравненіе шестой степени:

$$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0,$$

характерное для правильнаго семиугольника, не можетъ быть разрѣшено при помощи конечнаго числа квадратныхъ корней. Но это такъ называемое возвратное уравненіе, которое одновременно съ каждымъ корнемъ z имѣетъ еще корень $\frac{1}{z}$. Это и будетъ тотчасъ видно, если мы напишемъ уравненіе въ такомъ видѣ:

$$z^3+z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}=0. \qquad (1)$$

Степень такого уравненія можетъ быть сразу понижена вдвое, если положить $z+z^{-1}=x$ и принять x за новое неизвѣстное. Простое вычисленіе даетъ для x кубическое уравненіе

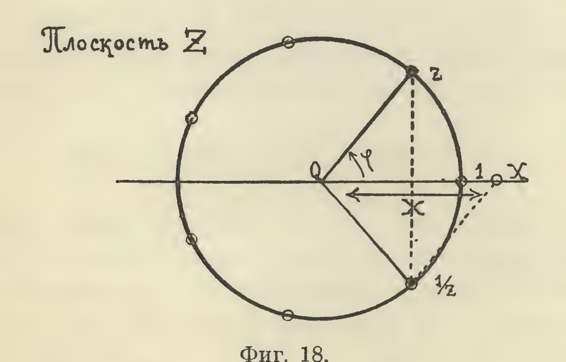
$$x^3+x^2-2x-1=0, \qquad (2)$$

и мы видимъ непосредственно, что уравненія (1) и (2) одновременно либо разрѣшаются въ квадратныхъ радикалахъ, либо не разрѣшаются. Впрочемъ, величину x можно привести въ непосредственную геометрическую связь съ построеніемъ правильнаго семиугольника. Изъ фигуры 18-ой, изображающей въ комплексной плоскости, окружность радіуса, равнаго единицѣ, легко усмотрѣть слѣдующее: если мы обозначимъ черезъ $\varphi=\frac{2\pi}{7}$ центральный уголъ правильнаго семиугольника и примемъ во вниманіе, что $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$ и $z^{-1}=\cos\varphi-i\sin\varphi$ суть двѣ вершины, смежныя съ вершиной $z=1$, то окажется, что $x=2\cos\varphi$; поэтому по данному значенію x легко построить семиугольникъ.

Намъ остается обнаружить, что кубическое уравненіе (2) не разрѣшается въ квадратныхъ радикалахъ. Это доказательство распадается на ариѳметическую и алгебраическую части; мы начнемъ съ первой части, которая естественно примыкаетъ къ тѣмъ вопросамъ теоріи чиселъ, которыми мы здѣсь занимаемся. Мы обнаружимъ прежде всего, что кубическое уравненіе (2) неприводимо, т. е. что его лѣвая часть не можетъ быть разбита на двухъ множителей съ раціональными коэффиціентами. Замѣтимъ прежде всего, что полиномъ третьей степени, если онъ разлагается на множителей, необходимо имѣетъ линейнаго множителя, и потому разложеніе должно имѣть видъ:

$$x^3+x^2-2x-1=(x^2+\beta x+\gamma)(x+\alpha\ ;$$

намъ нужно поэтому доказать, что такое разложеніе не можетъ имѣть мѣста.



Фиг. 18.

Первый существенный шагъ въ этомъ доказательствѣ заключается въ томъ, чтобы обнаружить, что при наличности такого раціональнаго разложенія коэффиціенты α, β, γ необходимо должны быть цѣлыми числами. Это есть частный случай слѣдующаго общаго предложенія, доказаннаго Гауссомъ въ „Disquisitiones arithmeticae“: если полиномъ вида

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

съ цѣлыми коэффиціентами a распадается на про-

изведеніе двухъ полиномовъ вида

$$\varphi(x) = x^{\nu} + b_1 x^{\nu-1} + \cdots + b_{\nu}$$

съ раціональными коэффиціентами b, то послѣдніе необходимо представляютъ собой цѣлыя числа. Мы проведемъ, однако, здѣсь доказательство только въ примѣненіи къ тому частному случаю, который насъ здѣсь занимаетъ, тѣмъ болѣе, что всегда бываетъ полезно детально продумать такого рода общее предложеніе на опредѣленномъ примѣрѣ.

Мы начнемъ съ того, что приведемъ три дроби α, β, γ къ общему знаменателю n и сообразно этому напишемъ разложеніе въ самомъ общемъ случаѣ въ видѣ:

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = \left(x^2 + \frac{b}{n}\,x + \frac{c}{n}\right)\left(x + \frac{a}{n}\right), \qquad (3)$$

гдѣ a, b, c, n суть цѣлыя числа. Нужно показать, что $\frac{a}{n}$, $\frac{b}{n}$, $\frac{c}{n}$ суть числа цѣлыя, т. е. что числа a, b, c всѣ кратны n. Но, если мы раскроемъ скобки и сравнимъ полученное выраженіе съ лѣвой частью, то мы прежде всего увидимъ, что три выраженія

$$\frac{a+b}{n} \;(4a), \quad \frac{ab}{n^2} + \frac{c}{n} \;(4b), \quad \frac{ac}{n} \;(4c)$$

необходимо должны быть цѣлыми числами. Здѣсь прежде всего естественно приходитъ въ голову мысль вмѣсто n разсмотрѣть какого-либо его простого множителя ν; положимъ, что ν входитъ въ составъ n съ показателемъ k, такъ что $n = n_1 \nu^k$, гдѣ n_1 есть цѣлое число, которое уже на ν не дѣлится. Умноживъ выраженія (4) на n_1 или соотвѣтственно на $n_1{}^2$, мы приходимъ къ заключенію, что

$$\frac{a+b}{\nu^k} \;(5a), \quad \frac{ab}{\nu^{2k}} + \frac{cn_1}{\nu^k} \;(5b), \quad \frac{ac}{\nu^{2k}} \;(5c)$$

суть цѣлыя числа. Если бы намъ удалось отсюда вывести, что

числа a, b, c также дѣлятся на ν^k, $\qquad (6)$

то мы могли бы сократить числителей и общаго знаменателя на

общаго множителя ν^k и освободить знаменателя n въ разложеніи (3) отъ этого простого множителя. Послѣ этого мы могли бы съ остающимся знаменателемъ n_1 поступить совершенно такъ же; такимъ образомъ было бы доказано, что всѣ простые множители числа n входятъ также въ составъ числителей a, b, c, и наше предложеніе будетъ такимъ образомъ доказано.

Чтобы доказать предложеніе (6), допустимъ, что a дѣлится только на низшую степень простого числа ν, скажемъ на ν^{k_1}, гдѣ $0 \leqslant k_1 < k$. Выраженіе (5c) обнаруживаетъ тогда, что c во всякомъ случаѣ дѣлится на ν^k и даже на болѣе высокую степень того же простого множителя; иначе произведеніе ac не могло бы раздѣлиться на ν^{2k}, такъ какъ $2k$ больше, чѣмъ $k+k_1$. Поэтому въ выраженіи (5b) второе слагаемое есть цѣлое число, а потому и первое слагаемое $\frac{ab}{\nu^{2k}}$ должно быть цѣлымъ числомъ. Разсужденіе, которымъ мы только-что пользовались, теперь обнаружитъ, что b дѣлится на ν^k. Но въ такомъ случаѣ выраженіе (5a) обнаружитъ, что и a должно дѣлиться на ν^k, а это находится въ противорѣчіи со сдѣланнымъ выше допущеніемъ.

Итакъ, сдѣланное допущеніе неправильно, т. е. a необходимо должно дѣлиться на ν^k. Но тогда выраженіе (5a) опять-таки обнаруживаетъ, что b дѣлится на ν^k. Теперь въ выраженіи (5b) ab дѣлится на ν^{2k}, а потому второе слагаемое также должно быть цѣлымъ числомъ; поэтому cn_1 дѣлится на ν^k, а такъ какъ число n_1, по предположенію, простого множителя ν не содержитъ, то c дѣлится на ν^k. Такимъ образомъ, предложеніе (6) доказано, а вмѣстѣ съ тѣмъ доказана и теорема Гаусса для нашего частнаго случая.

Итакъ, намъ остается только обнаружить невозможность разложенія

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = (x^2 + \beta x + \gamma)(x + \alpha), \tag{7}$$

если α, β, γ суть цѣлыя числа. Для этого достаточно приравнять соотвѣтствующіе коэффиціенты обѣихъ частей равенства. Прежде всего ясно, что $\alpha\gamma = -1$. Такое разложеніе единицы въ произведеніе двухъ цѣлыхъ чиселъ возможно только въ томъ случаѣ,

если $\alpha = \pm 1$ и $\gamma = \mp 1$. Но въ такомъ случаѣ правая часть равенства (7) обращалась бы въ нуль при $x = -\alpha = \mp 1$; между тѣмъ лѣвая часть, очевидно, не обращается въ нуль ни при $x = -1$, ни при $x = +1$. Такимъ образомъ, мы снова пришли къ противорѣчію, которое теперь окончательно обнаруживаетъ невозможность цѣлочисленнаго разложенія въ видѣ равенства (7). Слѣдовательно, невозможно и разложеніе этого многочлена на множителей съ раціональными коэффиціентами, а, стало быть, доказана неприводимость кубическаго уравненія (2).

Вторая часть доказательства должна теперь заключаться въ томъ, чтобы обнаружить, что неприводимое кубическое уравненіе съ раціональными коэффиціентами не можетъ быть разрѣшено при помощи квадратныхъ радикаловъ. Эта часть доказательства имѣетъ существенно алгебраическій характеръ; однако, для цѣльности изложенія мы приведемъ его здѣсь. Мы дадимъ нашему предложенію нѣсколько иное и именно положительное выраженіе: Если уравненіе 3-ей степени съ раціональными коэффиціентами

$$f(x) \equiv x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad (8)$$

рѣшается въ квадратныхъ радикалахъ, то оно необходимо имѣетъ раціональный корень, а потому будетъ приводимымъ; въ самомъ дѣлѣ, существованіе раціональнаго корня α равносильно тому, что функція $f(x)$ имѣетъ раціональнаго множителя $x - \alpha$.

Этому доказательству необходимо предпослать классификацію всѣхъ выраженій, составленныхъ изъ квадратныхъ радикаловъ, — вѣрнѣе сказать: всѣхъ выраженій, составленныхъ изъ конечнаго числа квадратныхъ корней и раціональныхъ чиселъ при помощи раціональныхъ операцій; напримѣръ:

$$\alpha = \frac{\sqrt{a + \sqrt{b} + \sqrt{c}}}{\sqrt{d + \sqrt{e + \sqrt{f}}}},$$

гдѣ $a, b, \ldots, f$ суть раціональныя числа, есть такого рода выраженіе. Мы здѣсь, естественно, имѣемъ въ виду только такіе радикалы, въ которыхъ нельзя произвести точнаго извлеченія корня. Эта классификація составляетъ важнѣйшій пунктъ всего разсужденія.

Каждое выраженіе такого рода представляетъ собой раціональную функцію нѣкотораго числа квадратныхъ радикаловъ, въ нашемъ примѣрѣ трехъ. Мы обратимся прежде всего къ одному изъ этихъ радикаловъ, который можетъ имѣть, впрочемъ, сколько угодно сложное строеніе. Подъ порядкомъ такого радикала мы будемъ разумѣть число входящихъ въ его составъ и стоящихъ одинъ внутри другого радикаловъ. Такимъ образомъ, въ предыдущемъ выраженіи знаменателемъ служитъ радикалъ 3-го порядка, въ числителѣ же первый радикалъ имѣетъ порядокъ 2, второй — порядокъ 1.

Въ произвольномъ квадрато-радикальномъ выраженіи (т. е. въ выраженіи, составленномъ изъ квадратныхъ радикаловъ) мы по этому правилу устанавливаемъ числа, выражающія порядокъ отдѣльныхъ „простыхъ квадрато-радикальныхъ выраженій", изъ которыхъ уже составляется раціонально все наше выраженіе и которыя не сводятся къ радикаламъ низшаго порядка; наибольшее изъ этихъ чиселъ μ принимается за порядокъ всего выраженія. Въ нашемъ примѣрѣ $\mu = 3$. Однако, въ составъ нашего выраженія можетъ входить нѣсколько „простыхъ квадрато-радикальныхъ выраженій" порядка μ; число ихъ n, такъ называемое „число членовъ" радикальнаго выраженія, мы примемъ за второе характерное число нашего выраженія. При этомъ предполагается, что ни одно изъ этихъ n простыхъ выраженій μ-го порядка не выражается черезъ остальные съ помощью выраженій низшаго порядка*). Такъ, напримѣръ, въ выраженіи перваго порядка

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$$

*) Т. е. не выражается черезъ остальные радикалы μ-го порядка съ коэффиціентами низшаго порядка.

число радикальныхъ членовъ есть 2, а не 3, потому что $\sqrt{6}=\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3}$. Въ приведенномъ выше выраженіи a 3-го порядка число членовъ равно 1.

Такимъ образомъ, каждому квадрато-радикальному выраженію мы отнесли 2 конечныхъ числа μ и n, которые мы въ видѣ символа (μ, n) будемъ называть характеристикой или рангомъ выраженія. Изъ двухъ квадрато-радикальныхъ выраженій различнаго порядка мы припишемъ низшій рангъ тому, которое имѣетъ низшій порядокъ; изъ двухъ же выраженій одинаковаго порядка мы припишемъ низшій рангъ тому, которое имѣетъ меньше членовъ. Такимъ образомъ, выраженіями самого низшаго ранга являются тѣ, которымъ соотвѣтствуетъ порядокъ 0, — т. е. раціональныя числа.

Предположимъ теперь, что корень x_1 кубическаго уравненія (8) можетъ быть выраженъ черезъ квадратные радикалы и именно можетъ быть представленъ выраженіемъ ранга (μ, n). Выдѣляя одинъ изъ n членовъ μ-го порядка $\sqrt{R}$, мы можемъ написать этотъ корень въ видѣ:

$$x_1=\frac{\alpha+\beta\sqrt{R}}{\gamma+\delta\sqrt{R}},$$

гдѣ каждое изъ выраженій α, β, γ, δ содержитъ уже не болѣе $n-1$ членовъ μ-го порядка, а R есть выраженіе $(\mu-1)$-го порядка. Съ другой стороны, выраженіе $\gamma-\delta\sqrt{R}$, во всякомъ случаѣ, отлично отъ 0: иначе радикалъ $\sqrt{R}$ былъ бы равенъ γ/δ, т. е. выражался бы раціонально черезъ остальные $(n-1)$ членовъ μ-го порядка, фигурирующіе въ выраженіи x_1, а потому былъ бы лишнимъ радикаломъ: отъ него можно было бы освободиться. Мы можемъ поэтому помножить числителя и знаменателя дроби x_1 на $\gamma-\delta\sqrt{R}$ и тогда получимъ:

$$x_1=\frac{(\alpha+\beta\sqrt{R})(\gamma-\delta\sqrt{R})}{\gamma^2-\delta^2 R}=P+Q\sqrt{R},$$

гдѣ P и Q суть раціональныя функціи отъ α, β, γ, δ и R, а поэтому содержатъ не болѣе $n-1$ членовъ μ-го порядка или же содержатъ только члены болѣе низкаго порядка; эти выра-

женія имѣютъ поэтому рангъ не выше $(\mu, n-1)$. Если вставимъ это выраженіе въ уравненіе (8), то мы получимъ:

$$f(x_1) \equiv (P + Q\sqrt{R})^3 + A(P + Q\sqrt{R})^2 +$$
$$+ B(P + Q\sqrt{R}) + C = 0.$$

Выполнивъ всѣ возвышенія въ степень, мы приведемъ это соотношеніе къ виду:

$$f(x_1) = M + N\sqrt{R} = 0,$$

гдѣ M, N суть полиномы, зависящіе отъ P, Q, R, т. е. раціональныя функціи отъ α, β, γ, δ, R. Если бы N было отлично отъ нуля, то мы получили бы $\sqrt{R} = -\frac{M}{N}$, т. е. этотъ радикалъ выражался бы раціонально черезъ α, β, γ, δ и R, т. е. maximum черезъ $(n-1)$ членовъ μ-го порядка и черезъ члены $(\mu-1)$-аго порядка; но это, какъ мы уже указали выше, мѣста имѣть не можетъ. Отсюда слѣдуетъ, что необходимо $N=0$, а потому и $M=0$. Отсюда мы заключаемъ далѣе, что и

$$x_2 = P - Q\sqrt{R}$$

есть корень нашего кубическаго уравненія; въ самомъ дѣлѣ, совершенно ясно, что

$$f(x_2) = M - N\sqrt{R} = 0.$$

Но теперь доказательство быстро и очень любопытно заканчивается. Если x_3 есть третій корень уравненія, то, какъ извѣстно,

$$x_1 + x_2 + x_3 = -A,$$
$$x_3 = -A - (x_1 + x_2) = -A - 2P.$$

Это выраженіе имѣетъ тотъ же рангъ, что и P, т. е. низшій, чѣмъ x_1. Если x_3 есть уже раціональное число, то наша теорема доказана. Въ противномъ случаѣ мы можемъ сдѣлать этотъ корень точкой отправленія того же ряда разсужденій; тогда окажется, что болѣе высокій рангъ двухъ первыхъ корней могъ пред-

ставлять собой только иллюзію, такъ какъ одинъ изъ нихъ, во всякомъ случаѣ, долженъ имѣть еще низшій рангъ, нежели x_3. Продолжая это разсужденіе, мы все переходимъ отъ одного корня къ другому и всякій разъ убѣждаемся, что корень долженъ быть ступенью ниже. Вслѣдствіе этого мы, въ концѣ концовъ, необходимо должны придти къ корню порядка $\mu=0$, т. е. мы приходимъ къ заключенію, что наше уравненіе 3-ей степени дѣйствительно имѣетъ раціональный корень. Тогда мы уже не имѣемъ возможности вести то же разсужденіе дальше; два другихъ корня въ этомъ случаѣ либо также должны быть раціональными, либо должны имѣть видъ $P \pm Q\sqrt{R}$, гдѣ P, Q и R суть раціональныя числа. Но этимъ доказано, что функція $f(x)$ распадается на множителей, изъ которыхъ одинъ—первой, а другой—второй степени; это функція приводимая. Итакъ, никакое неприводимое уравненіе 3-ей степени, въ частности наше уравненіе правильнаго семиугольника, не рѣшается въ квадратныхъ радикалахъ. Этимъ доказано вмѣстѣ съ тѣмъ, что правильный семиугольникъ не можетъ быть построенъ циркулемъ и линейкой.

Вы видите, какъ просто и наглядно проводится это доказательство и какъ мало познаній оно, собственно, предполагаетъ. Нѣкоторыя части доказательства, особенно разсужденія относительно классификаціи радикальныхъ выраженій, требуютъ довольно серьезной математической абстракціи. Я не берусь поэтому судить, можно ли это доказательство считать доказательствомъ достаточно простымъ, чтобы убѣдить профановъ, о которыхъ шла рѣчь выше, въ тщетности ихъ попытокъ найти элементарное рѣшеніе задачи. Все же, мнѣ кажется, слѣдуетъ всякій разъ дѣлать попытку медленно и подробно выяснить имъ доказательство.

Въ заключеніе я хочу еще привести нѣкоторую литературу, относящуюся частью къ вопросу о правильныхъ многоугольникахъ, частью же къ вопросу о выполнимости геометрическихъ построеній вообще. Въ первую очередь приходится указать опять на „Энциклопедію Элементарной Математики“ Вебера и Вельштейна, т. I. (гл. XVIII и XX), а затѣмъ на небольшой сборникъ „Лекціи по избраннымъ вопросамъ элемен-

тарной геометрiи" *), который я выпустилъ въ 1895 г. по поводу съѣзда старшихъ преподавателей въ Гёттингенѣ. Книжка эта, однако, уже вышла изъ продажи. Вмѣсто нея могу указать недавно выпущенный въ Болоньѣ Энрикесомъ сборникъ подъ общимъ заглавiемъ „Вопросы элементарной геометрiи" **), который орiентируетъ васъ въ этихъ вопросахъ.

Этимъ я заканчиваю обзоръ вопросовъ, относящихся къ теорiи чиселъ, оставляя послѣднiй изъ нихъ, — доказательство трансцендентности чиселъ къ концу лекцiй.

Мнѣ остается разсмотрѣть послѣднюю ступень въ дѣлѣ расширенiя понятiя о числѣ.

---

*) F. Klein. „Vorträge über ausgewahlte Fragen der Elementargeometrie", ausgearbeitet von F Tägert. Leipzig. 1895. Имѣется русскiй переводъ подъ указаннымъ въ текстѣ заглавiемъ, изданный Казанскимъ физико-математическимъ обществомъ въ 1898 г.

**) F. Enriques. „Questioni riguardanti la geometria elementare". Bologna, 1907. Нѣмецкiй переводъ выпущенъ Тейбнеромъ подъ заглавiемъ „Fragen der Elementargeometrie".

IV. Комплексныя числа.

1. Обыкновенныя комплексныя числа.

Позвольте мнѣ предпослать нѣсколько историческихъ указаній о развитіи этихъ чиселъ. Впервые мнимыя числа появляются въ 1545 г. у Кардано (Cardano), но и то случайно, при рѣшеніи кубическаго уравненія. Относительно ихъ дальнѣйшаго развитія можно повторить замѣчаніе, сдѣланное нами по поводу отрицательныхъ чиселъ: помимо и даже противъ воли того или другого математика, мнимыя числа снова и снова появляются при выкладкахъ, и лишь постепенно, по мѣрѣ того, какъ обнаруживается польза отъ ихъ употребленія, они получаютъ все болѣе и болѣе широкое распространеніе.

Конечно, математики дѣлали это не съ легкимъ сердцемъ; мнимыя числа долго сохраняли нѣсколько мистическую окраску, какую они и теперь еще имѣютъ въ глазахъ ученика, который впервые слышитъ объ этомъ удивительномъ $i = \sqrt{-1}$. Для подтвержденія я хочу привести вамъ одну крайне характерную фразу Лейбница, относящуюся къ 1702 году; вотъ она: „Мнимыя числа это — прекрасное и чудесное убѣжище божественнаго духа, почти-что сочетаніе (amphibium) бытія съ небытіемъ". Въ XVIII вѣкѣ логическая сторона вопроса еще нисколько не выясняется; но благодаря Эйлеру устанавливается основное значеніе мнимыхъ чиселъ въ теоріи функцій: въ 1748 году Эйлеръ нашелъ удивительное соотношеніе:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

вскрывающее внутреннюю связь тѣхъ видовъ функціональной зависимости, которые встрѣчаются въ элементарномъ

анализѣ. Лишь XIX вѣкъ принесъ съ собой логически ясное пониманіе сущности комплексныхъ чиселъ. Здѣсь прежде всего надо указать на геометрическую интерпретацію, къ которой почти одновременно пришли многіе изслѣдователи на рубежѣ двухъ столѣтій. Достаточно будетъ указать на того, кто несомнѣнно наиболѣе глубоко проникъ въ сущность вопроса и дольше всѣхъ оказывалъ вліяніе на ученый міръ, на нашего Гаусса; уже въ 1797 году, какъ видно изъ упомянутаго выше его дневника, онъ вполнѣ владѣлъ этой интерпретаціей, но онъ опубликовалъ ее лишь гораздо позже. Вторымъ завоеваніемъ XIX столѣтія является созданіе чисто формальнаго обоснованія комплексныхъ чиселъ, которое сводитъ это ученіе къ теоріи вещественныхъ чиселъ; имъ мы обязаны англійскимъ математикамъ тридцатыхъ годовъ, о чемъ вы найдете болѣе подробныя свѣдѣнія въ цитированной уже книгѣ Ганкеля (Hankel, стр. 66).

Остановимся подробнѣе на этихъ двухъ способахъ обоснованія теоріи мнимыхъ чиселъ, господствующихъ по настоящее время. Станемъ сперва на чисто-формальную точку зрѣнія, согласно которой правильность образованія новыхъ понятій обусловливается не значеніемъ самихъ объектовъ, а отсутствіемъ внутренняго противорѣчія въ правилахъ дѣйствій. Съ этой точки зрѣнія введеніе комплексныхъ чиселъ представляется въ слѣдующемъ видѣ, свободномъ отъ всякихъ слѣдовъ чего-либо таинственнаго:

1) Комплексное число $x+iy$ есть соединеніе двухъ вещественныхъ чиселъ x, y въ одну числовую пару*), относительно которой принимаются слѣдующія положенія:

2) Два комплексныхъ числа $x+iy$, $x'+iy'$ считаются равными въ томъ и только въ томъ случаѣ, если $x=x'$, $y=y'$.

3) Сложеніе и вычитаніе опредѣляются такъ:

$$(x+iy)\pm(x'+iy')=(x\pm x')+i(y\pm y').$$

Легко видѣть, что при этихъ условіяхъ остаются въ силѣ всѣ правила сложенія, кромѣ закона монотонности,

*) Т. е. два числа x, y соединяются въ пару, которая изображается въ видѣ $x+iy$, гдѣ i есть символъ, отмѣчающій второй элементъ пары. *Прим. ред.*

который не можетъ быть сохраненъ въ старой формулировкѣ, такъ какъ комплексныя числа, по самой своей природѣ, не допускаютъ того простого расположенія въ рядъ по ихъ величинѣ, которое свойственно натуральнымъ и вообще вещественнымъ числамъ. Ради краткости я не вхожу въ разсмотрѣніе той измѣненной формы, которую приходится поэтому дать закону монотонности.

4) Что касается *умноженія*, то мы устанавливаемъ, что выкладки производятся такъ же, какъ съ обыкновенными буквами, но только при этомъ мы всегда *принимаемъ* $i^2 = -1$, такъ что, напримѣръ,

$$(x+iy)(x'+iy') = (xx'-yy')+i(xy'+x'y).$$

Въ результатѣ имѣютъ мѣсто, какъ нетрудно видѣть, *всѣ законы умноженія кромѣ закона монотонности.*

5) *Дѣленіе опредѣляется, какъ дѣйствіе, обратное умноженію*; въ частности

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2},$$

въ чемъ легко убѣдиться перемноженіемъ.

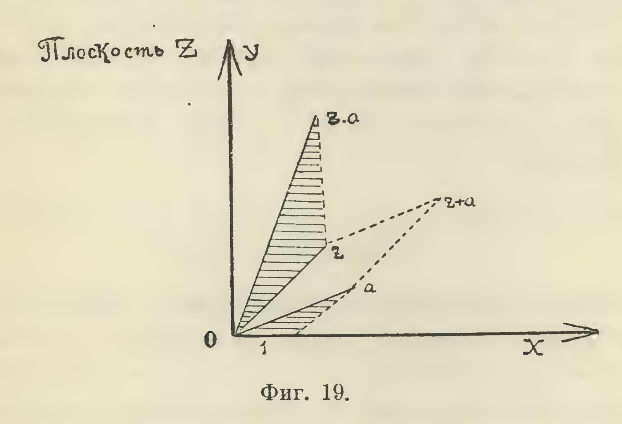
Это дѣйствіе выполнимо всегда, кромѣ случая $x=y=0$. т. е. *сохраняется невозможность дѣленія на нуль.*

Изъ всего этого слѣдуетъ, что *вычисленія съ комплексными числами не могутъ привести къ противорѣчіямъ, такъ какъ мы свели эти вычисленія цѣликомъ къ вещественнымъ числамъ и къ извѣстнымъ дѣйствіямъ надъ ними*, а эти послѣднія мы здѣсь будемъ считать свободными отъ противорѣчій.

Послѣ этихъ чисто формальныхъ разсужденій естественно возникаетъ вопросъ, не возможно ли такое *геометрическое или какое-нибудь другое наглядное толкованіе комплексныхъ чиселъ и операцій надъ ними*, которое давало бы въ то же время *наглядное обоснованіе отсутствія въ нихъ внутреннихъ противорѣчій.*

Всѣмъ вамъ извѣстно, — къ тому же мнѣ уже приходилось упоминать объ этомъ, — какимъ образомъ *совокупность*

точекъ $x|y$ плоскости въ системѣ координатъ x, y разсматриваютъ, какъ изображеніе совокупности комплексныхъ чиселъ $x+iy$. Сумма двухъ чиселъ $z+a$ получается тогда посредствомъ извѣстнаго построенія параллелограмма по соотвѣтствующимъ этимъ числамъ точкамъ и по началу координатъ O (фиг. 19), между тѣмъ какъ произведеніе $z.a$ получается при помощи точки-единицы 1 ($x=1, y=0$) посредствомъ построенія треугольника, подобнаго треугольнику $aO1$. Другими словами, сложеніе $z'=z+a$ изображается параллельнымъ перенесеніемъ плоскости въ себѣ самой, умноженіе $z'=z.a$—подобнымъ преобразованіемъ, т. е. вращеніемъ и растяженіемъ при неподвиж-



Фиг. 19.

номъ началѣ O. Расположеніе на плоскости точекъ, соотвѣтствующихъ числамъ, сразу показываетъ, чѣмъ слѣдуетъ замѣнить здѣсь правила монотонности вещественныхъ чиселъ. Этихъ указаній вполнѣ достаточно, чтобы напомнить вамъ постановку вопроса.

Я хочу воспользоваться здѣсь случаемъ, чтобы указать вамъ на то мѣсто у Гаусса, гдѣ это обоснованіе комплексныхъ чиселъ посредствомъ геометрической интерпретаціи ихъ высказано вполнѣ отчетливо и благодаря которому оно впервые получило всеобщее признаніе. Въ одной работѣ 1831 года Гауссъ занимается теоріей цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ $a+ib$, гдѣ a и b суть цѣлыя вещественныя числа, и распространяетъ на нихъ теоремы обыкновенной теоріи чиселъ относительно

простыхъ множителей, квадратичныхъ и биквадратичныхъ вычетовъ и т. д. О подобныхъ обобщеніяхъ теоріи чиселъ мы уже упоминали по поводу великой теоремы Ферма.

Въ собственномъ сообщеніи*) объ этой работѣ Гауссъ говоритъ о томъ, что онъ называетъ „истинной метафизикой мнимыхъ чиселъ“. Здѣсь онъ основываетъ оправданіе дѣйствій съ комплексными числами исключительно на томъ обстоятельствѣ, что этимъ числамъ и дѣйствіямъ надъ ними можно дать указанное выше наглядное геометрическое толкованіе; такимъ образомъ, Гауссъ нисколько не становится на формальную точку зрѣнія. Вообще же эти довольно длинныя, весьма красиво написанныя разсужденія Гаусса въ высшей степени интересны и заслуживаютъ того, чтобы вы ихъ прочитали. Упомяну еще только о томъ, что въ этой статьѣ Гауссъ предлагаетъ вмѣсто слова „мнимый“ (imaginär) болѣе ясное слово „комплексный“, которое дѣйствительно вошло въ употребленіе.

2. Высшія комплексныя числа, въ особенности кватерніоны.

У всякаго, основательно занимавшагося комплексными числами, возникаетъ вопросъ, нельзя ли построить другія, высшія комплексныя числа съ бóльшимъ числомъ новыхъ единицъ, а не съ однимъ только i, и цѣлесообразно опредѣлить дѣйствія надъ ними? Къ положительнымъ результатамъ въ этой области впервые пришли около 1840 года независимо другъ отъ друга Г. Грассманъ (H. Grassmann) въ Штетинѣ и Гамильтонъ (W. R. Hamilton) въ Дублинѣ. Съ изобрѣтеніемъ Гамильтона, такъ называемымъ исчисленіемъ кватерніоновъ, я хочу познакомить васъ нѣсколько ближе. Но сперва я скажу нѣсколько словъ объ общей постановкѣ проблемы.

Обыкновенныя комплексныя числа $x+iy$ можно разсматривать, какъ линейныя комбинаціи вида

$$x.1+y.i,$$

*) См. Werke, Bd. II. (Göttingen, 1876), стр. 175.

построенныя изъ двухъ различныхъ единицъ 1 и i съ помощью вещественныхъ параметровъ x, y. Аналогично этому станемъ разсматривать сколько угодно — скажемъ n — различныхъ между собою единицъ e_1, e_2, ..., e_n и назовемъ системой высшихъ комплексныхъ чиселъ, построенной изъ этихъ единицъ, совокупность комбинацій вида:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n,$$

составленныхъ съ помощью n произвольныхъ вещественныхъ чиселъ x_1, x_2, ..., x_n.

Само собою разумѣется, что два такихъ комплексныхъ числа, — напримѣръ, x и

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n,$$

— мы будемъ считать равными тогда и только тогда, когда коэффиціенты при отдѣльныхъ единицахъ, такъ называемыя составляющія комплекснаго числа, попарно равны между собой:

$$x_1 = y_1, \; x_2 = y_2, \; \ldots, \; x_n = y_n.$$

Столь же естественно и опредѣленіе сложенія и вычитанія, которое попросту сводитъ эти операціи къ сложенію и вычитанію составляющихъ:

$$x \pm y = (x_1 \pm y_1) e_1 + (x_2 \pm y_2) e_2 + \cdots + (x_n \pm y_n) e_n.$$

Труднѣе и интереснѣе обстоитъ дѣло съ умноженіемъ.

Здѣсь мы, конечно, начинаемъ съ того, что поступаемъ по общимъ правиламъ буквеннаго исчисленія, помножая каждый i-ый членъ выраженія x на каждый k-ый членъ выраженія y $(i, k = 1, 2, \ldots n)$:

$$x \cdot y = \sum_{(i, k = 1, 2, \ldots, n)} x_i y_k e_i e_k.$$

Но чтобы этотъ результатъ умноженія также представлялъ собой нѣкоторое число нашей системы, необходимо обладать правиломъ, которое изображало бы произведенія $e_i \cdot e_k$ въ видѣ комплексныхъ чиселъ системы, т. е. въ видѣ

линейныхъ комбинацій единицъ; необходимо имѣть, слѣдовательно, n^2 равенствъ такого вида:

$$e_i e_k = c_{ik1} e_1 + c_{ik2} e_2 + \cdots + c_{ikn} e_n = \sum_{(l=1,2,\ldots,n)} c_{ikl} \cdot e_l \quad (i,\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

Тогда, дѣйствительно, произведеніе

$$x \cdot y = \sum_{(l=1,2,\ldots,n)} \left(\sum_{(i,\,k=1,\ldots,n)} x_i y_k c_{ikl} \right) e_l$$

представитъ собою нѣкоторое число нашей системы. Въ установленіи этого правила умноженія, т. е. схемы коэффиціентовъ c_{ikl}, заключается характеристика каждой частной системы комплексныхъ чиселъ.

Если опредѣлить дѣленіе, какъ дѣйствіе, обратное умноженію, то оказывается, что опредѣленное такимъ образомъ дѣленіе не всегда однозначно выполняется даже и въ томъ случаѣ, если дѣлитель не обращается въ 0. Въ самомъ дѣлѣ, опредѣленіе y изъ уравненія $x \cdot y = z$ получается посредствомъ рѣшенія n линейныхъ уравненій

$$\sum x_i y_k c_{ik1} = z_1, \quad \sum x_i y_k c_{ik2} = z_2, \ldots, \quad \sum x_i y_k c_{ikn} = z_n$$

($i,\ k = 1,\ 2,\ 3, \ldots, n$ въ каждомъ суммованіи) съ неизвѣстными $y_1, y_2, \ldots, y_n$; но эти уравненія въ томъ случаѣ, если ихъ опредѣлитель обращается въ 0, либо вовсе не имѣютъ рѣшеній, либо имѣютъ ихъ безчисленное множество; въ подобномъ случаѣ всѣ z_l могутъ равняться 0, хотя и не всѣ $y_k = 0$, т. е. произведеніе двухъ чиселъ можетъ обращаться въ 0, хотя ни одинъ сомножитель не равенъ нулю. Только съ помощью спеціальнаго искуснаго подбора коэффиціентовъ c_{ikl} можно достичь здѣсь сохраненія указаннаго свойства обыкновенныхъ чиселъ; правда, болѣе подробное изученіе вопроса показываетъ, что при $n > 2$ сохраненіе этого свойства всегда покупается цѣною уклоненія отъ одного изъ другихъ правилъ дѣйствій; поэтому стараются распорядиться такъ, чтобы этимъ уклоняющимся свойствомъ

оказалось такое, которое наименѣе важно для соотношеній, составляющихъ цѣль изслѣдованія.

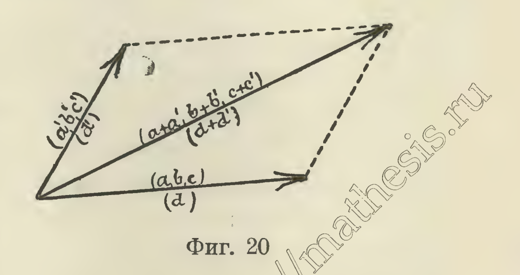
Всѣ эти общія разсужденія мы теперь прослѣдимъ на кватерніонахъ, которые — въ виду ихъ примѣненій въ физикѣ и механикѣ — представляютъ несомнѣнно самую важную систему высшихъ комплексныхъ чиселъ. Какъ видно изъ ихъ названія, это — четырехчленныя числа ($n=4$). Въ частномъ случаѣ они вырождаются въ трехчленные векторы; послѣдніе стали теперь общеизвѣстными, и о нихъ, вѣроятно, при случаѣ упоминаютъ и въ школѣ.

За первую изъ четырехъ единицъ, изъ которыхъ составляются кватерніоны, какъ и въ случаѣ обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ, принимаютъ обыкновенную вещественную единицу 1. Три другія единицы обыкновенно обозначаютъ по Гамильтону черезъ i, j, k, такъ что общій видъ кватерніона получается такой:

$$q = d + ia + jb + kc,$$

гдѣ a, b, c, d изображаютъ вещественные параметры или коэффиціенты кватерніона. Первую составляющую d, на которую умножается 1 и которая соотвѣтствуетъ вещественной части обыкновеннаго комплекснаго числа, называютъ скалярной составной частью кватерніона, совокупность же трехъ остальныхъ членовъ $ai + bj + ck$ называютъ его векторіальной составной частью.

Относительно сложенія врядъ ли можно что-либо прибавить къ предыдущимъ общимъ соображеніямъ; поэтому я дамъ вамъ сразу же естественное геометрическое толкованіе его, основанное на извѣстной вамъ интерпретаціи векторовъ. А именно, представимъ себѣ отрѣзокъ, соотвѣтствующій векторіальной части кватерніона q и имѣющій проекціи a, b, c на оси координатъ; этому вектору припишемъ вѣсъ, равный скалярной части d. Послѣ этого сложеніе векторовъ q и $q' = d' + ia' + jb' + kc'$ сводится



Фиг. 20

къ слѣдующему: мы строимъ равнодѣйствующую обоихъ отрѣзковъ по извѣстному правилу параллелограмма для сложенія векторовъ (фиг. 20) и приписываемъ ей въ качествѣ вѣса сумму вѣсовъ обоихъ слагаемыхъ; этимъ путемъ мы дѣйствительно получаемъ отрѣзокъ, представляющій собой кватерніонъ

$$q+q'=(d+d')+i(a+a')+j(b+b')+k(c+c').$$

Со специальными свойствами кватерніоновъ мы встрѣчаемся впервые, когда переходимъ къ умноженію; именно, они заключаются, какъ мы видѣли это въ общей теоріи, въ томъ, какъ устанавливаются значенія произведеній единицъ. Я покажу вамъ прежде всего, какимъ кватерніонамъ Гамильтонъ приравниваетъ 16 произведеній основныхъ единицъ по 2. Первое условіе состоитъ въ томъ, чтобы съ первой единицей 1, какъ это показываетъ самое ея обозначеніе, производить вычисленія, какъ съ вещественнымъ числомъ 1; слѣдовательно:

$$1^2=1, \quad i.1=1.i=i, \quad j.1=1.j=j, \quad k.1=1.k=k.$$

Но существенно новыми являются условія относительно квадратовъ трехъ другихъ единицъ:

$$i^2=j^2=k^2=-1$$

и относительно ихъ произведеній по двѣ:

$$j.k=+i, \quad k.i=+j, \quad i.j=+k,$$

между тѣмъ какъ при обратномъ порядкѣ сомножителей полагаемъ:

$$k.j=-i, \quad i.k=-j, \quad j.i=-k.$$

При этомъ сразу бросается въ глаза, что перемѣстительный законъ при умноженіи, вообще говоря, не имѣетъ мѣста; съ этимъ неудобствомъ приходится примириться, чтобы спасти однозначность дѣленія и ту теорему, по которой произведеніе двухъ чиселъ только въ томъ случаѣ можетъ обратиться въ 0, если одинъ изъ сомножителей становится равнымъ нулю. Мы сейчасъ увидимъ, что этотъ и всѣ другіе законы сложенія и умноженія, за единственнымъ указаннымъ исключеніемъ, дѣй-

ствительно остаются въ силѣ, и что, слѣдовательно, сдѣланныя выше простыя условія являются въ высшей степени цѣлесообразными.

Начнемъ съ того, что составимъ произведеніе двухъ кватерніоновъ въ общемъ видѣ:

$$q' = p \cdot q = (d + ia + jb + kc) \cdot (w + ix + jy + kz),$$

принимая во вниманіе данную послѣдовательность сомножителей. Перемножая почленно, замѣняя произведенія единицъ ихъ значеніями изъ нашей таблицы умноженій и соединяя затѣмъ члены съ одинаковыми единицами въ одинъ, находимъ:

$$\begin{aligned} q' = pq = w' + ix' + jy' + kz' = \ & (dw - ax - by - cz) \\ & + i\,(aw + dx + \underline{bz - cy}) \\ & + j\,(bw + dy + \underline{cx - az}) \\ & + k\,(cw + dz + \underline{ay - bx}) \end{aligned}$$

Такимъ образомъ, составляющія кватерніона-произведенія представляютъ собой опредѣленныя простыя двулинейныя*) комбинаціи составляющихъ обоихъ сомножителей. При перемѣнѣ порядка сомножителей 6 подчеркнутыхъ членовъ мѣняютъ свои знаки, такъ что $q \cdot p$, вообще говоря, существенно отлично отъ $p \cdot q$ и при томъ не только по знаку, какъ это имѣетъ мѣсто для произведеній отдѣльныхъ единицъ.

Въ то время, какъ перемѣстительный законъ, какъ мы видимъ, не имѣетъ мѣста, законы распредѣлительный и сочетательный остаются въ силѣ. Дѣйствительно, если вычислить, съ одной стороны, произведеніе $p(q + q_1)$, а, съ другой, выраженіе $pq + pq_1$, формально перемножая члены, и не замѣнять произведеній единицъ ихъ значеніями, то должны получиться тождественныя выраженія; но это тождество не нарушится, если затѣмъ къ тому и другому выраженію примѣнить таблицу умноженія единицъ. Далѣе, нетрудно видѣть, что и

---

*) Т. е. выраженія, составленныя изъ двухъ системъ величинъ a, b, c, d и x, y, z, w такъ, что въ каждый членъ входитъ линейно одинъ множитель изъ первой системы и одинъ изъ второй. Подъ „составляющими“ кватерніона авторъ разумѣетъ коэффиціенты при различныхъ единицахъ. *Ред.*

законъ сочетательный долженъ остаться всегда въ силѣ, если только онъ дѣйствителенъ для умноженія единицъ. А этотъ послѣдній фактъ можно установить непосредственно, на основаніи таблицы умноженія, какъ я покажу на такомъ примѣрѣ:

$$(ij)\,k = i\,(jk).$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$(ij)\,k = k\,.\,k = -1$$

и

$$i\,(jk) = i\,.\,i = -1.$$

Перейдемъ къ дѣленію. Достаточно показать, что всякому кватерніону $p = d + i\,.\,a + j\,.\,b + k\,.\,c$ отвѣчаетъ вполнѣ опредѣленный другой кватерніонъ q такой, что

$$p\,.\,q = 1;$$

представляется цѣлесообразнымъ обозначить это q черезъ $1/p$. Дѣленіе въ общемъ случаѣ легко сводится къ этому частному случаю. Чтобы опредѣлить это q, полагаемъ предыдущее выраженіе для $p\,.\,q$ равнымъ 1, т. е. $1 = 1 + 0\,.\,i + 0\,.\,j + 0\,.\,k$; приравнивая составляющія, получаемъ слѣдующія 4 уравненія для 4 неизвѣстныхъ составляющихъ x, y, z, w кватерніона q:

$$\begin{aligned} dw - ax - by - cz &= 1, \\ aw + dx - cy + bz &= 0, \\ bw + cx + dy - az &= 0, \\ cw - bx + ay + dz &= 0. \end{aligned}$$

Разрѣшимость подобной системы уравненій зависитъ, какъ извѣстно, отъ ея опредѣлителя; въ данномъ же случаѣ мы имѣемъ какъ разъ такъ называемый косой симметричный опредѣлитель, т. е. такой, въ которомъ элементы, лежащіе симметрично по отношенію къ главной діагонали (идущей отъ верхняго элемента слѣва къ нижнему элементу справа), отличаются другъ отъ друга только знаками, между тѣмъ какъ всѣ элементы главной діагонали равны между собой. Теорія опредѣлителей даетъ очень простую формулу для вычисленія такого рода опредѣлителя, а именно въ данномъ случаѣ оказывается:

$$\begin{vmatrix} d & -a & -b & -c \\ a & d & -c & b \\ b & c & d & -a \\ c & -b & a & d \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2;$$

въ справедливости этого равенства можно легко убѣдиться и непосредственнымъ вычисленіемъ. Въ томъ обстоятельствѣ, что этотъ опредѣлитель оказывается равнымъ какъ разъ нѣкоторой степени суммы квадратовъ четырехъ составляющихъ, и заключается собственно тонкій и глубокій смыслъ условій Гамильтона; именно изъ этого обстоятельства вытекаетъ, что опредѣлитель всегда отличенъ отъ 0, кромѣ того случая, когда одновременно $a=b=c=d=0$; поэтому, за исключеніемъ одного только этого случая ($p=0$), уравненія однозначно разрѣшаются, и обратный кватерніонъ q оказывается, такимъ образомъ, однозначно опредѣленнымъ.

Если положить

$$T=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2},$$

— эту величину, играющую большую роль въ теоріи кватерніоновъ, называютъ „тензоромъ кватерніона p“, — то легко убѣдиться прямой подстановкой, что это однозначное рѣшеніе выражается такъ:

$$x=-\frac{a}{T^2},\quad y=-\frac{b}{T^2},\quad z=-\frac{c}{T^2},\quad w=\frac{d}{T^2},$$

такъ что окончательный результатъ получается такой:

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{d+ia+jb+kc}=\frac{d-ia-jb-kc}{a^2+b^2+c^2+d^2}.$$

Вводя, аналогично теоріи обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ, кватерніонъ

$$\bar{p}=d-ia-jb-kc$$

подъ названіемъ сопряженнаго съ p, можно послѣднюю формулу написать еще и въ такомъ видѣ:

$$\frac{1}{p}=\frac{\bar{p}}{T^2},$$

или

$$p \cdot \bar{p} = T^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2;$$

эти формулы являются непосредственными обобщеніями извѣстныхъ свойствъ обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ. А такъ какъ и, обратно, p является сопряженнымъ съ $\bar{p}$ числомъ, то также:

$$\bar{p} \cdot p = T^2,$$

такъ что въ этомъ частномъ случаѣ имѣетъ мѣсто перемѣстительность сомножителей.

Теперь мы въ состояніи сразу получить рѣшеніе задачи дѣленія въ общемъ видѣ. Умножая $1/p$ одинъ разъ на число pq, а другой разъ на число q', равное числу pq, и принимая во вниманіе, что $\frac{1}{p} \cdot p = 1$, находимъ:

$$q = \frac{1}{p} q' = \frac{\bar{p}}{T^2} \cdot q'.$$

Уравненіе же $qp = q'$, отличающееся отъ перваго только тѣмъ, что неизвѣстный сомножитель q занимаетъ первое мѣсто, имѣетъ, вообще говоря, отличное рѣшеніе:

$$q = q' \cdot \frac{1}{p} = q' \cdot \frac{\bar{p}}{T^2}.$$

Является вопросъ, нельзя ли найти такой геометрической интерпретаціи, при которой эти дѣйствія и ихъ законы являются чѣмъ-то естественнымъ.

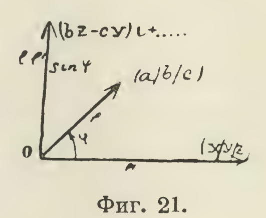
Чтобы придти къ такой интерпретаціи, начнемъ съ частнаго случая, когда оба сомножителя сводятся къ простымъ векторамъ, т. е. когда скалярныя части $d = w = 0$. Тогда наша общая формула для произведенія (стр. 99) принимаетъ такой видъ:

$$q' = p \cdot q = (ia + jb + kc) \cdot (ix + jy + kz) = -(ax + by + cz) +$$
$$+ i(bz - cy) + j(cx - az) + k(ay - bx);$$

мы видимъ, что произведеніе двухъ кватерніоновъ, сводящихся къ однимъ только векторамъ, состоитъ изъ двухъ частей—скалярной и векторіальной. Эти составныя части нетрудно привести въ связь съ общепринятыми въ Германіи видами векторіальныхъ произведеній.

Эти понятія, гораздо болѣе распространенныя въ Германіи, чѣмъ кватерніоны, ведутъ начало отъ Грассмана, хотя самое слово „векторъ“ англійскаго происхожденія. Тѣ два вида векторіальныхъ произведеній, съ которыми обыкновенно оперируютъ, носятъ теперь, большей частью, названія внутренняго или скалярнаго произведенія $ax+by+cz$, которое, такимъ образомъ, только знакомъ отличается отъ скалярной части написаннаго выше произведенія кватерніоновъ, и внѣшняго или векторіальнаго произведенія $i(bz-cy)+j(cx-az)+$ $+k(ay-bx)$, которое равно векторіальной части произведенія кватерніоновъ.

Построимъ оба вектора (a, b, c) и (x, y, z) въ видѣ отрѣзковъ, исходя изъ начала координатъ O (фиг. 21); ихъ концы будутъ находиться въ точкахъ $a\,|\,b\,|\,c$ и $x\,|\,y\,|\,z$; длины ихъ равны $l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ и $l'=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Если черезъ φ обозначить уголъ между обоими отрѣзками, то по извѣстнымъ теоремамъ аналитической геометріи — въ подробности я не вхожу — слѣдуетъ, что внутреннее произведеніе



Фиг. 21.

$$ax+by+cz=l\,.\,l'\,.\cos\varphi.$$

Внѣшнее произведеніе само представляетъ собой векторъ, который, какъ нетрудно видѣть, направленъ перпендикулярно къ плоскости l, l' *); его длина оказывается равной $l\,.\,l'\,.\sin\varphi$.

Существеннымъ является вопросъ о направленіи вектора-произведенія еще въ томъ смыслѣ, въ какую сторону плоскости, опредѣляемой векторами l и l', надо его откладывать. Это направленіе мѣняется въ зависимости отъ принятой системы координатъ. А именно, существуютъ, какъ вамъ извѣстно, двѣ различныя, неконгруэнтныя, т. е.

*) Направляющіе косинусы перваго вектора пропорціональны коэффиціентамъ a, b, c, а второго — коэффиціентамъ x, y, z. Такъ какъ направляющіе косинусы векторіальнаго произведенія суть $bz-cy$, $cx-az$, $ay-bx$, то этотъ послѣдній векторъ перпендикуляренъ къ первымъ двумъ.

не могущія быть совмѣщенными, системы прямоугольныхъ координатъ; при соотвѣтственно одинаковомъ направленіи двухъ паръ осей у нихъ, — напримѣръ, осей y-овъ и z-овъ,— третьи оси — оси x-овъ — имѣютъ прямо-противоположныя направленія. Такія двѣ зеркально-симметричныя системы находятся одна къ другой въ такомъ же отношеніи, какъ правая рука къ лѣвой; дѣйствительно, ихъ можно различать, пользуясь слѣдующимъ простымъ мнемоническимъ правиломъ: оси x, y, z одной системы расположены, какъ разставленные пальцы — большой, указательный и средній — правой руки, оси x, y, z другой системы — какъ тѣ же пальцы лѣвой руки (фиг. 22). Въ литературѣ постоянно встрѣчается то одна, то другая система; въ различныхъ странахъ, въ различныхъ дисциплинахъ и, наконецъ, у различныхъ авторовъ господствуетъ различный usus.

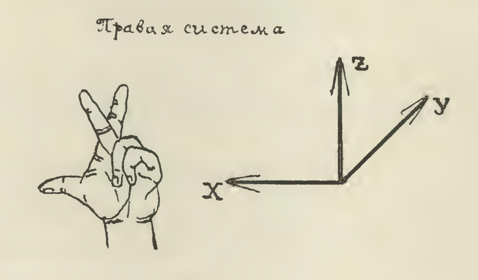
Въ простѣйшемъ случаѣ, когда $p=i, q=j$, т. е. когда p и q равны отрѣзкамъ-единицамъ, отложеннымъ вдоль осей x и y, ихъ внѣшнее произведеніе, въ силу условія $i.j=k$, оказывается равнымъ отрѣзку-единицѣ, лежащему на оси z-овъ (фиг. 23). Но i и j можно, непрерывно измѣняя, превратить въ любые векторы p и q *); при этомъ k перейдетъ непрерывнымъ образомъ въ векторіальную составную часть произведенія $p.q$, ни разу не обращаясь въ теченіе этого процесса въ нуль; поэтому первый и второй сомножители и само векторіальное произведеніе всегда должны быть такъ расположены другъ относительно друга, какъ оси x, y, z системы координатъ, т. е. должны представлять „правую“ или „лѣвую“ систему направленій, смотря по тому, какая система принята для координатныхъ осей.

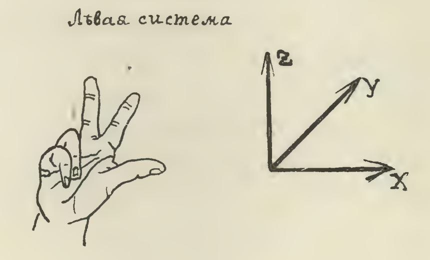
---

*) Откладывая на соотвѣтствующихъ осяхъ векторы i и j, мы можемъ брать различныя единицы для изображенія этихъ векторовъ; вмѣстѣ съ тѣмъ будутъ мѣняться отрѣзки, изображающіе векторы i, j. Непрерывно ихъ мѣняя, мы можемъ сдѣлать отрѣзки i, j равными p, q. Вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ непрерывно мѣняться произведеніе pq, а такъ какъ оно въ нуль не обратится, то оно будетъ все время направлено по положительной оси z-овъ. Предложеніе можетъ быть доказано и безъ этихъ искусственныхъ соображеній, но это значительно сложнѣе.

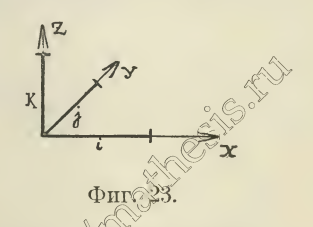
Ред.

Мнѣ хочется прибавить нѣсколько словъ по поводу прискорбнаго вопроса о системѣ обозначенiй въ векторiальномъ анализѣ. Дѣло въ томъ, что для каждаго дѣйствiя съ векторами употребляется большое количество различныхъ знаковъ и, къ сожалѣнiю, до сихъ поръ еще не удалось создать одну единственную общеобязательную систему обозначенiй. Четыре года тому назадъ на Съѣздѣ Естествоиспытателей въ Касселѣ (1903) съ этой цѣлью была даже избрана особая коммиссiя; но члены ея не могли вполнѣ столковаться, а такъ какъ каждый изъ нихъ все же имѣлъ доброе желанiе сдѣлать шагъ отъ своей первоначальной точки зрѣнiя навстрѣчу другимъ взглядамъ, то единственнымъ результатомъ явилось возникновенiе трехъ новыхъ обозначенiй! Послѣ этого и другихъ аналогичныхъ случаевъ я пришелъ къ тому заключенiю, что дѣйствительное объединенiе всѣхъ заинтересованныхъ въ такихъ вещахъ круговъ на почвѣ однихъ и тѣхъ же словесныхъ и письменныхъ обозначенiй возможно только въ тѣхъ случаяхъ, когда къ этому побуждаютъ въ высшей степени важные матерiальные интересы. Только подъ такимъ давленiемъ могло произойти въ 1881 году въ электротехникѣ всеобщее признанiе единообразной системы мѣръ вольтъ-амперъ-омъ и послѣдующее закрѣпленiе ея государственнымъ законодательствомъ, такъ какъ промышленность настойчиво требовала подобнаго единства мѣръ, какъ основы всѣхъ операцiй. За векторiальнымъ исчисленiемъ еще не стоятъ





Фиг. 22.



Фиг. 23.

такіе могущественные матеріальные стимулы, и поэтому приходится пока-что — дурно ли, хорошо ли — примириться съ тѣмъ, что каждый отдѣльный математикъ остается при привычномъ для него способѣ обозначеній, который онъ считаетъ наиболѣе удобнымъ или даже — если онъ нѣсколько склоненъ къ догматизму — единственно правильнымъ.

3. Умноженіе кватерніоновъ и преобразованіе поворотнаго растяженія въ пространствѣ.

Теперь перейдемъ къ геометрической интерпретаціи умноженія кватерніоновъ въ общемъ видѣ, предпославши ей слѣдующее замѣчаніе.

Если въ произведеніи $q'=pq$ замѣнить p и q ихъ сопряженными значеніями $\bar{p}$, $\bar{q}$, т. е. если измѣнить знаки при a, b, c, x, y, z на обратные, то въ формулѣ произведенія (стр. 99) скалярная часть останется безъ измѣненія, а въ векторіальной части только не подчеркнутые множители при i, j, k измѣнятъ свои знаки на обратные. Если же одновременно измѣнить и порядокъ производителей, то и подчеркнутые множители измѣнятъ знаки, такъ что $\bar{q}\,.\,\bar{p}$ представляетъ какъ разъ сопряженное значеніе $\bar{q}'$ по отношенію къ $q'=p\,.\,q$:

Если $q'=p\,.\,q$, то $\bar{q}'=\bar{q}\,.\,\bar{p}$.

Перемножая оба равенства, находимъ:

$$q'\cdot\bar{q}'=p\cdot q\cdot\bar{q}\cdot\bar{p}.$$

При этомъ порядокъ множителей играетъ существенную роль; но мы вправѣ примѣнить сочетательный законъ и написать:

$$q'\cdot\bar{q}'=p\cdot(q\cdot\bar{q})\cdot\bar{p}.$$

Но, какъ мы видѣли выше,

$$q\cdot\bar{q}=x^2+y^2+z^2+w^2,$$

такъ что окончательно получаемъ:

$$w'^2+x'^2+y'^2+z'^2=p\,(w^2+x^2+y^2+z^2)\,\bar{p}.$$

Здѣсь второй сомножитель справа есть скаляръ, а при умноженіи скаляра M на кватерніонъ имѣетъ силу перемѣстительный законъ, такъ какъ

$$M \cdot p = Md + i(Ma) + j(Mb) + k(Mc) = pM.$$

Поэтому, въ данномъ случаѣ:

$$w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = \bar{p} \cdot p \cdot (w^2 + x^2 + y^2 + z^2);$$

а такъ какъ $p \cdot \bar{p}$ есть квадратъ тензора кватерніона p, то:

$$w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)(w^2 + x^2 + y^2 + z^2);$$

другими словами: тензоръ произведенія двухъ кватерніоновъ равенъ произведенію тензоровъ обоихъ сомножителей. Конечно, эту формулу можно получить и прямымъ вычисленіемъ, если подставить вмѣсто w', x', y', z' ихъ выраженія изъ формулы умноженія на стр. 99.

Теперь будемъ интерпретировать кватерніонъ q, какъ отрѣзокъ въ пространствѣ четырехъ измѣреній, идущій отъ начала координатъ къ точкѣ x, y, z, w, вполнѣ аналогично интерпретаціи вектора въ трехмѣрномъ пространствѣ. Въ настоящее время не приходится, конечно, извиняться, когда призываешь на помощь четырехмѣрное пространство, какъ то было необходимо въ то время, когда я былъ студентомъ. Всѣ вы знаете, что здѣсь не скрывается никакой метафизической идеи, но что многомѣрное пространство попросту есть удобное, аналогичное нашему дѣйствительному представленію о пространствѣ, средство математическаго способа выраженія*).

Если сохранять постояннымъ множитель p, т. е. величины d, a, b, c, то уравненіе въ квартеніонахъ $q' = p \cdot q$ изображаетъ извѣстное линейное преобразованіе точекъ $x \mid y \mid z \mid w$ четырехмѣрнаго пространства въ точки $x' \mid y' \mid z' \mid w'$,

---

*) Это требовало бы, однако, нѣкоторыхъ поясненій; но читатель найдетъ болѣе обстоятельное выясненіе этихъ идей во второмъ томѣ настоящаго сочиненія.

Ред.

относя каждому четырехмѣрному вектору нѣкоторый другой векторъ; въ явномъ видѣ уравненія преобразованія получаются путемъ сравненія коэффиціентовъ въ формулѣ произведенія на стр. 99. Но изъ только-что полученнаго уравненія для тензоровъ видно, что при этомъ разстояніе $\sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2}$ всякой точки отъ начала помножается на одинъ и тотъ же постоянный множитель $T=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$; кромѣ того, какъ мы видѣли (стр. 101), опредѣлитель линейнаго преобразованія всегда имѣетъ положительное значеніе. Съ другой стороны, изъ аналитической геометріи въ трехмѣрномъ пространствѣ извѣстно, что такое линейное преобразованіе x, y, z, которое преобразовываетъ сумму $x^2+y^2+z^2$ въ самое себя (т. н. „ортогональное" преобразованіе) и которое, кромѣ того, имѣетъ всегда положительный опредѣлитель, изображаетъ вращеніе пространства вокругъ начала координатъ, и что всякое вращеніе можетъ быть такъ представлено. Если же линейное преобразованіе лишь помножаетъ $x^2+y^2+z^2$ на нѣкотораго множителя T^2 и если опредѣлитель, по прежнему, сохраняетъ положительное значеніе, то получается вращеніе въ соединеніи съ растяженіемъ всего пространства до T-кратныхъ размѣровъ при неподвижномъ началѣ координатъ. Такого рода преобразованіе мы будемъ называть поворотнымъ растяженіемъ (Drehsteckung). Но, что вѣрно для трехмѣрнаго пространства, подходитъ и къ четырехмѣрному. Мы будемъ говорить, что наше линейное преобразованіе въ точно такомъ же смыслѣ выражаетъ вращеніе и растяженіе четырехмѣрнаго пространства.

Однако, нетрудно видѣть, что это еще не самый общій случай возможныхъ преобразованій вращенія и растяженія. Дѣйствительно, наше преобразованіе содержитъ только 4 произвольныхъ параметра a, b, c, d, тогда какъ мы сейчасъ увидимъ, что самое общее преобразованіе поворотнаго растяженія четырехмѣрнаго пространства R_4 содержитъ 7 такихъ параметровъ. А именно, чтобы общее линейное преобразованіе изображало вращеніе съ растяженіемъ, необходимо должно имѣть мѣсто слѣдующее тождество:

$$x'^2+y'^2+z'^2+w'^2=T^2\,.\,(x^2+y^2+z^2+w^2);$$

это даетъ намъ при сравненіи коэффиціентовъ 10 условій, такъ какъ лѣвая часть послѣ замѣны $x', \ldots, w'$ ихъ выраженіями въ $x, \ldots, w$ переходитъ въ квадратичную форму 4 перемѣнныхъ и поэтому содержитъ $\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ членовъ. Но такъ такъ T остается произвольнымъ, то всего имѣемъ $10 - 1 = 9$ условій для 16 коэффиціентовъ линейнаго преобразованія, такъ что дѣйствительно остается еще $16 - 9 = 7$ произвольныхъ параметровъ.

Но оказывается возможнымъ, и это наиболѣе удивительно, получить съ помощью перемноженія кватерніоновъ наиболѣе общій видъ преобразованія поворотнаго растяженія. А именно, если $\pi = \delta + i\alpha + j\beta + k\gamma$ представляетъ нѣкоторый постоянный кватерніонъ, то можно показать, подобно тому, какъ это было сдѣлано выше, что и $q = q \cdot \pi$ (что отличается отъ предыдущей формулы только измѣненіемъ порядка сомножителей) представляетъ преобразованіе поворотнаго растяженія R_4, т. е. пространства четырехъ измѣреній, а вслѣдствіе этого и послѣдовательное производство обоихъ преобразованій:

$$q' = p \cdot q \cdot \pi = (d + ia + jb + kc) \cdot q \cdot (\delta + i\alpha + j\beta + \gamma k)$$

представляетъ подобное же преобразованіе. Но это преобразованіе содержитъ какъ разъ 7 произвольныхъ параметровъ, такъ какъ оно остается неизмѣннымъ, если a, b, c, d умножить на одно и то же вещественное число и въ то же время раздѣлить на него же α, β, γ, δ; поэтому является вѣроятнымъ, что оно представляетъ общій видъ преобразованія поворотнаго растяженія въ пространствѣ четырехъ измѣреній; эта красивая теорема дѣйствительно была доказана Кэли (Cayley). Я ограничусь здѣсь этими историческими указаніями, чтобы не затеряться въ деталяхъ этой интерпретаціи. Указанная формула находится въ работѣ Кэли „On the homographic transformation of a surface of the second ordre into itself“ *) 1854 года, а также и въ нѣкоторыхъ другихъ его работахъ **).

*) Напечатано въ полномъ собраніи сочиненій Кели: Cayley, „Collected mathematical papers“, Vol. II (Cambridge 1899), pag. 133.

**) Ср. напримѣръ, „Recherches ultérieures sur les déterminants gauches (loc. cit., pag. 214).

Другое большое преимущество формулы Кэли заключается въ томъ, что она даетъ весьма наглядное представленіе о результатѣ послѣдовательнаго производства двухъ поворотныхъ растяженій. Дѣйствительно, если второе преобразованіе дано уравненіемъ

$$q'' = w'' + ix'' + jy'' + kz'' = p' . q' . \pi'$$

гдѣ p', π' обозначаютъ опредѣленные данные кватерніоны, то, внося сюда написанную выше величину q', получимъ:

$$q'' = p' . (p . q . \pi) . \pi';$$

на основаніи сочетательнаго закона умноженія находимъ:

$$q'' = (p' . p) . q . (\pi . \pi') = r . q . \varsigma,$$

гдѣ

$$r = p' . p, \quad \varsigma = \pi . \pi'$$

представляютъ опредѣленные новые кватерніоны. Получается снова выраженіе поворотнаго растяженія, переводящаго q въ q'', какъ разъ въ прежнемъ видѣ, а именно переднимъ и заднимъ множителями при q служатъ произведенія обоихъ переднихъ и, соотвѣтственно, заднихъ множителей въ изображеніяхъ послѣдовательно производимыхъ поворотныхъ растяженій, при чемъ порядокъ играетъ существенную роль.

Но вы, господа, можетъ быть, недовольны этой четырехмѣрной интерпретаціей и хотите что-либо болѣе наглядное, основанное на обычномъ трехмѣрномъ представленіи о пространствѣ. Въ такомъ случаю я постараюсь получить изъ предыдущихъ формулъ, посредствомъ простой специализаціи, формулы для аналогичныхъ операцій въ трехмѣрномъ пространствѣ; въ этихъ именно формулахъ и заключается громадное значеніе умноженія кватерніоновъ для обыкновенной физики и механики; я говорю нарочно для обыкновенной, чтобы не предрѣшать дальнѣйшаго развитія этихъ дисциплинъ, благодаря которому могутъ получить непосредственное приложеніе и предыдущія интерпретаціи. И это время, можетъ быть, ближе чѣмъ вы думаете; новѣйшія изслѣдованія въ теоріи электроновъ,

въ томъ видѣ, въ какомъ они находятъ себѣ выраженіе въ такъ называемомъ принципѣ относительности, представляютъ собой, въ сущности, не что иное, какъ послѣдовательное примѣненіе поворотныхъ растяженій пространства четырехъ измѣреній; въ этомъ именно порядкѣ идей эти изслѣдованія и были недавно изложены проф. Минковскимъ (Minkowski).

Но вернемся къ тремъ измѣреніямъ. При поворотномъ растяженіи точка x, y, z переходитъ въ такую точку x', y', z', что

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = M(x^2 + y^2 + z^2),$$

гдѣ M обозначаетъ линейное растяженіе всякой длины. Въ виду того, что наиболѣе общее линейное преобразованіе перемѣнныхъ x, y, z въ x', y', z' содержитъ $3 . 3 = 9$ коэффиціентовъ, а лѣвая часть послѣ введенія этихъ выраженій переходитъ въ квадратичную форму отъ x, y, z съ $\frac{3 . 4}{2} = 6$ членами, наше тождество при произвольномъ M представляетъ $6 - 1 = 5$ условій, и всѣ линейныя подстановки, удовлетворяющія ему, содержатъ еще $9 - 5 = 4$ произвольныхъ параметра (ср. аналогичныя разсужденія на стр. 109). Если одна изъ этихъ подстановокъ имѣетъ положительный опредѣлитель, то она изображаетъ, какъ уже было упомянуто, вращеніе пространства около начала, соединенное съ растяженіемъ въ отношеніи $1 : M$; если же опредѣлитель имѣетъ отрицательное значеніе, то подстановка соотвѣтствуетъ такому же поворотному растяженію, соединенному съ зеркальнымъ отраженіемъ пространства, опредѣляемымъ равенствами $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$. Съ другой стороны, можно показать, что этотъ опредѣлитель можетъ принимать только значенія $\pm M^3$.

Чтобы представить эти отношенія съ помощью кватерніоновъ, мы, конечно, сперва сведемъ неопредѣленные кватерніоны q, q' къ ихъ векторіальной составной части $q' = ix' + jy' + kz'$, $q = ix + jy + kz$; это — векторы, соединяющіе начало координатъ съ точкой до и послѣ преобразованія. И вотъ я утверждаю, что наиболѣе общее преобразованіе трехмѣрнаго пространства, представляющее со-

бой поворотное растяженіе, получится, если взять въ предыдущихъ формулахъ для p и π сопряженныя значенія, т. е. если положить:

$$q' = p \cdot q \cdot \bar{p}, \qquad (1)$$

или, выписывая подробно:

$$ix' + jy' + kz' = (d + ia + jb + kc) \cdot (ix + jy + kz) \cdot (d - ia - jb - kc). \qquad (1')$$

Что это доказать, надо прежде всего убѣдиться въ томъ, что скалярная часть произведенія, стоящаго справа, обращается въ нуль, и что, слѣдовательно, q' дѣйствительно есть векторъ. Для этого перемножимъ сперва $p \cdot q$ по правиламъ для кватерніоновъ; мы находимъ:

$$q' = \left\{ \begin{aligned} & -ax - by - cz \\ & + i\,(dx + bz - cy) \\ & + j\,(dy + cx - az) \\ & + k(dz + ay - bx) \end{aligned} \right\} \cdot \left\{ d - ia - jb - kc \right\};$$

послѣ вторичнаго перемноженія кватерніоновъ дѣйствительно получается для скалярной части q значеніе 0, а для его трехъ векторіальныхъ составляющихъ получаются выраженія:

$$(2) \left\{ \begin{aligned} x' &= (d^2 + a^2 - b^2 - c^2)\,x + 2\,(ab - cd)\,y + 2\,(ac + bd)\,z, \\ y' &= 2\,(ab + cd)\,x + (d^2 + b^2 - c^2 - a^2)\,y + 2\,(bc - ad)\,z, \\ z' &= 2\,(ac - bd)\,x + 2\,(bc + ad)\,y + (d^2 + c^2 - a^2 - b^2)\,z. \end{aligned} \right.$$

Остается показать, что эти формулы дѣйствительно выражаютъ требуемое преобразованіе. Это сразу получается, если составить относящееся къ равенству (1) уравненіе въ тензорахъ (см. стр. 107):

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)\,(x^2 + y^2 + z^2)\,(d^2 + a^2 + b^2 + c^2),$$

или

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = T^4 . (x^2 + y^2 + z^2),$$

гдѣ T обозначаетъ тензоръ p. Далѣе, мы сразу видимъ, что наша формула дѣйствительно содержитъ 4 произвольныхъ параметра, которые, согласно предыдущему подсчету, входятъ въ составъ наиболѣе общаго преобразованія этого вида. Чтобы разрѣшить также и вопросъ о знакѣ опредѣлителя, достаточно взять одинъ какой-нибудь примѣръ; дѣйствительно, такъ какъ тензоръ T всегда имѣетъ положительное значеніе и никогда не обращается въ 0, то при измѣненіи значеній a, b, c, d опредѣлитель, какъ непрерывная функція, никогда не можетъ принять значенія $-T^6$, если онъ хоть разъ принимаетъ значеніе $+T^6$; а между тѣмъ только эти два значенія, какъ выше было замѣчено, и идутъ въ соображеніе. Если же, напримѣръ, положить $a=b=c=d$, то опредѣлитель субституціи (2) равняется

$$\begin{vmatrix} d^2, & 0, & 0 \\ 0, & d^2, & 0 \\ 0, & 0, & p^2 \end{vmatrix} = d^6 = +T^6;$$

слѣдовательно, онъ имѣетъ всегда положительное значеніе, и поэтому наше преобразованіе, выражаемое соотношеніемъ (1), въ самомъ дѣлѣ изображаетъ всегда дѣйствительное вращеніе и растяженіе. Послѣ этого столь же просто изобразится поворотное растяженіе, соединенное еще съ отраженіемъ; для этого надо лишь написать: $\overline{q'} = p \cdot q \cdot \overline{p}$, ибо это и есть соединеніе предыдущаго преобразованія съ отраженіемъ: $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$ *).

Теперь посмотримъ, какъ расположена ось того вращенія, которое опредѣляется равенствами (2), и каковъ уголъ вращенія. Пусть ξ, η, ζ означаютъ косинусы направленія оси вращенія, такъ что

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \tag{3}$$

*) Преобразованіе $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$ не есть собственно отраженіе отъ какой-либо плоскости, ибо оно оставляетъ безъ измѣненія только начало координатъ. Это есть преобразованіе, симметричное относительно начала, т. е. каждая точка переходитъ въ точку, симметричную съ ней относительно начала координатъ. Но это преобразованіе слагается изъ трехъ отраженій:

а уголъ (или амплитуду) вращенія обозначимъ черезъ ω. Оказывается, что имѣютъ мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$\left.\begin{array}{c} d = T \, . \cos\dfrac{\omega}{2} \, ; \\ a = T . \xi . \sin\dfrac{\omega}{2} \, , \; b = T . \eta . \sin\dfrac{\omega}{2} \, , \; c = T . \zeta . \sin\dfrac{\omega}{2} \, ; \end{array}\right\} \qquad (4)$$

изъ нихъ легко опредѣлить при извѣстныхъ a, b, c, d 4 величины ξ, η, ζ, ω и при томъ такъ, что выполняется соотношеніе (3); въ самомъ дѣлѣ, изъ соотношенія:

$$d^2 + a^2 + b^2 + c^2 = T^2 \left\{ \cos^2\frac{\omega}{2} + \sin^2\frac{\omega}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \right\},$$

получаемаго посредствомъ сложенія уравненій (4) по возвышеніи обѣихъ частей каждаго уравненія въ квадратъ, вытекаетъ соотношеніе (3), такъ какъ T опредѣлено, какъ тензоръ кватерніона p. Поэтому для опредѣленія ξ, η, ζ достаточны получающіяся изъ системы (4) уравненія:

$$a : b : c = \xi : \eta : \zeta , \qquad (4')$$

которыя говорятъ, что точка $a \mid b \mid c$ лежитъ на оси вращенія разсматриваемаго преобразованія.

$$\begin{array}{lll} x' = -x, & y' = y, & z' = z; \\ x'' = x', & y'' = -y', & z'' = z'; \\ x''' = x'', & y''' = -y'', & z''' = -z''. \end{array} \qquad (!)$$

Если мы любую точку (x, y, z) отразимъ послѣдовательно отъ трехъ плоскостей координатъ, то она перейдетъ въ точку (x', y', z'), симметричную ей относительно начала. Однако, два первыхъ отраженія (!) могутъ быть замѣнены вращеніемъ вокругъ начала координатъ, а именно—вращеніемъ, замѣщающимъ положительную полуось x-овъ отрицательной полуосью y-овъ и положительную полуось y-овъ отрицательной полуосью x-овъ. Разсматриваемое преобразованіе, такимъ образомъ, дѣйствительно слагается изъ вращенія, подобнаго растяженія и отраженія отъ плоскостей. Болѣе обстоятельное выясненіе идеи геометрическаго преобразованія читатель найдетъ во второй части настоящаго сочиненія.

Ред.

Переходя къ доказательству этихъ утвержденій, начнемъ съ провѣрки послѣдняго свойства; для этого положимъ въ уравненіяхъ (2) $x = a$, $y = b$, $z = c$; тогда получимъ:

$$x' = (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)\, a = T^2 . a,$$
$$y' = (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)\, b = T^2 . b,$$
$$z' = (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)\, c = T^2 . c;$$

изъ этихъ равенствъ видно, что точка $x' \mid y' \mid z'$ лежитъ на прямой, проходящей черезъ начало координатъ и черезъ точку $a \mid b \mid c$; а это именно и характеризуетъ точку $a \mid b \mid c$, какъ точку оси вращенія. Остается только доказать, что уголъ ω, опредѣляемый уравненіями (4), дѣйствительно представляетъ амплитуду вращенія. Но это требуетъ сложныхъ разсужденій, вмѣсто которыхъ я укажу на то, что наши формулы преобразованія (2) при $T = 1$, въ силу соотношенія (4), переходятъ какъ разъ въ тѣ формулы, которыя Эйлеръ установилъ для вращенія системы координатъ вокругъ оси $\xi \mid \eta \mid \zeta$ на уголъ ω. Въ болѣе подробномъ видѣ вы это найдете, напримѣръ, въ книгѣ: „Теорія волчка“ *) Клейна-Зоммерфельда, въ которой примѣняется теорія кватерніоновъ, или въ книгѣ „Теорія и примѣненія опредѣлителей“ Бальцера **).

Я хочу еще показать вамъ сжатое и удобное выраженіе, которое исчисленіе кватерніоновъ даетъ для вращенія вокругъ оси $\xi \mid \eta \mid \zeta$ на уголъ ω, соединеннаго съ растяженіемъ въ T^2 разъ; это выраженіе получается, если подставить формулы (4) въ уравненія (1):

$$\begin{aligned} ix' + jy' + kz' = T^2 \left\{ \cos\frac{\omega}{2} + \sin\frac{\omega}{2}(i\xi + j\eta + k\zeta) \right\} \cdot \\ \cdot \left\{ ix + jy + kz \right\} \cdot \left\{ \cos\frac{\omega}{2} - \sin\frac{\omega}{2}(i\xi + j\eta + k\zeta) \right\} . \end{aligned} \tag{5}$$

*) Klein-Sommerfeld, „Theorie des Kreisels“, Heft 1, § 7, S. 55 ff.

*) Baltzer, „Theorie und Anwendung der Determinanten“, § I, 4, S. 187.

Здѣсь всѣ Эйлеровы формулы вращенія совмѣщены въ одну, которая легко запечатлѣвается въ памяти: въ ней векторъ $ix+jy+kz$ спереди и сзади помножается на сопряженные кватерніоны съ тензоромъ, равнымъ 1, или на такъ называемые верзоры (т. е. вращатели, въ отличіе отъ тензора, т. е. растягивателя), и къ этому произведенію присоединяется въ качествѣ скалярнаго множителя величина растяженія.

Теперь я намѣренъ показать вамъ, что въ случаѣ двухъ измѣреній эти формулы даютъ какъ разъ извѣстное выраженіе вращенія и растяженія плоскости xy посредствомъ умноженія двухъ комплексныхъ чиселъ (ср. стр. 93). Для этого стоитъ только принять за ось вращенія въ уравненіяхъ (5) ось z-овъ ($\xi=\eta=0$, $\zeta=1$); тогда получаемъ для $z=z'=0$:

$$ix'+jy'=T^2\left(\cos\frac{\omega}{2}+k\sin\frac{\omega}{2}\right)\left(ix+jy\right)\left(\cos\frac{\omega}{2}-k\sin\frac{\omega}{2}\right);$$

произведя нужныя умноженія на основаніи правилъ объ умноженіи единицъ, находимъ:

$$\begin{aligned}ix'+jy' &= T^2\left\{\cos\frac{\omega}{2}(ix+jy)+\sin\frac{\omega}{2}(jx-iy)\right\}\left\{\cos\frac{\omega}{2}-k\sin\frac{\omega}{2}\right\}\\ &= T^2\left\{\cos^2\frac{\omega}{2}(ix+jy)+2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}(jx-iy)-\sin^2\frac{\omega}{2}(ix+jy)\right\}\\ &= T^2\left\{(ix+jy)\cos\omega+(jx-iy)\sin\omega\right\}\\ &= T^2(\cos\omega+k\sin\omega)(ix+jy).\end{aligned}$$

Если прибавить позади обѣихъ частей равенства по множителю $(-i)$, то получимъ:

$$x'+ky'=T^2(\cos\omega+k\sin\omega)(x+ky),$$

а это именно и есть извѣстная формула умноженія двухъ обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ съ его геометрическимъ

толкованіемъ, какъ вращенія на амплитуду ω и растяженія въ T^2 разъ, съ той только разницей, что вмѣсто мнимой единицы $\sqrt{-1}$, обычно обозначаемой черезъ i, здѣсь стоитъ k.

Возвращаясь снова къ трехмѣрному пространству, постараемся такъ видоизмѣнить формулу (1), чтобы она изображала собой одно только растяженіе безъ вращенія. Для этого замѣнимъ x', y', z' черезъ $x'.T^2$, $y'.T^2$, $z'.T^2$ и, слѣдовательно, q' черезъ $q'.T^2$; вспоминая же, что $p^{-1}=\frac{1}{p}=\frac{\bar{p}}{T^2}$, находимъ слѣдующую формулу чистаго вращенія:

$$ix'+jy'+kz'=p\,(ix+jy+kz)\,.p^{-1}. \qquad (6)$$

Мы не нарушимъ общности, если будемъ принимать въ этой формулѣ p за кватерніонъ съ тензоромъ 1:

$$p=\cos\frac{\omega}{2}+\sin\frac{\omega}{2}(i\xi+j\eta+k\zeta), \quad \text{гдѣ } \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1;$$

поэтому формула (6) можетъ быть получена изъ уравненій (5), если принять T равнымъ 1. Въ этомъ видѣ формула впервые была дана Кэли въ 1845 году*).

Послѣдовательное производство двухъ вращеній въ трехмѣрномъ пространствѣ выражается столь же просто какъ и въ случаѣ четырехмѣрнаго пространства (стр. 110). Если дано второе вращеніе:

$$ix''+jy''+kz''=p'.(ix'+jy'+kz')\,p'^{-1},$$

гдѣ

$$p'=\cos\frac{\omega'}{2}+\sin\frac{\omega'}{2}(i\xi'+j\eta'+k\zeta') \; (\xi',\ \eta',\ \zeta' \text{—ось, } \omega' \text{— амплитуда}),$$

то снова находимъ въ качествѣ изображенія получающагося вращенія:

$$ix''+jy''+kz''=p'.p\,.(ix+jy+kz)\,.p^{-1}.p'^{-1},$$

*) Cayley, „On certain results relating to quaternions" Coll. pap., I (1889), pag. 123.

такъ что ось ξ'', η'', ζ'' и уголъ вращенія ω'' получаются изъ равенства:

$$p'' = \cos\frac{\omega''}{2} + \sin\frac{\omega''}{2}\,(i\xi'' + j\eta'' + k\zeta'') = p' \cdot p.$$

Такимъ образомъ, мы снова получаемъ для сложенія двухъ вращеній простое и сжатое выраженіе формулъ, довольно сложныхъ въ ихъ обычномъ видѣ. Но съ другой стороны, — въ виду того, что всякій кватерніонъ, не считая нѣкотораго вещественнаго множителя (его тензора), можно въ то же время разсматривать, какъ верзоръ нѣкотораго вращенія, — мы имѣемъ въ сложеніи вращеній простой геометрическій эквивалентъ умноженія кватерніоновъ; некоммутативность произведенія кватерніоновъ соотвѣтствуетъ при этомъ тому извѣстному обстоятельству, что вообще нельзя мѣнять порядка двухъ вращеній вокругъ одной точки безъ измѣненія окончательнаго результата.

Если вы интересуетесь подробностями относительно исторіи возникновенія разсмотрѣнной нами интерпретаціи и приложеній кватерніоновъ, а также теоріи вращеній системы координатъ, то обратитесь къ въ высшей степени цѣнному реферату самого Кэли по динамикѣ: „Объ успѣхахъ, достигнутыхъ въ рѣшеніи нѣкоторыхъ спеціальныхъ проблемъ динамики" *).

Въ заключеніе я приведу нѣсколько общихъ соображеній о значеніи и распространеніи кватерніоновъ. При этомъ слѣдуетъ, конечно, отличать собственно умноженіе кватерніоновъ отъ общаго исчисленія кватерніоновъ. Первое представляетъ собой нѣчто въ высшей степени полезное, какъ достаточно видно изъ предыдущаго. Напротивъ, общее исчисленіе, какъ его понималъ Гамильтонъ, разсматриваетъ сложенія, умноженія, дѣленія кватерніоновъ въ любомъ порядкѣ, — другими словами, оно составляетъ алгебру кватерніоновъ; при-

*) Cayley, „Report on the progress of the solution of certain special problems of dynamics", Collect. math. papers, Vol. IV, pag. 552 (Cambridge 1891).

соединяя же безконечные процессы, можно дойти даже до теоріи функцій въ области кватерніоновъ. Конечно, въ виду того, что перемѣстительный законъ здѣсь не имѣетъ мѣста, все обстоитъ здѣсь совершенно иначе, чѣмъ въ теоріи обыкновенныхъ комплексныхъ перемѣнныхъ. Но есть полное основаніе утверждать, что эти общія, широко задуманныя идеи Гамильтона не оправдали себя, т. е. онѣ не вошли въ соприкосновеніе и въ живой обмѣнъ идей съ другими дисциплинами математики и ея приложеній и потому не вызвали общаго интереса.

Но въ математикѣ приходится наблюдать то же, что и въ человѣческой жизни: наряду со спокойными, объективными взглядами большинства выступаютъ страстныя индивидуальныя убѣжденія. Такъ и кватерніоны имѣютъ своихъ приверженцевъ-энтузіастовъ и своихъ страстныхъ противниковъ. Первые, особенно многочисленные въ Англіи и въ Америкѣ, прибѣгли — вотъ уже 12 лѣтъ — къ современному средству: они основали „Всемірный союзъ для развитія ученія о кватерніонахъ“ *): президентомъ его въ настоящее время состоитъ сэръ Робертъ Боллъ (Robert Ball), а основано оно въ качествѣ вполнѣ интернаціональнаго учрежденія японцемъ Кимура (Kimura), получившимъ въ Америкѣ высшее образованіе. Отъ интенсивнаго изученія кватерніоновъ ихъ сторонники ожидаютъ совершенно особеннаго преуспѣянія математики. Въ противоположность этому, вторые, противники кватерніоновъ, не хотятъ о нихъ и слышать, и этимъ отказываются даже отъ столь полезнаго умноженія: они исходятъ изъ того взгляда, что всѣ вычисленія съ кватерніонами сводятся въ конечномъ счетѣ къ вычисленію съ 4 составляющими и что единицы и таблица ихъ произведеній представляютъ излишнюю роскошь. Я думаю, что оба направленія одинаково далеко отклонились отъ правильнаго средняго пути.

4. Комплексныя числа въ преподаваніи.

Покидая теорію кватерніоновъ, я хочу закончить эту главу нѣсколькими замѣчаніями относительно той роли, какую эти

*) Любопытно, что въ составѣ Союза имѣются рѣшительные противники кватерніоновъ. *Ред.*

понятія играютъ въ школьномъ преподаваніи. Конечно, никому не приходитъ въ голову обучать въ школѣ кватерніонамъ, но зато постоянно заходитъ рѣчь объ обыкновенныхъ комплексныхъ числахъ $x+iy$. Быть можетъ, не будетъ лишено интереса, если я вмѣсто длинныхъ разсужденій о томъ, какъ это обыкновенно излагаютъ и какъ слѣдовало бы излагать, покажу вамъ на примѣрѣ трехъ книгъ изъ различныхъ эпохъ, какъ развивалось исторически преподаваніе этихъ вещей.

Я предлагаю вашему вниманію прежде всего книгу Кэстнера (Kästner), который во вторую половину XVIII столѣтія занималъ въ Гёттингенѣ руководящее положеніе. Въ то время еще обучали въ университетѣ тѣмъ вещамъ изъ элементарной математики, которыя впослѣдствіи, около тридцатыхъ годовъ XIX столѣтія, перешли въ школу; поэтому и Кэстнеръ читалъ тогда популярно-математическія лекціи, которыя посѣщались въ большомъ числѣ и не-математиками. Его учебникъ, лежавшій въ основѣ этихъ лекцій, носитъ названіе „Начальныхъ основаній математики“*); насъ интересуетъ въ данномъ случаѣ 2-ой отдѣлъ 3-й части: „Начальныя основанія анализа конечныхъ величинъ“ **). Тамъ на 20-ой страницѣ начинается изложеніе мнимыхъ величинъ приблизительно въ слѣдующихъ словахъ: „Тотъ, кто требуетъ извлечь корень съ четнымъ показателемъ изъ „отрицаемой“ величины („verneint“ — такъ тогда говорили вмѣсто „отрицательный“, „negativ“), требуетъ невозможнаго, ибо нѣтъ ни одной отрицаемой величины, которая была бы такою степенью“. Все это совершенно справедливо, но затѣмъ на страницѣ 34-ой читаемъ: „Такіе корни называются невозможными или мнимыми“. Вслѣдъ за этимъ замѣчаніемъ авторъ оперируетъ съ ними совершенно спокойно, какъ съ обыкновенными числами, не заботясь особенно объ оправданіи такого обращенія съ ними, хотя онъ только-что и отрицалъ ихъ существованіе, — какъ будто бы неразумное, благодаря присвоенію опредѣленнаго имени, внезапно стало годнымъ

*) „Mathematische Anfangsgründe“.

**) „Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen“, 3 Aufl., Göttingen, 1794.

къ употребленію. Вы узнаете здѣсь отраженіе точки зрѣнія Лейбница, согласно которой мнимыя числа представляютъ въ сущности нѣчто совершенно нелѣпое, но, тѣмъ не менѣе, они непонятнымъ образомъ ведутъ къ правильнымъ результатамъ.

Вообще Кэстнеръ писалъ весьма забавно; онъ даже получилъ извѣстность въ литературѣ своими эпиграммами. Такъ, въ введеніи къ упомянутой книгѣ онъ распространяется относительно происхожденія слова „алгебра", которое принадлежитъ, конечно, арабамъ, какъ показываетъ членъ „*al*". Подъ алгебраистомъ надо, по мнѣнію Кэстнера, понимать человѣка, который „дѣлаетъ цѣлыми" дроби, — другими словами, занимается раціональными функціями, приводитъ ихъ къ общему знаменателю и т. д. Первоначально это якобы относилось также къ дѣятельности врача-хирурга, который лечитъ при переломѣ костей. Кэстнеръ приводитъ при этомъ въ видѣ примѣра Донъ-Кихота, который отправляется къ алгебраисту съ тѣмъ, чтобы послѣдній расправилъ ему поломанныя ребра. Остается открытымъ вопросъ о томъ, держался ли здѣсь Сервантесъ принятаго словоупотребленія или же здѣсь надо видѣть сатиру.

Вторая книга вышла въ свѣтъ на много лѣтъ позже и принадлежитъ берлинскому профессору Ому: „Опытъ вполнѣ послѣдовательной системы математики" *); эта книга имѣетъ то же назначеніе, что и книга Кэстнера, и одно время была очень распространена. Но Омъ стоитъ гораздо ближе къ современной точкѣ зрѣнія, такъ какъ онъ ясно высказываетъ принципъ расширенія числовой области. „Подобно отрицательнымъ числамъ", говоритъ онъ, „должно и символъ $\sqrt{-1}$ присоединить къ вещественнымъ числамъ, какъ новую вещь". Геометрическое толкованіе, конечно, не было еще ему извѣстно: это было наканунѣ появленія упомянутой выше работы Гаусса (1831).

Наконецъ, я хочу познакомить васъ съ однимъ изъ многочисленныхъ современныхъ учебниковъ, которымъ очень много

*) M. Ohm, „Versuch eines vollständig konsequenten Systems der Mathematik". 9 Bände, Berlin, 1828. Bd. I (Arithm. u. Algebra), p. 276

пользуются: это — „Сборникъ задачъ“ Бардэя**). Здѣсь на первый планъ выступаетъ принципъ расширенія, а впослѣдствіи дается и геометрическое толкованіе. Въ этомъ, дѣйствительно, заключается теперь общепринятая точка зрѣнія школьнаго преподаванія, хотя въ отдѣльныхъ мѣстахъ развитіе и задержалось на предыдущей ступени. На мой взглядъ, такое изложеніе вопроса является наиболѣе подходящимъ для школы: не утомляя ученика систематическимъ изложеніемъ и не вдаваясь, конечно, въ абстрактно-логическія разсужденія, слѣдуетъ толковать комплексныя числа, какъ расширеніе уже извѣстнаго понятія о числѣ, избѣгая при этомъ, разумѣется, всякой мистической окраски; но прежде всего должно пріучить ученика къ наглядному геометрическому толкованію ихъ въ комплексной плоскости!

**) Bardey, „Aufgabensammlung“. Neue Auflage, besorgt von F. Pietzker und O. Presler. 5 Aufl., Leipzig, 1907 p. 96 ff.

V. Современное развитіе и строеніе математики вообще.

Настоящее отступленіе имѣетъ цѣлью бросить новый свѣтъ на общее направленіе современнаго школьнаго преподаванія и на тѣ измѣненія въ немъ, которыя намъ желательны. Позвольте мнѣ начать съ замѣчанія, что *въ исторіи развитія математики* до самаго послѣдняго времени очень ясно выступаютъ *два различныхъ ряда развитія*, которые то смѣняютъ другъ друга, то выступаютъ одновременно и независимо одинъ отъ другого, то, наконецъ, взаимно переплетаются. Различіе, которое я имѣю въ виду, трудно выразить словами, такъ какъ ни одно изъ обычныхъ подраздѣленій не подходитъ вполнѣ. Во всякомъ случаѣ вы поймете его лучше всего на конкретномъ примѣрѣ, а именно, если я покажу вамъ, какъ въ дѣйствительности пришлось бы построить *самыя элементарныя главы системы анализа* въ духѣ того и другого ряда эволюціи.

Если слѣдовать одному изъ нихъ,—мы будемъ называть его *рядомъ эволюціи A*,— то получается слѣдующая система, которая преимущественно господствуетъ теперь въ школахъ и въ элементарныхъ руководствахъ:

1) Главное мѣсто занимаетъ *формальное ученіе объ уравненіяхъ*, слѣдовательно, *дѣйствія съ цѣлыми раціональными функціями* и изученіе тѣхъ случаевъ, въ которыхъ алгебраическія уравненія разрѣшимы въ *радикалахъ*.

2) При *систематическомъ развитіи понятія о степени и ея обращеніи* возникаютъ *логариѳмы*, которые оказываются весьма полезными при числовыхъ выкладкахъ.

3) Между тѣмъ какъ до сихъ поръ геометрія оставалась совершенно изолированной отъ ариѳметики и анализа, у нея теперь производятъ заемъ, который доставляетъ первыя опредѣленія трансцендентныхъ функцій другого рода, именно тригонометрическихъ функцій; дальнѣйшая теорія этихъ функцій строится въ видѣ отдѣльной дисциплины.

4) За этимъ слѣдуетъ алгебраическій анализъ, который учитъ разлагать простѣйшія функціи въ безконечные ряды; здѣсь разсматриваются биномъ Ньютона въ общемъ видѣ, логариѳмъ и его обращеніе — показательная функція и тригонометрическія функціи. Сюда же относится общая теорія безконечныхъ рядовъ и дѣйствій съ ними. При этомъ обнаруживаются поразительныя соотношенія между названными элементарными трансцендентными функціями, въ особенности знаменитая формула Эйлера:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Эти сооотношенія представляются тѣмъ болѣе удивительными, что они устанавливаютъ связь между функціями, опредѣленія которыхъ были взяты изъ совершенно различныхъ областей.

5) За предѣлами школьной математики къ этому построенію примыкаетъ, въ качествѣ естественнаго продолженія, теорія функцій комплекснаго перемѣннаго Вейерштрасса (Weierstrass).

Теперь я представлю въ общихъ чертахъ схему второго ряда эволюціи B; здѣсь въ общемъ господствуетъ мысль аналитической геометріи, а именно — идея слиянія представленій числа и пространства. Соотвѣтственно этому начинаютъ съ

1) графическаго изображенія простѣйшихъ функцій — многочленовъ и раціональныхъ функцій одного перемѣннаго. Точки пересѣченія кривыхъ, получаемыхъ при этомъ, съ осью абсциссъ опредѣляютъ корни многочленовъ. Сюда же естественно примыкаетъ ученіе о приближенномъ рѣшеніи численныхъ уравненій.

2) Геометрическій образъ кривой является естественнымъ и нагляднымъ источникомъ для понятія о производной и объ интегралѣ; къ первому приводитъ подъемъ или паденіе кривой, ко второму площадь, заключенная между кривой и осью абсциссъ.

3) Во всѣхъ случаяхъ, когда процессъ интегрированія (или нахожденіе квадратуръ въ узкомъ смыслѣ слова) не можетъ быть выполненъ въ явномъ видѣ съ помощью раціональныхъ функцій, онъ даетъ поводъ къ возникновенію новыхъ функцій, которыя такимъ образомъ вводятся вполнѣ естественно и единообразно. Такъ, квадратура гиперболы даетъ опредѣленіе логариѳма:

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x,$$

между тѣмъ какъ квадратура круга легко сводится къ интегралу

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

—другими словами, къ обращеніямъ тригонометрическихъ функцій. Какъ вамъ извѣстно, этотъ же самый ходъ мыслей приводитъ далѣе къ высшимъ классамъ функцій, въ частности — къ эллиптическимъ функціямъ.

4) Разложеніе всѣхъ полученныхъ такимъ путемъ функцій въ безконечные степенные ряды производится опять-таки по однообразному принципу— на основаніи теоремы Тэйлора.

5) Высшимъ примѣненіемъ этого пріема является теорія комплексныхъ функцій Коши-Римана, основанная на дифференціальныхъ уравненіяхъ Коши-Римана или на теоремѣ объ интегралахъ Коши.

Если мы пожелаемъ выразить въ опредѣленныхъ словахъ результатъ этого обзора, то можно сказать, что въ

случаѣ перваго ряда A въ основѣ лежитъ тенденція къ дробленію, т. е. такое пониманіе науки, которое всю ея область разбиваетъ на рядъ частей, вполнѣ отграниченныхъ одна отъ другой, и въ каждой изъ нихъ стремится обойтись минимумомъ вспомогательныхъ средствъ, по возможности избѣгая заимствованій у сосѣднихъ областей; идеаломъ здѣсь является изящно выкристаллизованное, логически замкнутое въ себѣ построеніе каждой отдѣльной области. Въ противоположность этому, приверженецъ направленія B придаетъ главное значеніе какъ разъ органической связи между отдѣльными областями и многочисленнымъ случаямъ ихъ взаимнаго содѣйствія; соотвѣтственно этому, онъ предпочитаетъ тѣ методы, которые даютъ ему одновременное пониманіе многихъ областей съ одной и той же точки зрѣнія; его идеалъ состоитъ въ томъ, чтобы обнять всѣ математическія науки, какъ одно цѣлое.

Не можетъ быть сомнѣнія относительно того, которое изъ двухъ направленій болѣе жизненно, которое изъ нихъ способно въ большей степени заинтересовать ученика, — если только онъ не имѣетъ спеціальнаго предрасположенія къ абстрактно-математическимъ разсужденіямъ. Возьмемъ для примѣра, чтобы лучше себѣ это уяснить, функціи e^x и $\sin x$, относительно которыхъ намъ придется именно по этому же поводу еще много говорить. Въ системѣ A — къ сожалѣнію, къ ней въ данномъ случаѣ почти исключительно примыкаетъ школа — онѣ представляются совершенно разнородными: функція e^x и, соотвѣтственно, логариѳмъ появляются въ качествѣ удобнаго вспомогательнаго средства при численныхъ выкладкахъ, а $\sin x$ возникаетъ въ геометріи треугольника. Какъ же послѣ этого понять то обстоятельство, что эти функціи находятся въ столь простой зависимости между собой, и особенно то, что въ самыхъ разнообразныхъ областяхъ, не имѣющихъ ничего общаго ни съ техникой вычисленій ни съ геометріей, онѣ постоянно и неожиданно появляются, какъ естественное выраженіе царящихъ тамъ законовъ? Названія „функція сложныхъ

процентовъ“ или „законъ органическаго роста“, которыя давали функціи e^x, а, съ другой стороны, тотъ фактъ, что $\sin x$ играетъ центральную роль всюду, гдѣ идетъ рѣчь о колебаніяхъ, показываютъ, какъ далеко заходитъ возможность ихъ примѣненія. Въ системѣ же B все это представляется вполнѣ понятнымъ и соотвѣтствующимъ значенію функцій, отмѣченному съ самаго начала. Вѣдь здѣсь функціи e^x и $\sin x$ возникаютъ изъ одного источника, изъ квадратуры простыхъ кривыхъ, а это приводитъ, какъ мы увидимъ ниже, къ дифференціальнымъ уравненіямъ простѣйшаго типа $\left(\frac{de^x}{dx} = e^x,\ \frac{d^2 \sin x}{dx^2} = -\sin x\right)$, которыя составляютъ естественную основу всѣхъ упомянутыхъ приложеній.

Но для полнаго пониманія развитія математики необходимо еще вспомнить о третьемъ моментѣ C, который очень часто играетъ важную роль то отдѣльно, то вмѣстѣ съ рядами эволюціи A и B. Рѣчь идетъ о томъ, что обозначаютъ словомъ алгориѳмъ, возникшимъ изъ искаженнаго имени одного арабскаго математика. Алгориѳмомъ является въ сущности всякое строго установленное формальное счисленіе,—въ частности, буквенное счисленіе. Мы уже неоднократно отмѣчали, какую огромную роль въ развитіи науки игралъ алгориѳмическій процессъ, являясь какъ бы самостоятельной движущей силой, присущей самимъ формуламъ и оказывающей свое дѣйствіе независимо отъ намѣренія и предвидѣнія того или другого математика и часто даже вопреки его желенію. Такъ и въ началѣ развитія исчисленія безконечно-малыхъ алгориѳмъ, какъ мы еще при случаѣ увидимъ, часто побуждалъ къ созданію новыхъ понятій и дѣйствій даже прежде, чѣмъ математики могли отдать себѣ отчетъ въ ихъ допустимости. Даже на высшихъ ступеняхъ развитія эти алгориѳмическіе моменты могутъ приносить пользу и дѣйствительно приносили ее, такъ что ихъ можно назвать подпочвой развитія математики. Поэтому оставлять въ сторонѣ эти моменты, какъ играющіе въ развитіи математики исключительно формальную роль,—а это теперь въ модѣ,—значитъ не считаться съ историческимъ ходомъ развитія науки.

Я хотѣлъ бы прослѣдить теперь подробнѣе контрастъ между этими различными направленіями въ работѣ математиковъ на протяженіи всей исторіи математики; при этомъ я, разумѣется, буду имѣть возможность упомянуть лишь самые важные моменты развитія. Тѣмъ не менѣе различіе между направленіями A и B, проходящее черезъ всю область математики, обнаружится здѣсь еще яснѣе, чѣмъ въ приведенномъ выше сопоставленіи, при которомъ мы ограничивались областью анализа.

Если начнемъ съ древнихъ грековъ, то мы найдемъ рѣзкое разграниченіе чистой и прикладной математики, которое восходитъ къ Платону и Аристотелю. Къ чистой математикѣ относится прежде всего извѣстное Евклидово построеніе геометріи, къ прикладной принадлежатъ въ особенности числовыя операціи, такъ называемая логистика ($\lambda \acute{o} \gamma o \varsigma$ = всеобщее число; ср. стр. 49). При этомъ къ послѣдней относились довольно презрительно, — предразсудокъ, который во многихъ случаяхъ сохранился до сихъ поръ, но во всякомъ случаѣ, большей частью, только у людей, которые сами не умѣютъ вычислять. Этому положенію логистики могло содѣйствовать отчасти то обстоятельство, что она развивалась въ тѣсной связи съ тригонометріей и съ потребностями практическаго землемѣрія, которое съ древнихъ временъ казалось людямъ недостаточно благороднымъ занятіемъ. Конечно, она снова была нѣсколько реабилитирована тѣмъ, что безъ нея не могла обойтись другая наука, которая хотя и родственна геодезіи, но въ противоположность ей всегда считалась одной изъ самыхъ благородныхъ,— астрономія. Эта греческая манера научной работы съ ея строгимъ размежеваніемъ отдѣльныхъ областей, каждая изъ которыхъ излагалась затѣмъ въ видѣ какъ-бы застывшаго логическаго построенія, принадлежитъ, конечно, цѣликомъ ряду эволюціи A. Тѣмъ не менѣе грекамъ не были чужды и разсужденія въ духѣ B; они, повидимому, служили имъ для эвристическихъ цѣлей и для перваго сообщенія ихъ открытій; однако, для окончательнаго изложенія форма A казалась имъ незамѣнимой. Это видно изъ недавно открытаго манускрипта

Архимеда*), въ которомъ послѣдній сообщаетъ вычисленія объемовъ тѣлъ въ вполнѣ современной живой формѣ.

Наряду съ греками въ исторіи математики въ древности особенное значеніе имѣютъ индусы, какъ творцы современной системы счисленія, и позднѣе арабы, передавшіе ее намъ; у послѣднихъ встрѣчаются также начатки буквеннаго счисленія. Ясно, что эти успѣхи принадлежатъ алгориѳмическому ряду эволюціи C.

Переходя къ новому времени, мы можемъ прежде всего отмѣтить около 1500 года начало возрожденія математическаго творчества, которое принесло съ собой цѣлый рядъ замѣчательныхъ открытій. Для примѣра я назову формальное разрѣшеніе кубическаго уравненія (формула Кардана), которая находится въ „Ars magna" Кардана (Cardano), появившейся въ Нюренбергѣ въ 1545 г.; это въ высшей степени цѣнное произведеніе содержитъ вообще зародыши современной алгебры, выходящіе за предѣлы схемы античной математики. Конечно, это не составляетъ собственной заслуги Кардана, такъ какъ онъ, повидимому, не самъ открылъ свою знаменитую формулу, но заимствовалъ ее, какъ и многое другое, у другихъ авторовъ.

Начиная съ 1550 года на первый планъ выступаютъ тригонометрическія вычисленія; появляются первыя большія тригонометрическія таблицы, вызванныя потребностями астрономіи, относительно которой я ограничусь однимъ только именемъ Коперника. Начиная приблизительно съ 1600 года, непосредственно къ этому примыкаетъ развитіе логариѳмовъ; первыя логариѳмическія таблицы, составленныя шотландцемъ Неперомъ (Napier или Neper) въ 1614 году, содержатъ только логариѳмы тригонометрическихъ функцій. Такимъ образомъ, мы видимъ, что въ эти 100 лѣтъ развитіе математики въ точности слѣдовало схемѣ A.

*) Heiberg und Zeuthen, „Eine neue Schrift des Archimedes". Leipzig, 1907. Имѣется въ русскомъ переводѣ: Гейбергъ, „Новое сочиненіе Архимеда". Подъ редакціей и съ предисловіемъ прив.-доцента И. Ю. Тимченко. Одесса, „Mathesis".

Теперь мы приходимъ къ новѣйшему времени — къ дальнѣйшему теченію XVII столѣтія. Здѣсь на первый планъ выступаетъ исключительно направленіе *B*. Въ 1637 г. появляется аналитическая геометрія Декарта, которая устанавливаетъ связь между числомъ и пространствомъ, играющую основную роль во всемъ послѣдующемъ развитіи математики; это произведеніе легко достать въ новомъ изданіи*). Въ связи съ этимъ тотчасъ выступаютъ двѣ великія проблемы XVII столѣтія: проблема касательныхъ и проблема квадратуры, т. е. проблемы дифференцированія и интегрированія. Для развитія дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія въ собственномъ смыслѣ недостаетъ еще только одного факта: еще не знаютъ, что обѣ проблемы находятся въ очень тѣсной связи, что одна представляетъ обращеніе другой; въ этомъ заключалось, повидимому, ядро того громаднаго прогресса, который осуществился въ концѣ столѣтія.

Но еще раньше, въ томъ же столѣтіи, возникаетъ ученіе о безконечныхъ рядахъ, въ особенности о степенныхъ рядахъ, и притомъ не какъ самостоятельная дисциплина въ смыслѣ алгебраическаго анализа, но въ тѣснѣйшей связи съ проблемой квадрированія. Меркаторъ (латинская передѣлка нѣмецкаго имени „Кремеръ“: Krämer — торговецъ), въ особенности извѣстный, какъ творецъ Меркаторской проекціи, первый проложилъ здѣсь путь; ему принадлежитъ смѣлая идея для разложенія въ рядъ $\log(1+x)$ выполнить дѣленіе въ дроби $\frac{1}{1+x}$ и проинтегрировать по частямъ получившійся рядъ:

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1-x+x^2-x^3+\cdots)dx =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

*) R. Descartes, „La Géométrie“. Nouv. éd. Paris 1886.

Это въ точности соотвѣтствуетъ ходу его мыслей, хотя онъ, конечно, пользуется не нашими простыми знаками $\int$, dx и т. д., но болѣе тяжеловѣснымъ языкомъ. Послѣ 1660 года этимъ процессомъ сталъ пользоваться *Ньютонъ*, который построилъ рядъ для выраженія бинома съ любымъ показателемъ. Конечно, имъ руководили при этомъ *только заключенія по аналогіи* съ извѣстными ему простѣйшими случаями; онъ не владѣлъ строгимъ доказательствомъ и не зналъ границъ приложимости этого разложенія,—въ этомъ снова обнаруживается *алгориѳмъ*, т. е. *моментъ* C. Примѣняя этотъ рядъ къ выраженію $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, онъ получаетъ по способу *Меркатора рядъ для* $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$. Съ помощью очень искуснаго *обращенія этого ряда*, а также ряда для функціи $\log x$, онъ получаетъ *ряды для* $\sin x$ и e^x. Въ заключеніе этой цѣпи открытій слѣдуетъ назвать, наконецъ, *Тэйлора* (Taylor), нашедшаго въ 1714 году свой *общій принципъ для разложенія функцій въ степенные ряды*.

Возникновеніемъ исчисленія безконечно малыхъ въ собственномъ смыслѣ въ концѣ XVII столѣтія мы обязаны, какъ извѣстно, *Лейбницу* и *Ньютону*. У *Ньютона* основной идеей является *представленіе о теченіи*; обѣ перемѣнныя x, y разсматриваются, какъ функціи $\varphi(t)$, $\psi(t)$ времени t; между тѣмъ, какъ течетъ время, „*текутъ*“ непрерывно и эти функціи. Соотвѣтственно этому перемѣнная называется у *Ньютона* fluens, а то, что мы называемъ производной, онъ обозначаетъ, какъ „*флюксію*“ $\dot{x}$, $\dot{y}$. Мы видимъ, какъ тутъ *все сплошь основано на наглядномъ представленіи*.

То же относится и къ изложенію *Лейбница*, *первая работа* котораго появилась въ 1684 *году*. Онъ самъ называетъ своимъ главнѣйшимъ открытіемъ *принципъ непрерывности во всякомъ процессѣ природы*, т. е. положеніе: „*Natura non facit saltum*“. На этомъ представленіи процессовъ природы онъ основываетъ свои математическія построе-

нія, — опять-таки черта, типичная для системы B. Съ другой стороны, у Лейбница большую роль играетъ вліяніе алгориѳма (C); отъ него ведутъ начало столь цѣнныя, съ точки зрѣнія алгориѳма, обозначенія dx и $\int f(x)\,dx$.

Въ цѣломъ, результатъ этого обзора заключается въ томъ, что великія открытія XVII вѣка, по существу, цѣликомъ принадлежатъ эволюціонному ряду B.

Въ XVIII столѣтіи этотъ періодъ открытій продолжается сперва въ томъ же направленіи; въ качествѣ наиболѣе блестящихъ именъ приходится назвать Эйлера (Euler) и Лагранжа (Lagrange). Въ эту эпоху развиваются, говоря кратко, ученіе о дифференціальныхъ уравненіяхъ въ самомъ общемъ смыслѣ, включая варіаціонное исчисленіе, а также вырастаетъ зданіе аналитической геометріи и аналитической механики; всюду мы здѣсь видимъ живое движеніе впередъ. Это напоминаетъ эпоху въ исторіи географіи послѣ открытія Америки, когда новыя страны изслѣдовали и объѣзжали вдоль и поперекъ. Но совершенно подобно тому, какъ тамъ еще долго не было и рѣчи о точныхъ измѣреніяхъ, такъ что въ первое время имѣли совершенно ложныя представленія даже объ общемъ положеніи новой части свѣта (вѣдь думалъ же вначалѣ Колумбъ, что открылъ восточный берегъ Азіи), — такъ и здѣсь, во вновь завоеванныхъ странахъ новой математической части свѣта, анализа безконечно-малыхъ, въ первое время были довольно далеки отъ надежной логической постановки. Даже по вопросу объ ихъ отношеніяхъ къ старымъ, хорошо извѣстнымъ дисциплинамъ, впадали подчасъ въ заблужденія, считая исчисленіе безконечно-малыхъ чѣмъ-то мистическимъ, не допускающимъ точнаго логическаго анализа. До чего шатко было основаніе, на которомъ первоначально стояли творцы новаго анализа, стало вполнѣ яснымъ лишь тогда, когда понадобилось новыя отрасли математики изложить въ доступномъ видѣ въ руководствахъ; тогда сразу обнаружилось, что направленіе B, до сихъ поръ единственно господствовавшее, здѣсь уже безсильно, и Эйлеръ первый оставилъ его. Хотя въ немъ самомъ исчисленіе безконечно-малыхъ и не вызывало никакихъ сомнѣній, но для начинающихъ оно, по мнѣнію

Эйлера, представляло слишкомъ много трудностей и сомнѣній. Исходя изъ этихъ дидактическихъ соображеній, онъ счелъ нужнымъ предпослать ему въ видѣ отдѣльнаго курса подъ названіемъ „Введеніе въ анализъ безконечно-малыхъ" („Introductio in analysin infinitorum", 1748) ту дисциплину, которую мы теперь называемъ алгебраическимъ анализомъ. Къ этому курсу Эйлеръ относитъ въ особенности ученіе о безконечныхъ рядахъ и другихъ безконечныхъ процессахъ, которое служитъ ему потомъ фундаментомъ при построеніи исчисленія безконечно-малыхъ.

Гораздо болѣе радикальный путь прокладываетъ почти 50 лѣтъ спустя Лагранжъ въ своей „Теоріи аналитическихъ функцій" (Lagrange, „Théorie des fonctions analytiques", 1797). Свои сомнѣнія относительно современнаго ему обоснованія исчисленія безконечно-малыхъ онъ находитъ возможнымъ устранить лишь тѣмъ, что онъ отказывается отъ него, какъ отъ общей дисциплины, понимая подъ нимъ просто собраніе формальныхъ правилъ, относящихся къ извѣстнымъ спеціальнымъ функціямъ; а именно, онъ разсматриваетъ исключительно такія функціи, которыя даны въ видѣ степенныхъ рядовъ:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

и такія именно функціи онъ и называетъ аналитическими, т. е. такими, которыя встрѣчаются въ анализѣ и съ которыми послѣдній дѣйствительно можетъ что-либо предпринять. Производная такой функціи $f(x)$ опредѣляется вполнѣ формально съ помощью второго такого же степенного ряда, какъ мы это еще увидимъ впослѣдствіи, и взаимная связь между такими рядами и составляетъ предметъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Такое самоограниченіе чисто-формальными построеніями, конечно, устраняло для того времени цѣлый рядъ затрудненій.

Вы видите, что эта дѣятельность Эйлера и Лагранжа цѣликомъ принадлежитъ направленію A

замѣняя наглядно-генетическое развитіе строго замкнутымъ въ себѣ самомъ кругомъ мыслей. Оба эти сочиненія имѣли огромное вліяніе на школьное преподаваніе; если въ настоящее время въ средней школѣ изучаютъ безконечные ряды или рѣшаютъ уравненія разложеніемъ по степенямъ по такъ называемому способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, но отказываются включить въ ея программу дифференціальное и интегральное исчисленіе въ собственномъ смыслѣ слова, — то это значитъ, что наша школа вполнѣ еще находится подъ вліяніемъ Эйлера и Лагранжа.

Наиболѣе существеннымъ для начала XIX столѣтія, къ которому мы теперь переходимъ, является строгое обоснованіе высшаго анализа посредствомъ признаковъ сходимости, о которыхъ раньше не заботились. Въ XVIII столѣтіи въ этомъ отношеніи царитъ еще райское состояніе, въ которомъ не различаютъ добра и зла, сходящагося и расходящагося ряда; даже въ „Introductio“ Эйлера мирно уживаются рядомъ сходящіеся и расходящіеся ряды. Но въ началѣ новаго столѣтія Гауссъ (Gauss) и Абель (Abel) публикуютъ первыя точныя изслѣдованія о сходимости, а въ двадцатыхъ годахъ Коши (Cauchy) развиваетъ въ своихъ лекціяхъ и сочиненіяхъ первое точное обоснованіе исчисленія безконечно-малыхъ въ современномъ духѣ. Онъ не только даетъ точное опредѣленіе производной и интеграла, какъ предѣловъ конечныхъ отношеній и суммъ, какъ это уже дѣлали иногда и до него, но впервые строитъ на немъ послѣдовательную систему преподаванія анализа, выдвигая на первый планъ теорему о среднемъ значеніи. Впослѣдствіи мы еще остановимся на этомъ подробнѣе. Эти теоріи принадлежатъ, конечно, направленію *A*, такъ какъ онѣ систематично логически разрабатываютъ извѣстную область, изолированно отъ другихъ областей. Между тѣмъ эти теоріи не оказали никакого вліянія на нашу школу, хотя онѣ были вполнѣ способны разрушить старые предразсудки противъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія.

Изъ дальнѣйшаго развитія математики въ XIX вѣкѣ я отмѣчу лишь очень немногое. Прежде всего я назову нѣкоторые

успѣхи, принадлежащіе направленію *B*: возникаютъ новая геометрія, математическая физика и теорія функцій комплекснаго перемѣннаго по Коши и Риману. Вождями при возникновеніи этихъ трехъ обширныхъ областей были сперва французы. Здѣсь умѣстно будетъ сказать нѣсколько словъ о стилѣ математическаго изложенія. У Евклида вы все найдете расчлененнымъ по схемѣ: „предположеніе, утвержденіе, доказательство“, къ которой онъ еще присоединяетъ „опредѣленіе“ (отграниченіе области, внутри которой дѣйствительны разсужденія); въ широкихъ кругахъ вы можете встрѣтить мнѣніе, по которому вся математика всегда движется по такой схемѣ въ четыре такта. А между тѣмъ, какъ разъ въ тотъ періодъ, о которомъ мы сейчасъ говоримъ, у французовъ стала вырабатываться новая художественная форма математическаго изложенія, которую можно называть искусно расчлененной дедукціей. Сочиненія Монжа или, чтобы назвать болѣе новую книгу, „Курсъ анализа“ Пикара (Picard, „Traité d'analyse“) читаются совсѣмъ, какъ хорошо написанный увлекательный романъ. Это стиль, свойственный манерѣ *B*, тогда какъ Евклидово изложеніе вполнѣ родственно манерѣ *A*.

Изъ нѣмцевъ, сдѣлавшихъ великія завоеванія въ названныхъ областяхъ, я назову еще Якоби и Римана и присоединю сюда же изъ новѣйшаго времени Клебша и норвежца Ли. Всѣ они существенно принадлежатъ направленію *B*, но только по временамъ у нихъ замѣчается алгориѳмическая тенденція.

Съ Вейерштрассомъ снова сильнѣе выступаетъ на первый планъ методъ мышленія *A*, — начиная съ 1860 г., когда онъ сталъ читать свои лекціи въ Берлинѣ. Теорію функцій Вейерштрасса я уже приводилъ подъ литерой *A*. Въ равной степени принадлежатъ типу *A* новѣйшія изслѣдованія объ аксіомахъ геометріи; здѣсь мы имѣемъ изслѣдованія совсѣмъ въ духѣ Евклида, которыя и по изложенію снова приближаются къ указанному выше типу.

Этимъ мы закончимъ нашъ краткій историческій обзоръ; въ качествѣ его результата мы можемъ сказать, что за цѣлыя столѣтія исторіи математики оба наши главнѣйшія

направленія развитія появляются равномѣрно и что каждое изъ нихъ и часто какъ разъ ихъ смѣна приводили къ великимъ успѣхамъ науки. Такимъ образомъ, математика только тогда сможетъ равномѣрно развиваться по всѣмъ направленіямъ, когда ни одинъ изъ видовъ изслѣдованія не будетъ оставленъ въ пренебреженіи. Пусть каждый математикъ работаетъ въ томъ направленіи, къ которому лежитъ его сердце.

Но школьное преподаваніе, къ сожалѣнію, находится, какъ я уже отмѣчалъ, уже съ давнихъ поръ подъ одностороннимъ господствомъ направленія A. Всякое движеніе въ пользу реформы математическаго образованія должно, поэтому, ратовать за болѣе сильное выдѣленіе направленія B. При этомъ я считаю необходимымъ прежде всего провести въ преподаваніе генетическій методъ, болѣе настойчиво подчеркивать наглядныя, пространственныя представленія и, въ особенности, выдвинуть на первый планъ понятіе о функціи, сліяя при этомъ представленія о пространствѣ и числѣ. Этой же цѣли должны служить и настоящія лекціи, тѣмъ болѣе, что въ тѣхъ книгахъ по элементарной математикѣ, къ которымъ мы вообще всегда обращаемся за совѣтомъ, каковы книги Вебера и Вельштейна, Тропфке, Симона, почти исключительно представлено направленіе A; на этотъ контрастъ я указывалъ уже во введеніи къ этому курсу.

АЛГЕБРА



ВВЕДЕНІЕ.

Я начну съ того, что назову вамъ нѣсколько учебниковъ по алгебрѣ, чтобы немного оріентировать васъ среди существующей весьма обширной литературы. Прежде всего я упомяну о „Cours d'algèbre" Серре (Serret)*), который раньше и у насъ былъ въ большомъ ходу и имѣетъ за собой крупныя заслуги. Но теперь у насъ пользуются распространеніемъ два большихъ нѣмецкихъ учебника: „Lehrbuch der Algebra" Г. Вебера (H. Weber, 2. Aufl., Braunschweig 1898/9) и „Vorlesungen über Algebra" Е. Нетто (E. Netto, Leipzig 1896/1900), каждый въ двухъ томахъ; оба содержатъ чрезвычайно много трудныхъ вещей и вообще предназначены, главнымъ образомъ, для дальнѣйшаго спеціальнаго изученія алгебры; для обычныхъ потребностей кандидатовъ на должность учителя они кажутся мнѣ слишкомъ обширными и, во всякомъ случаѣ, слишкомъ дорогими. Въ большей степени отвѣчаютъ такимъ требованіямъ и легко читаются „Лекціи по алгебрѣ" Бауера**), которыя почти не выходятъ за предѣлы того, что долженъ знать учитель. Съ практической стороны, въ смыслѣ численнаго рѣшенія уравненій, можетъ служить дополненіемъ къ этимъ лекціямъ небольшая книжка нашего профессора Рунге „Практика уравненій"***), которую я могу только настойчиво вамъ рекомендовать.

Обращаясь теперь къ нашей темѣ, я долженъ предупредить васъ, что, по самому характеру этихъ лекцій, я, конечно, не

*) А. Серре. „Курсъ высшей алгебры".

**) G. Bauer. „Vorlesungen über Algebra". Leipzig 1903.

***) C. Runge. „Praxis der Gleichungen". Sammlung Schubert XIV. Leipzig 1900.

могу дать здѣсь систематическаго изложенія алгебры; я могу лишь дать отдѣльныя выдержки, такъ что будетъ наиболѣе цѣлесообразнымъ, если я выдѣлю такія вещи, которыя несправедливо опускаются другими авторами и которыя въ то же время способны представить въ особенномъ освѣщеніи школьное обученіе. Все мое изложеніе будетъ группироваться вокругъ одного пункта, а именно вокругъ примѣненія графическихъ и вообще геометрически наглядныхъ методовъ къ рѣшенію уравненій. Это составляетъ содержаніе крайне обширной и богатой различными соотношеніями главы, изъ которой я, конечно, опять-таки могу выхватить только рядъ наиболѣе важныхъ и интересныхъ вещей; мы будемъ при этомъ вступать въ органическую связь съ различнѣйшими областями, занимаясь, такимъ образомъ, математикой въ смыслѣ нашего эволюціоннаго ряда B.

I. Вещественныя уравненія съ вещественными неизвѣстными.

Мы ограничимся сначала уравненіями съ вещественными коэффиціентами и вещественными значеніями неизвѣстныхъ. Комплексными величинами мы займемся позже. Начнемъ съ очень простого частнаго случая.

1. Уравненія, содержащія одинъ параметръ.

Это уравненія такого типа:

$$f(x, \lambda) = 0.$$

Мы получимъ наиболѣе простое геометрическое толкованіе ихъ, если замѣнимъ λ второй перемѣнной y и станемъ разсматривать

$$f(x, y) = 0$$

какъ уравненіе кривой въ плоскости xy-овъ (рис. 1). Точки пересѣченія этой кривой съ параллелью $y = \lambda$ къ оси абсциссъ даютъ вещественные корни уравненія $f(x, \lambda) = 0$. Если приближенно начертить эту кривую,— что при не слишкомъ сложныхъ функціяхъ f нетрудно,— то, перемѣщая параллель, легко можно видѣть, какъ при измѣненіи λ измѣняется число вещественныхъ корней. Особенно при-

годенъ этотъ пріемъ, когда f есть линейная функція отъ λ, т. е. для изслѣдованія уравненій вида

$$\varphi(x) - \lambda \cdot \psi(x) = 0;$$

дѣйствительно, въ этомъ случаѣ уравненіе $y = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ даетъ раціональную кривую, и ее поэтому легко построить. Въ этихъ слу-

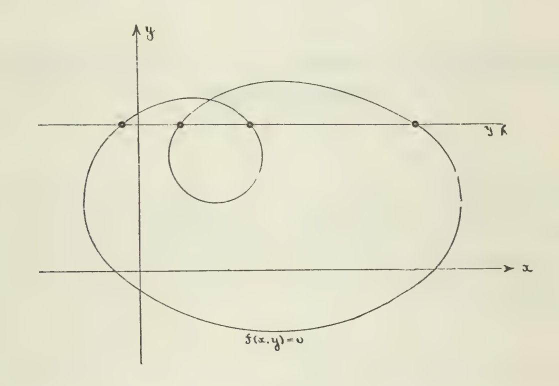


Рис. 1.

чаяхъ указаннный методъ можетъ быть съ пользой примѣненъ и для дѣйствительнаго вычисленія корней.

Разсмотримъ въ качествѣ примѣра квадратное уравненіе

$$x^2 + ax - \lambda = 0.$$

Кривая $y = x^2 + ax$ представляетъ параболу (рис. 2), такъ что сразу видно, для какихъ значеній λ число вещественныхъ корней уравненія равно 2, 1, 0, соотвѣтственно горизонталямъ, пересѣкающимъ параболу въ 2, 1, 0 точкахъ. Выполненіе такихъ простыхъ и наглядныхъ построеній кажется мнѣ весьма полезнымъ и для высшихъ классовъ школы. Въ качествѣ второго примѣра возьмемъ кубическое уравненіе $x^3 + ax^2 + bx - \lambda = 0$, которое даетъ намъ кубическую параболу $y = x^3 + ax^2 + bx$. Смотря по значенію коэффиціентовъ a, b, эта парабола имѣетъ раз-

личный видъ. На рис. 3 принято, что уравненіе $x^2+ax+b=0$ имѣетъ вещественные корни; тогда видно, какъ параллели раздѣляются на такія, которыя встрѣчаютъ параболу въ одной точкѣ, и на такія, которыя встрѣчаютъ её въ трехъ вещественныхъ точкахъ, тогда какъ въ двухъ предѣльныхъ положеніяхъ имѣемъ по одному двойному корню.

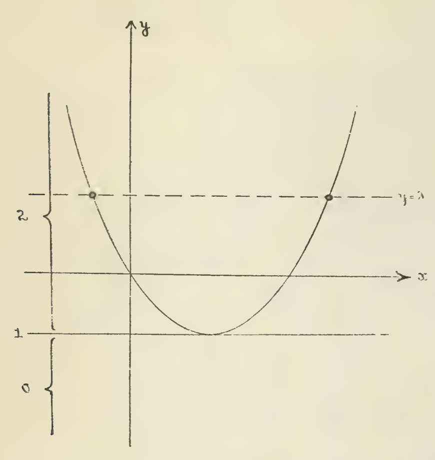


Рис. 2.

2. Уравненія съ двумя параметрами.

Здѣсь графическая постановка проблемы требуетъ больше искусства, но за то и результаты оказываются болѣе значительными и болѣе интересными. Ограничимся тѣмъ случаемъ, когда оба параметра λ, μ входятъ линейно; неизвѣстную уравненія обозначимъ черезъ t; тогда уравненіе, вещественные корни котораго требуется опредѣлить, будетъ имѣть видъ:

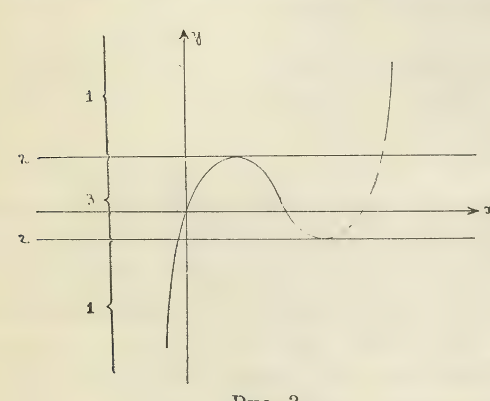


Рис. 3.

$$\varphi(t)+\lambda.\chi(t)+\mu.\psi(t)=0, \tag{1}$$

гдѣ φ, χ, ψ обозначаютъ нѣкоторые многочлены относительно t.

Если x, y обозначаютъ обыкновенныя прямоугольныя координаты точки на плоскости, то всякая прямая въ этой плоскости изобразится уравненіемъ:

$$y+ux+v=0, \tag{2}$$

и мы можемъ назвать u, v координатами прямой: $(-u)$ есть тангенсъ угла, образуемый прямой съ осью x-овъ, $(-v)$ выражаетъ отрѣзокъ, отсѣкаемый прямою на оси y-овъ (рис. 4). Если считать точку и прямую и соотвѣтственно координаты точки и прямой равноправными понятіями, то этотъ взглядъ окажется особенно важнымъ въ дальнѣйшемъ. Мы можемъ сказать, что уравненіе

$$y + ux + v = 0$$

означаетъ соединенное положеніе прямой $u|v$ и точки $x|y$, т. е. что точка лежитъ на прямой, а прямая проходитъ черезъ точку.

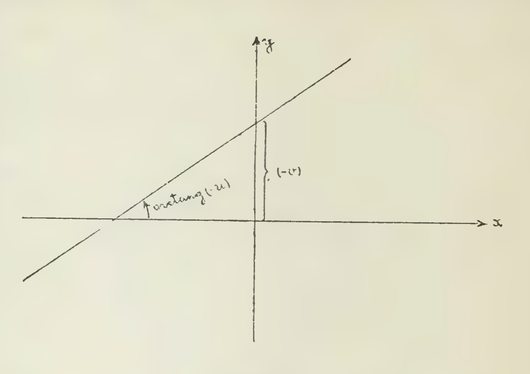


Рис. 4.

Чтобы истолковать геометрически наше уравненіе (1), приведемъ его къ виду (2), чего можно достигнуть двумя, существенно различными, способами:

A) Полагаемъ:

$$y = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}, \quad x = \frac{\chi(t)}{\psi(t)}, \tag{3a}$$

$$u = \lambda, \quad v = \mu. \tag{3b}$$

Уравненія (3a) изображаютъ при перемѣнномъ t вполнѣ опредѣленную раціональную кривую въ плоскости xy, такъ называемую „опредѣляющую кривую“ (Normkurve) уравненія (1); всякая ея точка соотвѣтствуетъ опредѣленному значенію t, такъ что на ней можно нанести скалу значеній t. На основаніи соотношеній (3a) можно непосредственно вычислить сколько угодно точекъ кривой и построить такимъ образомъ достаточно точно опредѣляющую кривую съ помощью ея скалы. Для каждой опредѣленной пары параметровъ λ, μ уравненія (3b) изображаютъ нѣкоторую прямую въ плоскости; тогда уравненіе (1), согласно сказанному, выражаетъ, что точка t опредѣляющей кривой лежитъ на этой прямой. Разсматривая

всѣ дѣйствительныя пересѣченія опредѣляющей кривой съ этой прямой и отсчитывая значенія параметра въ нихъ по скалѣ кривой, можно получить всѣ вещественные корни уравненія (1).

Для лучшаго уясненія послужитъ намъ квадратное уравненіе

$$t^2 + \lambda t + \mu = 0.$$

Опредѣляющая кривая представляетъ въ этомъ случаѣ параболу:

$$y = t^2, \quad x = t \quad \text{или} \quad y = x^2,$$

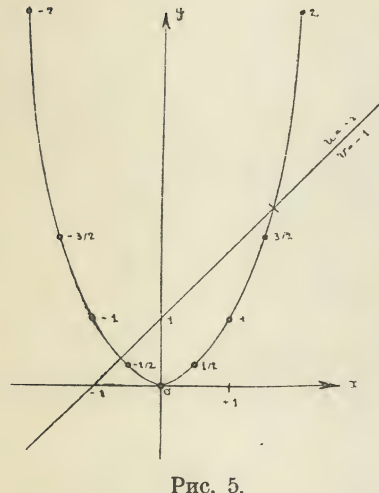


Рис. 5.

изображенную на рис. 5 съ намѣченной скалой, по которой сразу можно прочесть вещественные корни нашего уравненія, какъ пересѣченія параболы съ прямою $y + \lambda x + \mu = 0$. Такъ, рисунокъ 5 показываетъ, что корни уравненія $t^2 - t - 1 = 0$ лежатъ между $^3/_2$ и 2 и между $- ^1/_2$ и -1. Существенное отличіе отъ предыдущаго метода заключается въ томъ, что здѣсь мы разсматриваемъ всѣ прямыя плоскости, тогда какъ раньше мы брали только горизонтали. За то теперь мы можемъ, пользуясь одной и той же разъ начерченной параболой, приближенно рѣшить всѣ возможныя квадратныя уравненія. Послѣдній методъ оказывается дѣйствительно пригоднымъ для практическихъ цѣлей, если только не требуется значительной точности.

Аналогично можно трактовать всѣ кубическія уравненія, которыя, какъ извѣстно, посредствомъ линейнаго преобразованія приводятся къ такъ называемой „приведенной формѣ“:

$$t^3 + \lambda t + \mu = 0;$$

опредѣляющей кривой здѣсь служитъ кубическая парабола (рис. 6):

$$y = t^3, \quad x = t \quad \text{или} \quad y = x^3.$$

И этотъ методъ представляется мнѣ вполнѣ умѣстнымъ въ школѣ; ученики находятъ, несомнѣнно, громадное удовольствіе въ самостоятельномъ вычерчиваніи подобныхъ кривыхъ.

B) Второй методъ толкованія уравненія (1) получается изъ перваго, если примѣнить принципъ двойственности, т. е. если обмѣнять мѣстами координаты точки и координаты прямой. Для этого перепишемъ уравненіе (2) въ обратномъ порядкѣ:

$$v + xu + y = 0$$

и приведемъ уравненіе (1) къ этому виду, полагая:

$$v = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}, \quad u = \frac{\chi(t)}{\psi(t)}, \quad (4a)$$

$$x = \lambda, \quad y = \mu. \quad (4b)$$

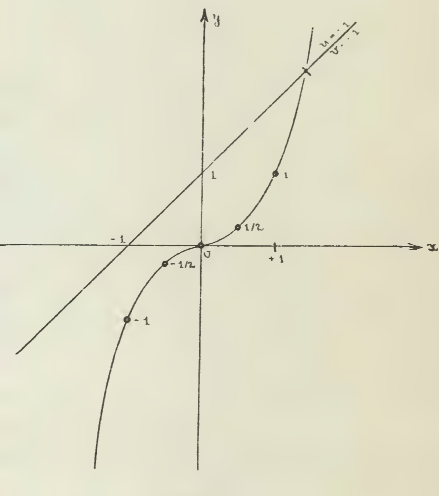


Рис. 6.

Уравненія (4a) представляютъ, при перемѣнномъ t, семейство прямыхъ, огибающихъ нѣкоторую опредѣленную кривую, „опредѣляющую кривую“ уравненія (1) въ этомъ новомъ его истолкованіи; это раціональная кривая опредѣленнаго класса, такъ какъ она выражается въ координатахъ прямой посредствомъ раціональныхъ функцій одного параметра. Каждая касательная и вмѣстѣ съ нею ея точка касанія получаются при опредѣленномъ значеніи t, такъ что мы снова получаемъ нѣкоторую скалу на опредѣляющей кривой. Нанося на чертежъ достаточно много касательныхъ на основаніи уравненій (4a), можно получить кривую и скалу съ любой степенью точности. При опредѣленныхъ значеніяхъ λ, μ уравненіе (1) говоритъ, что каса-

тельная t къ опредѣляющей кривой (4a) проходитъ черезъ точку $\lambda|\mu$, выражаемую уравненіями (4b); такимъ образомъ можно получить всѣ вещественные корни уравненія (1), если опредѣлить тѣ значенія параметра t, которыя принадлежатъ всѣмъ касательнымъ къ опредѣляющей кривой, проходящимъ черезъ точку $x = \lambda$, $y = \mu$.

Для лучшаго уясненія разсмотримъ снова тѣ же примѣры. Для квадратнаго уравненія

$$t^2 + \lambda t + \mu = 0$$

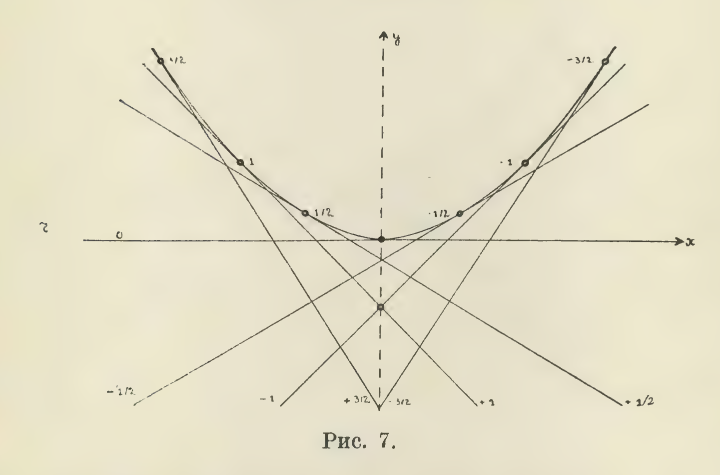


Рис. 7.

опредѣляющей кривой является огибающая прямыхъ

$$v = t^2, \quad u = t;$$

это — парабола съ вершиной въ началѣ координатъ (рис. 7). Чертежъ даетъ сразу вещественные корни, соотвѣтствующіе данной парѣ значеній λ, μ въ видѣ параметровъ (t) касательныхъ къ параболѣ изъ точки $\lambda|\mu$.

Для кубическаго уравненія

$$t^3 + \lambda t + \mu = 0$$

опредѣляющая кривая

$$v = t^3, \quad u = t$$

есть кривая 3-го класса, имѣющая точку заостренія въ началѣ координатъ (рис. 8).

Этотъ методъ можно представить еще въ нѣсколько другомъ видѣ. Если разсматривать только такъ называемое трехчленное уравненіе

$$t^m + \lambda t^n + \mu = 0,$$

то система касательныхъ опредѣляющей кривой будетъ представлена уравненіемъ, содержащимъ параметръ t:

$$f(t) = t^m + xt^n + y = 0.$$

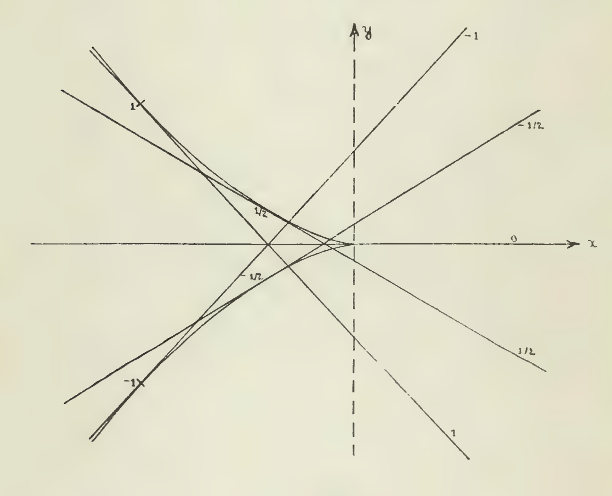


Рис. 8.

Чтобы получить уравненіе опредѣляющей кривой въ точечныхъ координатахъ, надо, какъ извѣстно, исключить параметръ t изъ этого уравненія и изъ уравненія, получаемаго изъ него дифференцированіемъ по t: *)

$$f'(t) = mt^{m-1} + nxt^{n-1} = 0;$$

дѣйствительно, опредѣляющая кривая есть огибающая семейства прямыхъ, содержащая точки пересѣченія каждыхъ двухъ слѣду-

*) Ибо опредѣляющая кривая есть не что иное, какъ огибающая семейства кривыхъ, выражаемыхъ уравненіемъ $f(t) = 0$ въ координатахъ x, y и при параметрѣ t. *Ред.*

ющихъ другъ за другомъ прямыхъ (t и $t+dt$). Вмѣсто того, чтобы исключать t, выразимъ изъ обоихъ уравненій x, y черезъ t:

$$x = -\frac{m}{n} t^{m-n}, \quad y = \frac{m-n}{n} t^{m}; \qquad (5^{a})$$

это есть уравненіе опредѣляющей кривой въ координатахъ точки.

Для опредѣляющихъ кривыхъ квадратнаго и кубическаго уравненія, взятыхъ нами для примѣра, получаемъ по этому способу:

$$x = -2t, \quad y = t^2,$$
$$x = -3t^2, \quad y = 2t^3;$$

эти уравненія дѣйствительно выражаютъ кривыя на рис. 7 и 8.

Замѣчу, что этотъ пріемъ проводится на практикѣ профессоромъ Рунге (Runge) въ его лекціяхъ и упражненіяхъ, и что онъ оказывается особенно цѣлесообразнымъ для дѣйствительнаго рѣшенія уравненій. И въ школѣ можно рекомендовать использовать при случаѣ тотъ или другой изъ этихъ чертежей.

Если сравнить между собой оба разсмотрѣнныхъ нами способа, то окажется, что по отношенію къ одной опредѣленной, но весьма важной, цѣли второй способъ имѣетъ существенное преимущество, — а именно: въ тѣхъ случаяхъ, когда хотятъ получить наглядное представленіе о совокупности всѣхъ тѣхъ уравненій опредѣленнаго типа, которыя имѣютъ данное число вещественныхъ корней.

Такія совокупности уравненій изображаются при первомъ способѣ системами прямыхъ, а при второмъ — областями точекъ; послѣднія формы совокупностей, въ силу нѣкоторой особенности нашихъ геометрическихъ представленій или же въ силу привычки, намъ существенно легче наглядно себѣ представить, чѣмъ первыя.

Теперь я хочу показать на примѣрѣ квадратнаго уравненія, чего можно достигнуть въ этомъ направленіи; въ этомъ случаѣ черезъ точки, лежащія внутри параболы (рис. 9), не проходитъ ни одной касательной къ ней, а черезъ каждую точку, взятую внѣ параболы, проходитъ по двѣ дѣйствительныя касательныя;

такимъ образомъ, эти области изображаютъ совокупности всѣхъ уравненій, имѣющихъ 0 или 2 (вещественныхъ) корня. Черезъ каждую точку на самой параболѣ проходитъ только по одной касательной, которая принимается за двойную; такимъ образомъ, какъ здѣсь, такъ и вообще сама опредѣляющая кривая является геометрическимъ мѣстомъ точекъ, для которыхъ два корня уравненія совпадаютъ; вслѣдствіе этого ее можно назвать дискриминантной кривой.

Въ случаѣ кубическаго уравненія черезъ каждую точку внутри клина опредѣляющей кривой проходитъ по 3 касательныхъ къ ней (рис. 10); дѣйстви-

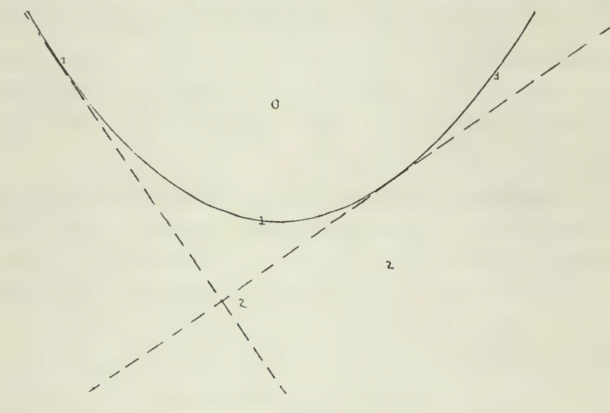


Рис. 9.

тельно, для точекъ, расположенныхъ на срединной линіи, это слѣдуетъ изъ симметричности фигуры; съ другой же стороны, число касательныхъ не можетъ измѣняться, если переходить къ другимъ точкамъ, не пересѣкая при этомъ кривой. Когда точка $x|y$ попадаетъ на кривую, то два корня изъ трехъ совпадаютъ; когда же эта точка переходитъ въ область, лежащую внѣ кривой, то эти два корня становятся мнимыми, и остается только одинъ вещественный корень. Наконецъ, въ остріѣ кривой имѣемъ только одну тройную касательную, такъ что соотвѣтствующее уравненіе ($t^3 = 0$) имѣетъ только одинъ тройной корень. Чертежъ позволяетъ охватить эту группировку однимъ взглядомъ.

Фигуры получаются еще интереснѣе и даютъ существенно больше, если ввести, — какъ это часто приходится дѣлать въ алгебрѣ, — еще нѣкоторыя ограниченія для корней: напримѣръ, если задаться цѣлью найти всѣ вещественные корни, лежащіе въ данномъ промежуткѣ $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Общій отвѣтъ на этотъ вопросъ даетъ, какъ извѣстно, теорема Штурма (Sturm). Нетрудно такъ дополнить наши фигуры, чтобы онѣ давали удовлетворительное наглядное рѣшеніе и этого общаго вопроса. Построимъ для этого попросту касательныя къ опредѣляющей кривой, соотвѣтствующія зна-

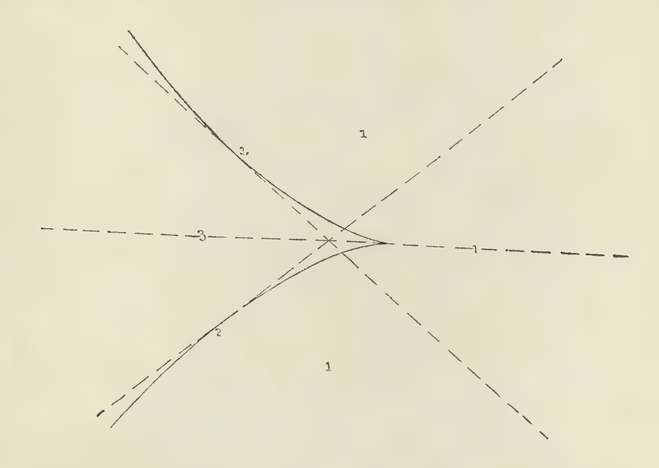


Рис. 10.

ченіямъ параметра t_1, t_2, и разсмотримъ получающееся раздѣленіе плоскости на области. Если примѣнить этотъ пріемъ прежде всего опять къ квадратному уравненію, то вопросъ сводится къ опредѣленію числа касательныхъ, которыя проходятъ черезъ данную точку и касаются параболы въ точкахъ ея дуги между t_1 и t_2 (рис. 11). Черезъ каждую точку треугольника, образуемаго этой дугой параболы и обѣими „основными" касательными, проведенными черезъ концы дуги t_1, t_2, проходятъ по 2 касательныя; при переходѣ черезъ каждую изъ основныхъ касательныхъ теряется одна изъ касательныхъ, ибо она касается параболы внѣ взятой

дуги; черезъ точки серповидныхъ областей, ограниченныхъ параболой и одной изъ основныхъ касательныхъ, не проходитъ ни одной прямой, касающейся параболы въ точкахъ дуги (t_1, t_2); черезъ внутреннія точки параболы вовсе не проходятъ дѣйствительныя касательныя. Такимъ образомъ, обѣ дуги $t \leqslant t_1$ и $t \geqslant t_2$ для получающагося при этомъ раздѣленія плоскости не имѣютъ существеннаго значенія; остаются только сплошныя линіи рисунка 11, благодаря которымъ мы получаемъ возможность, пользуясь проставленными числами, ясно обозрѣть совокупность тѣхъ квадратныхъ уравненій, которыя имѣютъ по 2, 1, 0 вещественныхъ корней между t_1 и t_2.

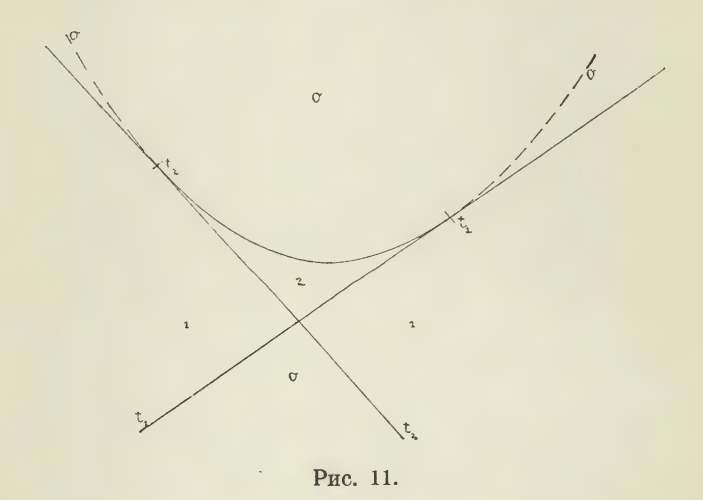


Рис. 11.

Точно такъ же поступаемъ и съ кубическимъ уравненіемъ. Пусть $t_1 > 0$, $t_2 < 0$. Снова проводимъ основныя касательныя съ этими значеніями параметра (рис. 12); надо разсмотрѣть только то раздѣленіе на области, которое производятъ эти касательныя и заключенная между ними дуга опредѣляющей кривой. Въ четырехугольной области у острія дѣйствительно черезъ каждую точку проходитъ по три вещественныхъ касательныхъ, касающихся кривой въ точкахъ дуги между t_1 и t_2. Если принять во вниманіе, что при переходѣ черезъ каждую изъ основныхъ касательныхъ теряется одна, а при переходѣ черезъ кривую — двѣ касательныя этого рода, что непосредственно видно

по чертежу, то получается указанное распредѣленіе областей, соотвѣтствующихъ уравненіямъ съ 3, 2, 1, 0 вещественными корнями между t_1 и t_2. Чтобы составить себѣ представленіе объ огромной пользѣ графическаго метода, попробуйте только описать in abstracto это подраздѣленіе кубическихъ уравненій, не аппелируя ни къ какимъ пространственнымъ образамъ; это потребуетъ у васъ несравненно больше времени. Доказательство, которое здѣсь постигается при одномъ взглядѣ на чертежъ, тоже окажется тогда далеко не простымъ.

Что касается отношенія этого геометрическаго метода къ извѣстнымъ алгебраическимъ критеріямъ Штурма, Декарта, Будана-Фурье, то я замѣчу только, что въ настоящемъ случаѣ геометрическій методъ охватываетъ всѣхъ ихъ. Болѣе подробный разборъ этихъ интересныхъ соотношеній вы найдете въ моей работѣ „Geometrisches zur Abzählung der Wurzeln algebraischer Gleichungen" („Приложеніе геометріи къ подсчету корней алгебраическихъ уравненій") въ „Каталогѣ математическихъ моделей" Дика*). Я охотно пользуюсь этимъ случаемъ, чтобы обратить ваше вниманіе на упомянутый каталогъ; послѣдній былъ изданъ по поводу выставки, устроенной въ Мюнхенѣ въ 1893 году „Союзомъ германскихъ математиковъ", и по сіе время является лучшимъ пособіемъ для оріентированія въ вопросахъ, касающихся математическихъ моделей.

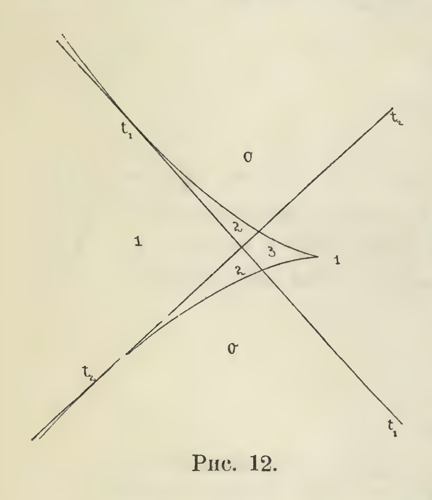


Рис. 12.

*) W. Dyck, „Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente", München 1892, а также добавленіе (Nachtrag) къ нему, München 1893.

3. Уравненія съ 3 параметрами λ, μ, ν.

Обратимся теперь къ разсмотрѣнію четырехчленнаго уравненія слѣдующаго вида:

$$t^{p} + \lambda t^{m} + \mu t^{n} + \nu = 0; \tag{1}$$

примѣнимъ методъ, совершенно аналогичный прежнему, съ той только разницей, что теперь мы используемъ не плоскость, а трехмѣрное пространство. Вмѣстѣ съ тѣмъ напишемъ теперь, наряду съ заданнымъ уравненіемъ, то условіе геометріи въ пространствѣ, которое выражаетъ, что точка $x|y|z$ и плоскость съ плоскостными координатами $u|v|w$ находятся въ „соединенномъ положеніи“ (т. е. что плоскость содержитъ точку):

$$z + ux + vy + w = 0\,, \tag{2}$$

или

$$w + xu + yv + z = 0.\text{*)} \tag{3}$$

Это уравненіе, написанное въ той или въ другой послѣдовательности его членовъ, мы будемъ отождествлять съ исходнымъ уравненіемъ (1) и придемъ тогда, какъ и раньше, къ двумъ интерпретаціямъ, находящимся между собой въ отношеніи двойственности.

Полагаемъ сперва

$$z = t^{p}, x = t^{m}, y = t^{n}; \tag{2^a}$$

---

*) Уравненіе вида (2) или (3), какъ извѣстно, выражаетъ плоскость въ декартовыхъ координатахъ. Каждой системой коэффиціентовъ u, v, w опредѣляется одна плоскость: эти количества и называются координатами плоскости. Если x, y, z суть декартовы координаты нѣкоторой точки, а u, v, w — координаты нѣкоторой плоскости, то уравненіе (2) выражаетъ, что точка лежитъ на плоскости, или что плоскость проходитъ черезъ точку. Если дать въ этомъ уравненіи коэффиціентамъ u, v, w постоянныя значенія, оставляя x, y, z перемѣнными, то оно выразитъ въ декартовыхъ координатахъ плоскость (u, v, w); т. е. ему удовлетворяютъ координаты всѣхъ тѣхъ точекъ, которыя лежатъ въ этой плоскости, Обратно, если здѣсь дать постоянное значеніе коэффиціентамъ x, y, z, то уравненію (2) удовлетворяютъ координаты u, v, w тѣхъ плоскостей, которыя проходятъ черезъ постоянную точку (x, y, z): это есть уравненіе точки въ плоскостныхъ координатахъ. Объ этой именно двойственности авторъ и говоритъ ниже. *Ред.*

этими уравненіями опредѣляется нѣкоторая кривая въ пространствѣ, „опредѣляющая кривая" четырехчленнаго уравненія со скалой значеній параметра t. Далѣе, полагаемъ:

$$u=\lambda,\ v=\mu,\ w=\nu; \qquad (2^b)$$

тогда уравненіе (1) показываетъ, что вещественные корни даннаго уравненія тождественны со значеніями параметра для точекъ пересѣченія опредѣляющей кривой (2^a) съ плоскостью (2^b).*)

Пользуясь принципомъ двойственности, полагаемъ:

$$w=t^p,\ u=t^m,\ v=t^n; \qquad (3^a)$$

эти уравненія опредѣляютъ однократно безконечный комплексъ**) плоскостей, которыя можно разсматривать, какъ соприкасающіяся плоскости нѣкоторой опредѣленной кривой въ пространствѣ, также отнесенной такимъ образомъ къ параметру t; въ виду такого опредѣленія этой кривой въ плоскостныхъ координатахъ, ее можно противопоставить, какъ опредѣляющую кривую опредѣленнаго класса, прежней кривой опредѣленнаго порядка. Разсматривая теперь наряду съ нею точку

$$x=\lambda,\ y=\mu,\ z=\nu, \qquad (3^b)$$

находимъ, что вещественные корни (1) тождественны со значеніями параметра t для тѣхъ соприкасающихся плоскостей кривой (3^a), которыя проходятъ черезъ точку (3^b).

---

*) Если точка x, y, z лежитъ на плоскости (2^b), то координаты ея удовлетворяютъ уравненію (2), которое теперь принимаетъ видъ

$$z+\lambda x+\mu y+\nu=0.$$

Если та же точка принадлежитъ кривой (2^a), то послѣднее уравненіе переходитъ въ уравненіе (1). *Ред.*

**) Подъ n-кратно безконечнымъ комплексомъ или ∞^n понимаютъ такой комплексъ, элементы котораго однозначно опредѣляются значеніями n параметровъ $t_1, t_2, \dots t_n$, пробѣгающихъ всѣ вещественныя значенія въ нѣкоторыхъ интервалахъ. *Ред.*

Остается на конкретныхъ примѣрахъ глубже вникнуть въ смыслъ обѣихъ интерпретацій; для той и для другой мы имѣемъ въ нашей коллекціи модели, которыя я теперь вамъ покажу.

Первой интерпретаціей воспользовался проф. Мемке (Mehmke) въ Штутгартѣ при построеніи аппарата для численнаго рѣшенія уравненій. Въ этомъ аппаратѣ (рис. 13), сдѣланномъ изъ латуни, вы видите 3 вертикальныхъ столбика со скалами; въ аппаратъ помѣщаютъ вырѣзанную въ видѣ шаблона опредѣляющую кривую четырехчленнаго уравненія 3-ей, 4-ой или 5-ой степени. Но только, въ отличіе отъ нашего изложенія, принята не обыкновенная прямоугольная система координатъ, а такая, что координаты плоскости, т. е. коэффиціенты u, v, w уравненія плоскости, представленнаго въ видѣ (2), изображаются какъ разъ тѣми отрѣзками, которые соотвѣтствующая плоскость отсѣкаетъ на скалахъ трехъ вертикальныхъ столбовъ и которые можно отсчитать по нимъ.

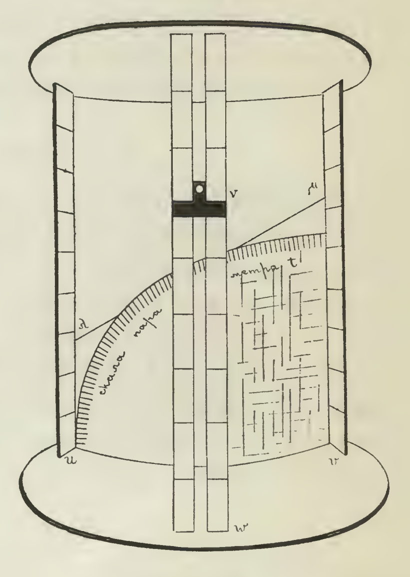


Рис. 13.

Чтобы имѣть возможность фиксировать опредѣленную плоскость въ пространствѣ: $u=\lambda, v=\mu, w=\nu$, къ переднему w-столбику придѣланъ визиръ, который можно установить на любомъ дѣленіи скалы ν; дѣленія же λ и μ на скалахъ столбовъ u и v соединяютъ натянутой нитью. Лучи зрѣнія, идущіе отъ визира къ точкамъ этой нити, образуютъ нашу плоскость; ея пересѣченія съ опредѣляющей кривой можно наблюдать непосредственно, какъ кажущіяся пересѣченія нити съ шаблономъ, если смотрѣть черезъ отверстіе въ визирѣ*); соотвѣтствующія значенія параметра, которыя

*) Точка пересѣченія плоскости съ шаблономъ проектируется изъ стія на нить. *Ред.*

являются искомыми корнями уравненія, отсчитываемъ на нанесенной на шаблонъ скалѣ значеній t для опредѣляющей кривой. Степень практической пригодности описаннаго аппарата зависитъ, конечно, существеннымъ образомъ отъ тщательности его механическаго изготовленія.

Для иллюстраціи второго метода у насъ имѣется модель, построенная Гартенштейномъ (Hartenstein) въ качествѣ работы для государственнаго экзамена. Она построена для такъ называемаго приведеннаго вида уравненій 4-ой степени:

$$t^4 + \lambda t^2 + \mu t + \nu = 0, \qquad (4)$$

въ каковомъ видѣ, какъ извѣстно, можно непосредственно представить всякое уравненіе 4-ой степени. Но сперва я изложу второй методъ въ нѣсколько измѣненномъ видѣ, какъ я это уже продѣлалъ выше для уравненія съ двумя параметрами (стр. 148).

Разсмотримъ однократно-безконечную систему плоскостей, плоскостныя координаты которыхъ выражены уравненіями (3^a), тогда какъ ихъ уравненія въ точечныхъ координатахъ въ настоящемъ случаѣ напишутся такъ:

$$f(t) = t^4 + xt^2 + yt + z = 0.$$

Огибающей этихъ плоскостей является совокупность прямыхъ, по которымъ каждая изъ плоскостей $f(t) = 0$ пересѣкается съ сосѣдней съ нею плоскостью $f(t + dt) = 0$; иначе говоря, это есть развертывающаяся поверхность, уравненіе которой получается исключеніемъ t изъ уравненій $f(t) = 0$ и $f'(t) = 0$. Чтобы получить опредѣляющую кривую, надо разсмотрѣть кривую соприкасанія семейства плоскостей, т. е. геометрическое мѣсто точекъ, въ которыхъ пересѣкаются каждыя 3 сосѣднія плоскости; это есть, какъ извѣстно, ребро возврата развертывающейся поверхности, координаты котораго въ функціи t получаются изъ трехъ уравненій: $f(t) = 0$, $f'(t) = 0$, $f''(t) = 0$. Въ данномъ случаѣ

эти уравненія напишутся такъ:

$$t^4 + xt^2 + yt + z = 0,$$
$$4t^3 + x.2t + y = 0,$$
$$12t^2 + x.2 = 0;$$

изъ нихъ находимъ:

$$x = -6t^2, y = 8t^3, z = -3t^4. \qquad (5)$$

Это — уравненіе въ точечныхъ координатахъ опредѣляющей кривой уравненія (4), взятой по классу: въ плоскостныхъ координатахъ эта же кривая выражается уравненіемъ (см. 3^a):

$$w = t^4, u = t^2, v = t. \qquad (6)$$

Оба уравненія относительно t четвертой степени; слѣдовательно, опредѣляющая кривая принадлежитъ какъ къ четвертому классу, такъ и къ четвертому порядку.

Чтобы ближе познакомиться съ этой кривой, разсмотримъ нѣсколько простыхъ поверхностей, которыя содержатъ ее. Прежде всего выраженія (5) тождественно (относительно t) удовлетворяютъ уравненію:

$$z + \frac{x^2}{12} = 0,$$

т. е. наша кривая лежитъ на изображаемомъ этимъ уравненіемъ параболическомъ цилиндрѣ второго порядка, производящія котораго параллельны оси y-овъ. Но, съ другой стороны, имѣетъ также мѣсто соотношеніе:

$$\frac{y^2}{8} + \frac{x^3}{27} = 0,$$

такъ что и этотъ обыкновенный кубическій цилиндръ съ производящими, параллельными оси z-овъ, проходитъ черезъ нашу кривую; она представляетъ, впрочемъ, полное пересѣченіе обоихъ цилиндровъ, лежащее въ конечномъ удаленіи. На основаніи этого можно легко составить себѣ приблизительное представленіе о ходѣ опредѣляющей

кривой: она представляетъ собой кривую двоякой кривизны, расположенную симметрично по отношенію къ плоскости xz и имѣющую остріе въ началѣ координатъ (рис. 14).

Далѣе, черезъ нашу опредѣляющую кривую проходитъ еще и слѣдующая поверхность второй степени:

$$\frac{x \cdot z}{6} - \frac{3y^2}{64} = 0,$$

такъ какъ и это соотношеніе удовлетворяется выраженіями (5) тождественно относительно t. Изъ уравненій этой поверхности и кубическаго цилиндра составимъ еще слѣдующую линейную ком-

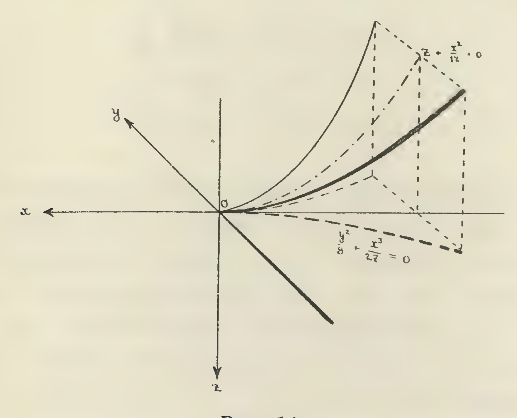


Рис. 14.

бинацію, которая представляетъ новую поверхность третьей степени, проходящую черезъ опредѣляющую кривую:

$$\frac{xz}{6} - \frac{y^2}{16} - \frac{x^3}{216} = 0.$$

Разсмотримъ теперь развертывающуюся поверхность, для которой опредѣляющая кривая представляетъ ребро возврата и которую мы можемъ опредѣлить, поэтому, какъ совокупность всѣхъ касательныхъ къ опредѣляющей кривой.—Если кривая въ пространствѣ задана уравненіями вида:

$$x = \varphi(t)\,, y = \psi(t)\,, z = \chi(t),$$

то касательная къ ней въ точкѣ t выразится уравненіями:

$$x = \varphi(t) + \varrho\varphi'(t),\ y = \psi(t) + \varrho \, . \, \psi'(t),\ z = \chi(t) + \varrho\chi'(t),$$

гдѣ ϱ есть параметръ; дѣйствительно, косинусы направленія касательной, какъ извѣстно, пропорціональны производнымъ координатъ кривой по t. Если разсматривать и t, какъ перемѣнную, то послѣднія уравненія съ двумя параметрами t и ϱ изображаютъ развертывающуюся поверхность, состоящую изъ касательныхъ; все это хорошо извѣстныя соображенія изъ геометріи въ пространствѣ. Для нашей кривой (5) это изображеніе развертывающейся поверхности имѣетъ слѣдующій видъ, если ея координаты, въ отличіе отъ кооординатъ кривой, обозначить черезъ X, Y, Z:

$$\left.\begin{aligned} X &= -6\,(t^2 + 2\varrho t) \\ Y &= 8\,(t^3 + 3\varrho t^2) \\ Z &= -3\,(t^4 + 4\varrho t^3) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Это и есть та поверхность, которая воспроизведена на упомянутой модели Гартенштейна, а именно—ея прямыя изображены здѣсь натянутыми нитями.— Это изображеніе поверхности въ параметрахъ даетъ само по себѣ наилучшіе опорные пункты для изслѣдованія и дѣйствительнаго построенія ея; мы слѣдуемъ, собственно говоря, только старой привычкѣ, когда все же спрашиваемъ, каково же самое уравненіе поверхности. Это уравненіе получится, если исключить t и ϱ изъ системы (7). Я покажу вамъ самый простой пріемъ для достиженія этой цѣли, хотя я и не могу здѣсь входить въ подробное объясненіе того, что приводитъ къ такому пріему и какое значеніе, по существу, имѣютъ его отдѣльные шаги. Пріемъ этотъ состоитъ въ томъ, что изъ формулъ (7) составляютъ такія комбинаціи:

$$Z + \frac{X^2}{12} = 12\varrho^2 t^2$$

$$\frac{X\,.\,Z}{6} - \frac{Y^2}{16} - \frac{X^3}{216} = 8\varrho^3 t^3,$$

которыя на самой кривой ($\varrho = 0$) обращаются въ 0, а, будучи приравнены нулю, изображаютъ двѣ изъ разсмотрѣнныхъ уже

выше специальныхъ поверхностей, проходящихъ черезъ кривую. Изъ этихъ двухъ уравненій легко можно исключить произведеніе $\varrho . t$, что даетъ уравненіе развертывающейся поверхности:

$$\left(Z+\frac{X^2}{12}\right)^3-27\left(\frac{XZ}{6}-\frac{Y^2}{16}-\frac{X^3}{216}\right)^2=0;$$

слѣдовательно, это поверхность 6-го порядка *).

Относительно значенія этой формулы я сдѣлаю для тѣхъ, кто ближе знакомъ съ предметомъ, слѣдующія замѣчанія: выраженія, стоящія въ скобкахъ, представляютъ собой не что иное, какъ инваріанты основного биквадратнаго уравненія 4-ой степени въ приведенномъ видѣ:

$$t^4+xt^2+yt+z=0;$$

они играютъ большую роль въ теоріи эллиптическихъ функцій, гдѣ ихъ обыкновенно обозначаютъ черезъ g_2 и g_3. Лѣвая часть уравненія нашей поверхности $\Delta = g_2{}^3 - 27g_3{}^2$ является, какъ извѣстно, дискриминантомъ уравненія 4-ой степени, которое имѣетъ двойной корень, когда дискриминантъ обращается въ нуль. Такимъ образомъ, наша развертывающаяся поверхность представляетъ не что иное, какъ дискриминантную поверхность биквадратнаго уравненія, т. е. совокупность всѣхъ точекъ, въ которыхъ послѣднее имѣетъ двойной корень.

Послѣ этихъ теоретическихъ разъясненій построеніе нитяной модели нашей поверхности не представляетъ никакихъ принципіальныхъ затрудненій: стоитъ только на основаніи параметрическаго изображенія опредѣлить тѣ точки, въ которыхъ касательныя, подлежащія построенію, пересѣкаютъ извѣстныя неподвижныя плоскости, и затѣмъ натянуть нити между этими плоскостями, реализованными посредствомъ деревянной или картонной коробки. Но чтобы такая модель дѣйствительно была красива и пригодна, чтобы она давала ясное представленіе обо всемъ интересующемъ насъ расположеніи поверхности и ея ребра возврата, какъ мы это видимъ на модели,—для этого необходимы

*) Въ дѣйствительности это поверхность пятаго порядка, такъ какъ члены 6-ой степени выпадаютъ. *Прим. переводчика.*

продолжительные опыты и очень большое искусство. Рис. 15 изображаетъ поверхность съ ея прямыми; AOB есть ребро возврата (ср. рис. 14).

Вы замѣчаете на этой модели двойную кривую (CO), вдоль которой встрѣчаются оба крыла поверхности; это попросту слѣдующая парабола въ плоскости y-овъ:

$$Y=0\,,Z-\frac{X^2}{4}=0.$$

Но только одна половина (CO) этой параболы, а именно та, для которой $X<0$, представляетъ пересѣченіе дѣйстви-

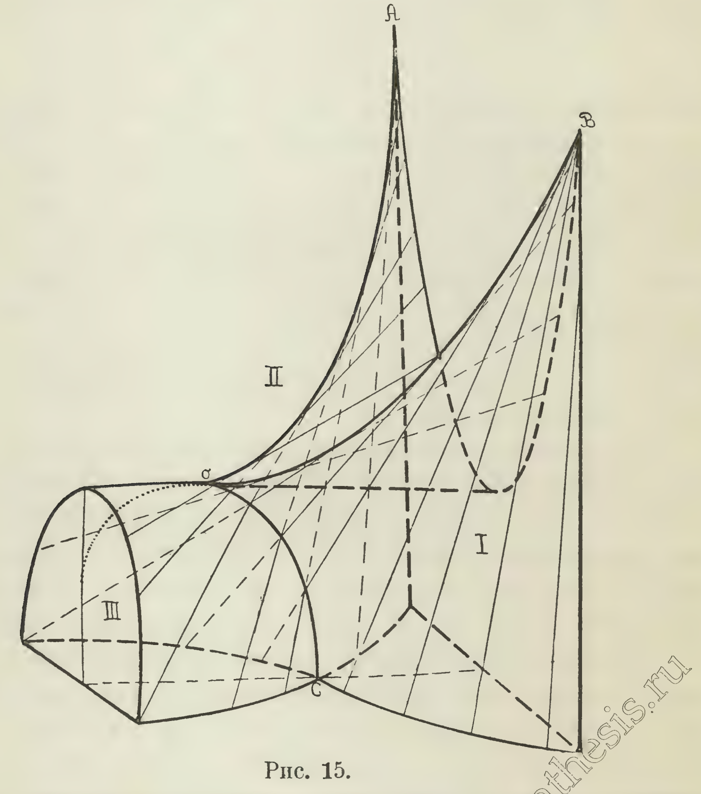


Рис. 15.

тельныхъ частей поверхности, тогда какъ другая (отмѣченная на чертежѣ пунктиромъ) расположена въ пространствѣ изолированно. Это явленіе не покажется удивительнымъ тому, кто привыкъ теорію алгебраическихъ поверхностей

сопровождать геометрическими представленіями; тамъ нерѣдко случается, что дѣйствительныя вѣтви двойныхъ линій то являются пересѣченіемъ дѣйствительныхъ частей поверхности, то оказываются изолированными въ пространствѣ, и тогда ихъ можно разсматривать, какъ дѣйствительныя пересѣченія мнимыхъ частей поверхности. Соотвѣтствующее явленіе на плоскости заключается въ томъ, что наряду съ обыкновенными двойными точками алгебраическихъ кривыхъ, представляющими пересѣченія дѣйствительныхъ вѣтвей кривой, встрѣчаются двойныя точки, лежащія, повидимому, изолированно и представляющія пересѣченія мнимыхъ частей кривой; это явленіе извѣстно всякому.

Разсмотримъ подробнѣе, что можетъ дать намъ полученная такимъ образомъ поверхность съ ея ребромъ возврата, т. е. опредѣляющей кривой. Представимъ себѣ, что на опредѣляющей кривой нанесена ея скала, или, еще лучше, отнесемъ каждой построенной касательной соотвѣтствующее ей значеніе параметра t, которое принадлежитъ и ея точкѣ касанія. Если задано уравненіе 4-ой степени съ опредѣленными коэффиціентами x, y, z, то стоитъ лишь черезъ соотвѣтствующую точку пространства $x|y|z$ провести соприкасающіяся плоскости къ опредѣляющей кривой или — что то же самое — касательныя плоскости къ дискриминантной поверхности, и мы получимъ вещественные корни въ видѣ параметровъ точекъ касанія съ кривой или самихъ касательныхъ въ этихъ точкахъ. Такъ какъ соприкасающаяся плоскость, касаясь кривой, пересѣкаетъ ее, то, при разсматриваніи изъ точки $x|y|z$, каждая точка касанія соприкасающейся плоскости проектируется въ видѣ кажущейся точки перегиба кривой — и наоборотъ. Такимъ образомъ, вещественные корни уравненія 4-ой степени являются въ результатѣ параметрами кажущихся точекъ перегиба опредѣляющей кривой, когда мы смотримъ на нее изъ точки $x|y|z$.

Правда, для тѣхъ, кто не имѣетъ достаточнаго навыка, конечно, довольно трудно увѣренно распознать на модели соприкасающіяся плоскости и кажущіяся точки перегиба. Но съ непосредственной очевидностью модель разъясняетъ слѣдующій,

наиболѣе важный пунктъ: подраздѣленіе всѣхъ уравненій 4-ой степени по числу ихъ вещественныхъ корней. Посмотримъ, какіе случаи вообще представляются возможными на основаніи теоретическаго изслѣдованія уравненія. Если α, β, γ, δ суть 4 корня вещественнаго биквадратнаго уравненія (4), то въ виду отсутствія члена, содержащаго t^3, необходимо $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$. Что же касается вещественности корней, то возможны, очевидно, слѣдующіе 3 главныхъ случая:

I. 4 вещественныхъ корня.

II. 2 вещественныхъ, 2 мнимыхъ сопряженныхъ корня.

III. Ни одного вещественнаго корня, 2 пары мнимыхъ сопряженныхъ корней.

Если даны два уравненія типа I съ корнями α, β, γ, δ и α', β', γ', δ', то всегда можно α, β, γ, δ обратить въ α', β', γ', δ', переходя непрерывно черезъ различныя системы изъ четырехъ вещественныхъ чиселъ, сумма которыхъ постоянно равна нулю; параллельно этому первое уравненіе обратится во второе, переходя непрерывнымъ образомъ черезъ уравненія того же типа, т. е. всѣ уравненія I типа образуютъ сплошной continuum*); то же справедливо и для двухъ другихъ типовъ.

На нашей модели это обстоятельство должно выразиться тѣмъ, что пространство распадается на 3 сплошныя части такого рода, что точки одной и той же части соотвѣтствуютъ уравненіямъ одного и того же типа. Разсмотримъ теперь переходные случаи между этими 3 типами: I-ый типъ переходитъ во II-ой черезъ уравненія, которыя имѣютъ два различныхъ вещественныхъ корня и одинъ двойной (= 2 совпадающимъ) вещественный корень, что мы обозначимъ символически черезъ $2+(2)$; точно такъ же между II и III типами имѣемъ переходный случай одного вещественнаго двойного

*) Подъ континуумомъ разумѣютъ всякій комплексъ, имѣющій такую же мощность, какъ и прямолинейный отрѣзокъ, плоская фигура или сплошное тѣло.

Ред.

корня и двухъ мнимыхъ корней, что будемъ обозначать черезъ (2). Обоимъ переходнымъ типамъ должны отвѣчать въ нашемъ пространственномъ образѣ части самой дискриминантной поверхности, такъ какъ она вообще изображаетъ всѣ уравненія съ кратными корнями; при этомъ, разсуждая аналогично предыдущему, найдемъ, что каждому типу должна отвѣчать сплошная часть поверхности. Обѣ эти группы уравненій: $2+(2)$ и (2), въ свою очередь, переходятъ одна въ другую черезъ уравненія съ 2 вещественными двойными корнями, символически: $(2)+(2)$; точки, для которыхъ, такимъ образомъ, совпадаютъ двѣ пары корней, необходимо должны принадлежать обоимъ крыльямъ дискриминантной поверхности; слѣдовательно, онѣ лежатъ на неизолированной вѣтви ея двойной линіи. Такимъ образомъ, дискриманантная поверхность распадается на двѣ части, раздѣляемыя одной вѣтвью двойной линіи; изъ нихъ одна $2+(2)$ отдѣляетъ I область пространства отъ II, а другая (2) раздѣляетъ II и III области. Чтобы усмотрѣть, какъ расположена опредѣляющая кривая, замѣтимъ, что она представляетъ собой ребро возврата, и потому въ ея точкахъ совпадаютъ по 3 касательныя плоскости, образуя соприкасающуюся плоскость; поэтому мы имѣемъ здѣсь случай одного тройного и одного простого вещественнаго корня: $1+(3)$; этотъ случай можетъ получиться только изъ случая $2+(2)$, а именно такимъ образомъ, что одинъ изъ простыхъ корней становится равнымъ двойному корню; слѣдовательно, ребро возврата должно цѣликомъ лежать на первой части $2+(2)$ поверхности. Только въ остріѣ ребра возврата ($x=y=z=0$) мы имѣемъ четырехкратный корень, который можетъ получиться и отъ совпаденія обоихъ двойныхъ корней $(2)+(2)$. Дѣйствительно, остріе O ребра возврата лежитъ одновременно и на двойной линіи. Что же касается изолированной вѣтви двойной линіи, то она цѣликомъ проходитъ въ области III и характеризуется тѣмъ, что для ея точекъ 4 мнимыхъ корня по 2 совпадаютъ между собой, образуя два двойныхъ сопряженныхъ мнимыхъ корня.

Всѣ перечисленные возможные случаи въ точности реализованы на нашей модели. На чертежѣ (рис. 15) часть простран-

ства, заключенная внутри поверхности, справа отъ двойной линіи, образуетъ область I, а слѣва отъ той же линіи лежитъ область III; пространство же, лежащее внѣ поверхности, образуетъ область II. Поэтому, имѣя въ рукахъ слѣдующую схему, вы легко сможете вполнѣ оріентироваться относительно числа вещественныхъ корней:

I (4 веществ. корня). II (2 вещ. корня). III (Ни одного вещ. корня)

Дискримин. поверхность: 2+(2) (2)

Опредѣляющая кривая: 1+(3)

Двойная линія: (2)+(2) (2 мнимыхъ двойныхъ корня)

Остріе: (4)

Этимъ мы закончимъ первую часть нашихъ алгебраическихъ изслѣдованій и обратимся ко второй части.



II. Уравненія въ области комплексныхъ чиселъ.

Здѣсь мы снова поставимъ себѣ цѣлью выдѣлить такія вещи, которыя допускаютъ геометрическую иллюстрацію въ большей степени, чѣмъ это обыкновенно дѣлаютъ. Я начну съ наиболѣе важной теоремы.

A. Основная теорема алгебры.

Основная теорема алгебры, какъ извѣстно, заключается въ томъ, что всякое алгебраическое уравненіе n-ой степени имѣетъ, вообще говоря, n корней, или, выражаясь точнѣе, всякій полиномъ $f(x)$ n-ой степени можетъ быть разложенъ на n линейныхъ множителей.

Въ сущности, всѣ доказательства этой теоремы пользуются геометрической интерпретаціей комплексныхъ величинъ на плоскости xy. Я познакомлю васъ съ ходомъ мыслей въ первомъ доказательствѣ Гаусса (1799), которое можно представить въ наглядной формѣ; изложеніе его у самого Гаусса имѣетъ, конечно, совершенно другой видъ.

Если данъ многочленъ

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$

то можно написать:

$$f(x + iy) = u(x, y) + i \,.\, v(x, y),$$

гдѣ u, v представляютъ нѣкоторые вещественные многочлены отъ обѣихъ вещественныхъ перемѣнныхъ x, y. Основная мысль

Гауссова доказательства заключается въ слѣдующемъ: если изслѣдовать кривыя

$$u(x, y) = 0 \text{ и } v(x, y) = 0,$$

лежащія въ плоскости xy, и показать, что онѣ должны имѣть общую точку, то для этой точки $x|y$ будетъ $f(x+iy) = 0$; этимъ и будетъ доказано существованіе, по крайней мѣрѣ, одного корня уравненія $f = 0$. Оказывается, что для этой цѣли достаточно изслѣдовать ходъ обѣихъ кривыхъ въ безконечности, т. е. въ сколь угодно большомъ удаленіи отъ начала координатъ.

Если абсолютная величина r перемѣнной z становится весьма большой, то можно въ функціи $f(z)$ пренебречь низшими степенями z по сравненію съ z^n; это означаетъ, что функція $f(z)$ асимптотически приближается къ

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

гдѣ съ помощью формулы Моавра введены полярныя координаты r, φ на плоскости xy. Изъ этого результата можно заключить, что u и v асимптотически приближаются къ функціямъ

$$r^n \cos n\varphi \text{ и } r^n \sin n\varphi;$$

поэтому окончательный ходъ кривыхъ $u = 0$, $v = 0$ въ безконечности въ первомъ приближеніи изобразится такъ:

$$\cos n\varphi = 0, \sin n\varphi = 0.$$

Но кривая $\sin n\varphi = 0$ состоитъ изъ n прямыхъ, которыя проходятъ черезъ начало и образуютъ съ осью x-овъ углы $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{(n-1)\pi}{n}$; а кривая $\cos n\varphi = 0$ состоитъ изъ n биссекторовъ угловъ между первыми прямыми (см. рис. 16, соотвѣтствующій случаю $n = 3$). Въ центральной части рисунка дѣйствительныя кривыя $u = 0$, $v = 0$ могутъ, конечно, существенно уклоняться отъ этихъ прямыхъ; но чѣмъ дальше отъ начала,

тѣмъ больше должны первыя приближаться къ послѣднимъ; поэтому ходъ настоящихъ кривыхъ можно схематически изобразить тѣмъ, что за предѣлами нѣкоторой достаточно большой окружности (описанной около начала) мы сохранимъ наши прямыя, а внутри ея соединимъ ихъ между собой произвольнымъ образомъ (рис. 17). Но каковъ бы ни былъ ходъ кривыхъ внутри круга, уходящія въ безконечность вѣтви u, v должны непремѣнно переходить одна въ другую при обходѣ фигуры; изъ этого наглядно видно, что эти кривыя внутри круга должны хоть разъ пересѣчься. Дѣйствительно, этотъ результатъ можно — и въ этомъ заключается содержаніе Гауссова доказательства — точно вывести изъ непрерывности кривыхъ. Но по существу ходъ идей изложенъ выше.

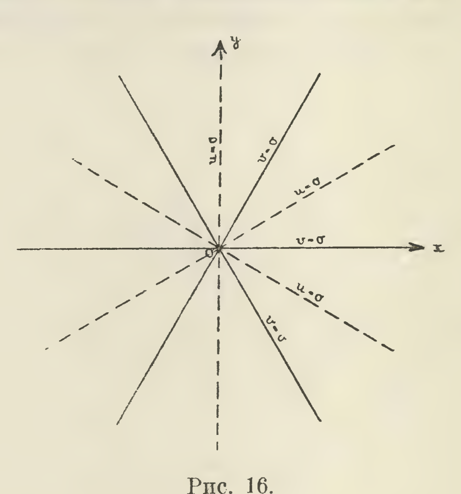


Рис. 16.

Когда полученъ такимъ образомъ одинъ корень, тогда можно отщепить отъ функціи $f(z)$ одинъ линейный сомножитель и повторить доказательство для оставшагося многочлена $(n-1)$-ой степени. Продолжая поступать такимъ образомъ, мы, въ концѣ концовъ, дѣйствительно получимъ расщепленіе на n линейныхъ сомножителей, чѣмъ доказывается существованіе n корней.

Идея доказательства станетъ вамъ яснѣе, если вы продѣлаете нѣсколько примѣровъ со всѣми построеніями. Однимъ изъ простѣйшихъ примѣровъ является слѣдующій:

$$f(z) = z^3 - 1 = 0.$$

Здѣсь, очевидно,

$$u = r^3 \cos 3\varphi - 1, \quad v = r^3 \sin 3\varphi,$$

такъ что $v = 0$ состоитъ просто изъ трехъ прямыхъ, тогда какъ кривая $u = 0$ имѣетъ 3 гиперболовидныхъ вѣтви. На чертежѣ (рис. 18) вы, въ самомъ дѣлѣ, видите три точки пересѣченія обѣихъ кривыхъ; эти 3 точки даютъ 3 корня нашего уравненія. Я весьма рекомендую продѣлать болѣе сложные примѣры.

Этими краткими указаніями по поводу основной теоремы я могу здѣсь ограничиться, такъ какъ я не читаю сейчасъ курса алгебры. Замѣчу еще только, что значеніе введенія въ

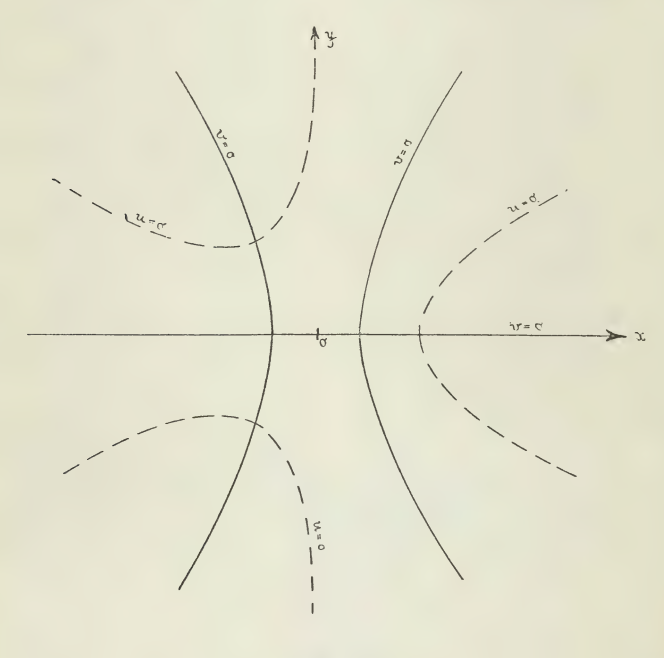


Рис. 17.

алгебру комплексныхъ чиселъ въ томъ и заключается, что они даютъ возможность установить основную теорему алгебры въ общей формѣ, не допускающей никакихъ исключеній; ограничиваясь же вещественными величинами, можно утверждать только то, что уравненіе n-ой степени имѣетъ либо n корней, либо меньше, либо ни одного.

Время, которое остается у насъ для алгебры, мы употребимъ на то, чтобы изслѣдовать въ наглядной формѣ полныя

системы рѣшеній комплексныхъ уравненій, подобно тому, какъ мы это сдѣлали выше для вещественныхъ рѣшеній вещественныхъ уравненій. Но при этомъ мы ограничимся только уравненіями съ однимъ комплекснымъ параметромъ, входящимъ въ уравненіе линейно.

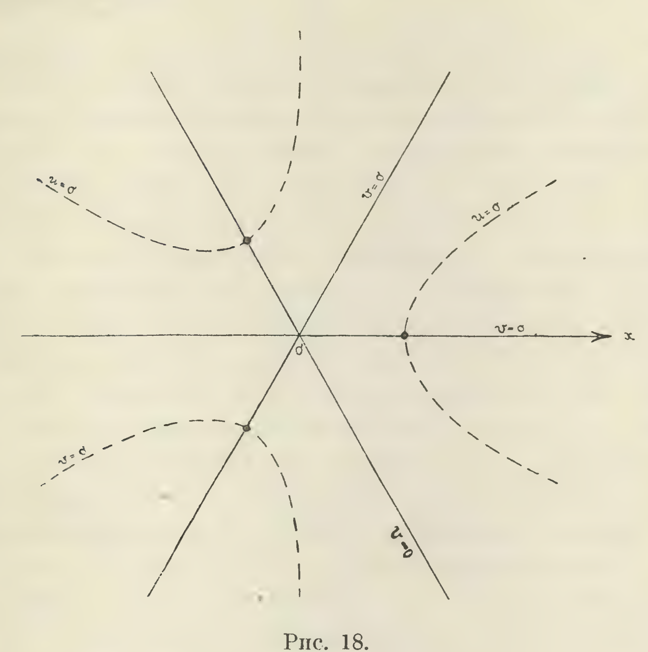


Рис. 18.

B. Уравненія съ однимъ комплекснымъ параметромъ.

Въ тѣхъ узкихъ условіяхъ, какими мы ограничили задачу, изученіе простого конформнаго отображенія дастъ намъ все, что намъ нужно.

Обозначимъ черезъ $z = x + iy$ неизвѣстное, черезъ $w = u + iv$ параметръ; тогда разсматриваемыя уравненія будутъ имѣть такой видъ:

$$\varphi(z) - w \cdot \psi(z) = 0, \qquad (1)$$

гдѣ φ, ψ обозначаютъ многочлены относительно z; пусть n есть показатель высшей степени z въ φ или ψ. По основной теоремѣ

это уравненіе для каждаго значенія w имѣетъ n, вообще различныхъ, корней z. Но изъ уравненія (1) слѣдуетъ, что—обратно—

$$w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \qquad (2)$$

т. е. что w есть однозначная раціональная функція отъ z, а именно — какъ говорятъ — раціональная функція степени n. Если бы мы захотѣли воспользоваться въ качествѣ геометрическаго эквивалента уравненія (1) тѣмъ конформнымъ отображеніемъ комплексныхъ плоскостей z и w, которое устанавливается функціональной зависимостью (2), то наглядность нарушалась бы многозначностью z, какъ функціи w. Въ виду этого, поступимъ такъ, какъ это всегда дѣлается въ теоріи функцій: плоскость w мы представляемъ себѣ въ видѣ n наложенныхъ другъ на друга экземпляровъ (листовъ), которые мы подходящимъ образомъ соединяемъ между собой въ такъ называемыхъ „точкахъ развѣтвленія“ въ одну n-листную Риманову поверхность; этотъ пріемъ знакомъ всѣмъ вамъ изъ элементовъ ученія объ алгебраическихъ функціяхъ. Тогда наша функція (2) осуществляетъ взаимнооднозначное и, вообще говоря, конформное сопряженіе между точками Римановой поверхности на плоскости w, съ одной стороны, и точками простой плоскости z, съ другой стороны.

Прежде чѣмъ перейти къ подробному изученію этого сопряженія, будетъ цѣлесообразно принять нѣкоторыя мѣры къ тому, чтобы устранить ту исключительную, но не лежащую въ существѣ вещей роль, которую играютъ безконечно большія значенія w и z, и тѣмъ сдѣлать возможной такую формулировку теоремъ, чтобы онѣ не допускали исключеній. Въ виду того, что эти условія, къ сожалѣнію, указываютъ далеко не всегда, когда это было бы необходимо сдѣлать, мы остановимся на нихъ нѣсколько подробнѣе. А именно, мы считаемъ недостаточнымъ говорить только символически о безконечно удаленной точкѣ комплексной плоскости, такъ какъ это не даетъ никакого конкретнаго представленія,

и только съ помощью особыхъ разсужденій и условій можно уяснить себѣ, что именно слѣдуетъ считать аналогичнымъ опредѣленному свойству конечной точки въ томъ случаѣ, когда точка становится безконечно-удаленной. Но мы будемъ имѣть все, что намъ нужно, если разъ навсегда замѣнимъ Гауссову плоскость, какъ представительницу комплексныхъ чиселъ, Римановой сферой. Съ этой цѣлью представимъ себѣ сферу съ діаметромъ 1, касающуюся плоскости Гаусса въ началѣ координатъ, и станемъ стереографически проектировать ее на плоскость изъ ея сѣвернаго полюса N, діаметрально противоположнаго точкѣ касанія или южному полюсу S (см. рис. 19). При этомъ со всякой точкой Q на плоскости однозначно сопрягается точка P на сферѣ — вторая точка пересѣченія луча NQ со сферой, — и, обратно, со всякой точкой P сферы — кромѣ точки N — однозначно сопрягается нѣкоторая точка Q на плоскости съ опредѣленными координатами x, y; поэтому можно разсматривать точку P, какъ представителя числа $x+iy$. Когда же точка P приближается по какому-либо пути къ сѣверному полюсу N, то точка Q уходитъ въ безконечность, и наоборотъ. Поэтому представляется естественнымъ разсматривать точку N, съ которой не сопряжено ни одно конечное комплексное число, какъ единственнаго представителя всѣхъ безконечно большихъ чиселъ $x+iy$, т. е. какъ конкретный образъ до сихъ поръ лишь символически введеной безконечно-удаленной точки числовой плоскости, и приписать ей символъ ∞. Этимъ достигается въ геометрическомъ образѣ полная равноправность какъ всѣхъ конечныхъ, такъ и безконечно-удаленной точки.

Теперь, чтобы вернуться къ геометрическому толкованію нашего алгебраическаго соотношенія (1), замѣнимъ также плоскость w сферой w. Тогда наша функція представитъ отображеніе сферы z на сферѣ w; это есть изображеніе конформное такъ же, какъ и сопряженіе обѣихъ плоскостей, по той причинѣ, что по извѣстной теоремѣ стереографическая проекція конформно сопрягаетъ плоскость со сферой. При этомъ одной точкѣ на сферѣ w отвѣчаютъ вообще n различныхъ точекъ на сферѣ z. Чтобы получить взаимнооднозначное сопряже-

ніе, представимъ себѣ снова n экземпляровъ сферы w, наложенныхъ или вложенныхъ одинъ въ другой, и скрѣпимъ ихъ въ точкахъ развѣтвленія въ одну n-листную Риманову поверхность на сферѣ w. Составить себѣ такое представленіе не труднѣе, чѣмъ уяснить себѣ понятіе о Римановой поверхности на плоскости. Этимъ достигается, въ концѣ концовъ, геометрическое толкованіе алгебраическаго уравненія (1), какъ взаимооднозначнаго, вообще конформнаго, сопряженія Римановой поверхности на сферѣ w, съ одной стороны, и простой сферы z,

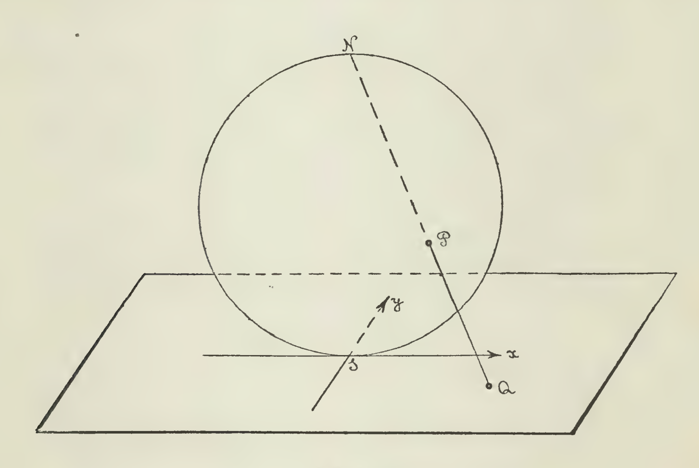


Рис. 19.

съ другой стороны; въ эту интерпретацію включены, очевидно, и безконечныя значенія z и w, которыя сопряжены или другъ съ другомъ или съ конечными значеніями этихъ перемѣнныхъ.

Чтобы получить возможность вполнѣ использовать эти новыя геометрическія средства, необходимо и въ алгебрѣ сдѣлать соотвѣтствующій шагъ, направленный къ тому, чтобы устранить въ формулахъ исключительный характеръ безконечно большого; этотъ шагъ заключается въ введеніи однородныхъ перемѣнныхъ. А именно, мы полагаемъ $z = \frac{z_1}{z_2}$ и разсматриваемъ z_1 и z_2, какъ двѣ независимыя комплексныя пе-

ремѣнныя, но такого рода, что z_1 / z_2 и $c \, . \, z_1 / c \, . \, z_2$ при любомъ c изображаютъ одну и ту же точку. Пусть z_1, z_2 принимаютъ всѣ возможныя пары конечныхъ значенiй, но только не обращаются одновременно въ 0; тогда, согласно сдѣланному условiю, для каждаго конечнаго значенiя z мы получимъ одну опредѣленную точку; но, кромѣ того, существуетъ еще одна точка (z_1 произвольно, $z_2 = 0$), соотвѣтствующая безконечно возрастающимъ z. Такимъ образомъ получаемъ ариѳметическiй эквивалентъ безконечно удаленной точки. Точно такъ же, разумѣется, полагаемъ $w = \frac{w_1}{w_2}$ и пишемъ слѣдующее „однородное“ уравненiе между „однородными“ перемѣнными z_1, z_2 и w_1, w_2, соотвѣтствующее уравненiю (2):

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_2^n \cdot \varphi\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{z_2^n \cdot \psi\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\varphi(z_1, z_2)}{\psi(z_1, z_2)}. \qquad (3)$$

Здѣсь $\varphi(z_1, z_2), \psi(z_1, z_2)$ означаютъ цѣлыя рацiональныя функцiи отъ z_1 и z_2, такъ какъ $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ содержатъ $z = \frac{z_1}{z_2}$, самое большее, въ n-ой степени; кромѣ того, это однородныя многочлены (формы) измѣренiя n, ибо каждый членъ z^i, входящiй въ $\varphi(z)$ или $\psi(z)$, при умноженiи обоихъ членовъ дроби $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ на $z_2{}^n$ обращается въ $z_2{}^n \cdot \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^i = z_2^{n-i} z_1^i$, т. е. въ членъ n-го измѣренiя.

Теперь намъ предстоитъ, послѣдовательно примѣняя оба введенныхъ вспомогательныхъ средства — изображенiе на комплексной сферѣ и однородныя координаты, изучить во всѣхъ подробностяхъ ту функцiональную зависимость между z и w, которую устанавливаетъ уравненiе (1). Эта задача будетъ рѣшена, если мы сумѣемъ составить себѣ полное представленiе о конформномъ сопряженiи между сферой z и Римановой поверхностью на сферѣ w.

Но здѣсь прежде всего возникаетъ вопросъ о характерѣ и положеніи точекъ развѣтвленія на поверхности Римана. Я напомню, что μ-кратной точкой развѣтвленія называется такая точка, въ которой сходится $\mu + 1$ листовъ. Такъ какъ w является однозначной функціей z, то положеніе точекъ развѣтвленія будетъ намъ извѣстно, если мы будемъ знать соотвѣтствующія имъ точки на сферѣ z; я буду называть ихъ просто „замѣчательными" точками сферы z. Имъ тоже соотвѣтствуетъ извѣстная кратность, равная кратности сопряженныхъ съ ними точекъ развѣтвленія. Я приведу безъ подробнаго доказательства теоремы, разрѣшающія эту задачу. При этомъ я предполагаю, что эти, собственно говоря, довольно простые факты изъ области теоріи функцій въ общемъ вамъ знакомы, хотя, быть можетъ, и не въ той однородной координаціи, которой я здѣсь отдаю предпочтеніе. Абстрактныя вещи, о которыхъ я сейчасъ буду говорить, получатъ позже въ ряду примѣровъ конкретный наглядный образъ.

Начнемъ съ небольшого вычисленія, которое дастъ намъ аналогъ производной $\frac{dw}{dz}$ въ однородныхъ координатахъ! Продифференцируемъ уравненія (3):

$$\frac{w_2 dw_1 - w_1 dw_2}{w_2^2} = \frac{\psi d\varphi - \varphi d\psi}{\psi^2}. \tag{3'}$$

Но

$$d\varphi = \varphi_1\, dz_1 + \varphi_2\, dz_2,$$

$$d\psi = \psi_1\, dz_1 + \psi_2\, dz_2,$$

гдѣ

$$\varphi_1 = \frac{\partial\varphi(z_1, z_2)}{\partial z_1},\ \varphi_2 = \frac{\partial\varphi(z_1, z_2)}{\partial z_2},$$

$$\psi_1 = \frac{\partial\psi(z_1, z_2)}{\partial z_1},\ \psi_2 = \frac{\partial\psi(z_1, z_2)}{\partial z_2}.$$

Съ другой стороны, по теоремѣ Эйлера объ однородныхъ функціяхъ степени n, имѣемъ:

$$\varphi_1 . z_1 + \varphi_2 . z_2 = n\varphi ,$$

$$\psi_1 . z_1 + \psi_2 . z_2 = n\psi .$$

Поэтому числитель въ правой части равенства (3′) можно преобразовать слѣдующимъ образомъ:

$$\psi d\varphi - \varphi d\psi = \begin{vmatrix} d\varphi & d\psi \\ \varphi & \psi \end{vmatrix} = \frac{1}{n^2} \begin{vmatrix} \varphi_1 dz_1 + \varphi_2 dz_2 , & \psi_1 dz_1 + \psi_2 dz_2 \\ \varphi_1 z_1 + \varphi_2 z_2 , & \psi_1 z_1 + \psi_2 z_2 \end{vmatrix} ,$$

что, по теоремѣ о перемноженіи опредѣлителей, равняется

$$\frac{1}{n^2} \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} dz_1 & dz_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} .$$

Поэтому соотношеніе (3′) принимаетъ такой видъ:

$$\frac{w_2 dw_1 - w_1 dw_2}{w_2^2} = \frac{z_2 dz_1 - z_1 dz_2}{n^2 . \psi^2} \cdot (\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1).$$

Это — основная формула въ однородной теоріи нашего уравненія; въ качествѣ опредѣляющаго выраженія для всего послѣдующаго является функціональный опредѣлитель $\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1$ формъ φ и ψ. Кромѣ этого множителя, справа входитъ дифференціалъ отъ $z = \frac{z_1}{z_2}$, а слѣва дифференціалъ отъ $w = \frac{w_1}{w_2}$; а такъ какъ для конечныхъ значеній перемѣнныхъ z и w замѣчательныя точки получаются, какъ извѣстно, изъ уравненія $\frac{dw}{dz} = 0$, то становится ясной слѣдующая теорема, строгаго доказательста которой я не могу здѣсь излагать: каждый μ-кратный корень функціональнаго опредѣлителя является замѣчательной точкой μ-ой кратности; другими словами, ей соотвѣтствуетъ μ-кратная точка развѣтвленія Римановой поверхности на сферѣ w. Главное преимущество этого правила, по

сравненію съ прежними, заключается въ томъ, что оно въ общей формулировкѣ охватываетъ конечныя и безконечныя значенія z и w. Оно же даетъ точное указаніе относительно числа замѣчательныхъ точекъ. Дѣйствительно, 4 производныя, входящія въ функціональный опредѣлитель, представляютъ собою формы $(n-1)$-го измѣренія; поэтому самъ опредѣлитель есть форма $(2n-2)$-го измѣренія. А такой многочленъ всегда имѣетъ какъ разъ $2n-2$ корня, если принимать во вниманіе кратность послѣднихъ. Если поэтому $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ обозначаютъ замѣчательныя точки сферы z (т. е. если $\varphi_1\psi_2-\psi_1\varphi_2=0$ для $z_1 : z_2 = \alpha_1, \ldots, \alpha_2$), а $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$ суть ихъ кратности, то сумма послѣднихъ

$$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu=2n-2.$$

Этимъ точкамъ отвѣчаютъ, въ силу конформнаго отображенія, ν точекъ развѣтвленія:

$$a_1, a_2, \ldots, a_\nu$$

Римановой поверхности на сферѣ w; онѣ расположены на поверхности изолированно, и въ нихъ въ круговомъ порядкѣ сходятся соотвѣтственно $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$ листовъ. Но слѣдуетъ замѣтить, что нѣсколько различныхъ такихъ точекъ развѣтвленія могутъ лежать надъ одной и той же точкой на сферѣ w, такъ какъ изъ соотношенія $w=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ для $z=\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ можетъ получиться нѣсколько разъ одно и то же значеніе w. Надъ такой точкой окажется тогда нѣсколько различныхъ взаимно изолированныхъ группъ листовъ,— такихъ, что листы каждой группы въ этой точкѣ склеены между собой. Такія точки на сферѣ w мы будемъ (въ отличіе отъ точекъ развѣтвленія на сферѣ z) называть мѣстами развѣтвленія и будемъ обозначать ихъ черезъ $A, B, C, \ldots$; число такихъ различныхъ мѣстъ развѣтвленія можетъ, такимъ образомъ, быть меньше ν.

Теперь мы построимъ поверхность Римана, о которой по имѣющимся пока у насъ даннымъ мы можемъ имѣть лишь весьма расплывчатыя представленія, такимъ образомъ, чтобы она получила болѣе наглядный видъ. Съ этой цѣлью проведемъ на сферѣ w черезъ мѣста

развѣтвленія A, B, C,... замкнутую линію L безъ кратныхъ точекъ возможно простого вида; заштрихуемъ одну изъ ограниченныхъ ею частей сферы въ отличіе отъ другой (рис. 20). Во всѣхъ примѣрахъ, разбираемыхъ нами ниже, всѣ точки A, B, C,... дѣйствительны; въ этомъ случаѣ естественно взять за линію L меридіанъ вещественныхъ чиселъ, такъ что наша сфера распадется на двѣ полусферы.

Возвращаясь къ общему случаю, замѣтимъ, что каждый листъ Римановой поверхности перекрещивается съ другимъ листомъ, связаннымъ съ нимъ вдоль разрѣза или линіи развѣтвленія, соединяющей двѣ точки развѣтвленія. Какъ извѣстно, Риманова поверхность, по существу, остается неизмѣнной, когда мы такую линію какъ-либо по ней перемѣщаемъ, если при этомъ концы ея остаются неподвижными, —другими словами, если тѣ же листы скрѣплять между собой вдоль иныхъ линій, соединяющихъ тѣ же точки. Въ этой измѣняемости заключается большая общность, но въ то же время и большая трудность идеи поверхностей Римана. Чтобы придать нашей поверхности опредѣленный видъ, легко допускающій конкретное представленіе, сдвинемъ всѣ линіи развѣтвленія такимъ образомъ, чтобы всѣ онѣ лежали надъ построенной выше линіей L, проходящей черезъ всѣ точки развѣтвленія; при этомъ надъ однѣми частями линіи L можетъ, конечно, лежать по нѣсколько линій развѣтвленія, а надъ другими частями линіи L можетъ ихъ вовсе не быть.

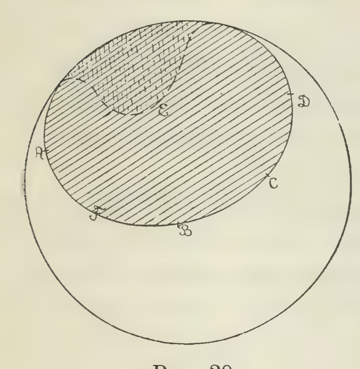


Рис. 20.

Теперь разрѣжемъ всѣ листы вдоль этой линіи L. Въ виду того, что мы уже раньше помѣстили всѣ линіи развѣтвленія надъ линіей L и теперь производимъ вдоль всѣхъ ихъ разрѣзы, наша Риманова поверхность распадается на двѣ группы по n „полулистовъ“, совершенно свободныхъ отъ развѣтвленій и располо-

женныхъ надъ каждой изъ двухъ частей сферы, ограниченныхъ линіей L. Соотвѣтственно тому, какъ мы условились выше различать обѣ части сферы, мы будемъ говорить о n „заштрихованныхъ“ и о n „незаштрихованныхъ“ полулистахъ. Теперь мы можемъ такъ описать строеніе первоначальной Римановой поверхности: каждый заштрихованный полулистъ былъ на ней окруженъ исключительно незаштрихованными полулистами, съ которыми онъ встрѣчался вдоль линій, расположенныхъ надъ частями AB, BC,... линіи L; аналогично этому, каждый незаштрихованный полулистъ былъ окруженъ вдоль такихъ отрѣзковъ кривой одними лишь заштрихованными полулистами. Но болѣе, чѣмъ два полулиста, встрѣчаются только въ точкахъ развѣтвленія, а именно въ μ-кратной точкѣ развѣтвленія сходятся попемѣнно какъ разъ $\mu+1$ заштрихованныхъ и $\mu+1$ незаштрихованныхъ полулистовъ.

Въ виду того, что посредствомъ нашей функціи $w(z)$ сфера z взаимнооднозначно сопряжена съ Римановой поверхностью на сферѣ w, то возможно сразу перенести на первую найденныя соотношенія связности: въ силу непрерывности, $2n$ полулистамъ поверхности соотвѣтствуютъ $2n$ взаимносвязанныхъ областей z, которыя мы назовемъ соотвѣтственно заштрихованными и незаштрихованными полуобластями; онѣ отдѣляются одна отъ другой n кривыми, въ видѣ которыхъ n-значная функція $z(w)$ изображаетъ на сферѣ z каждую изъ частей AB, BC,... линіи L. Каждая заштрихованная полуобласть соприкасается вдоль такихъ кривыхъ исключительно съ незаштрихованными полуобластями, и наоборотъ; только въ μ-кратной замѣчательной точкѣ сходятся больше, чѣмъ 2 полуобласти, а именно $\mu+1$ заштрихованныхъ и столько же незаштрихованныхъ.

Это подраздѣленіе сферы z на области послужитъ намъ къ тому, чтобы прослѣдить во всѣхъ деталяхъ ходъ функцій $z(w)$ для нѣкоторыхъ простыхъ и характерныхъ примѣровъ. Начнемъ съ самаго простого примѣра.

1. Двучленное уравненіе

$$z^n = w. \qquad (1)$$

Какъ извѣстно, формальное рѣшеніе этого уравненія получають, вводя знакъ корня или радикалъ: $z = \sqrt[n]{w}$; но отъ этого мы не много выигрываемъ въ смыслѣ знанія функціональной зависимости, связывающей z и w. Поэтому станемъ поступать согласно нашему общему пріему: вводимъ однородныя перемѣнныя:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_1^n}{z_2^n}$$

и составляемъ функціональный опредѣлитель числителя и знаменателя правой части:

$$\begin{vmatrix} nz_1^{n-1} & 0 \\ 0 & nz_2^{n-1} \end{vmatrix} = n^2 z_1^{n-1} z_2^{n-1}.$$

Для этого опредѣлителя $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$ — или, въ неоднородной формѣ, $z = 0$ и $z = \infty$ — представляютъ корни $(n-1)$-ой кратности; слѣдовательно, извѣстны всѣ замѣчательныя точки съ общей кратностью $2n - 2$. Но согласно нашей общей теоремѣ въ соотвѣтственныхъ, въ силу зависимости $w = z^n$, мѣстахъ $w = 0$ и $w = \infty$ лежатъ единственныя точки развѣтвленія поверхности Римана на сферѣ w, и при томъ кратность той и другой равна $n - 1$, такъ что въ каждой изъ нихъ сходятся циклически всѣ n листовъ. Отмѣтимъ линіей L меридіанъ вещественныхъ чиселъ на сферѣ w и разрѣжемъ всѣ листы Римановой поверхности вдоль этого меридіана, сдвинувъ предварительно линіи развѣтвленія соотвѣтственнымъ образомъ. Изъ $2n$ полусферъ, на которыя распадается при этомъ поверхность, представимъ себѣ заштрихованными тѣ, которыя расположены надъ задней половиной сферы w и которыя, слѣдовательно, соотвѣтствуютъ значеніямъ w съ положительной чисто-мнимой частью. На меридіанѣ различаемъ полумеридіанъ положительныхъ вещественныхъ чиселъ (сплошная линія на рис. 21) и полумеридіанъ отрицательныхъ чиселъ (пунктиръ).

Теперь изслѣдуемъ изображенія этой меридіанальной линіи L на сферѣ z-овъ, производящія характеристическое дѣленіе послѣдней на полуобласти. Вдоль положительнаго полумеридіана $w = r$, при чемъ r пробѣгаетъ рядъ значеній отъ 0 до ∞. Поэтому, на основаніи извѣстной формулы изъ теоріи комплексныхъ чиселъ, находимъ:

$$z = \sqrt[n]{w} = \left|\sqrt[n]{r}\right| \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right), \text{ гдѣ } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Эти значенія z заполняютъ, для различныхъ k, тѣ полумеридіаны сферы z, которые составляютъ съ полумеридіаномъ положительныхъ вещественныхъ чиселъ углы $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$. Такимъ образомъ, эти линіи соотвѣтствуютъ той половинѣ L, которая изображена сплошной линіей. Аналогично этому на отрицательномъ полумеридіанѣ сферы w надо положить $w = -r = r.e^{i\pi}$, гдѣ снова $0 \leqq r \leqq \infty$; это даетъ:

$$z = \sqrt[n]{w} = \left|\sqrt[n]{r}\right| \cdot \left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right),$$

гдѣ $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Эти значенія заполняютъ n полумеридіановъ шара z съ „географическими долготами“ $\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \ldots, \frac{(2n-1)\pi}{n}$, которые, такимъ образомъ, дѣлятъ пополамъ углы между предыдущими полумеридіанами. Такимъ образомъ, сфера z распадается на $2n$ равныхъ двусторонниковъ съ вершинами въ сѣверномъ и южномъ полюсѣ — подобно тому, какъ надрѣзаютъ апельсинъ. Это подраздѣленіе въ точности соотвѣтствуетъ общей теоріи; въ частности, только въ замѣчательныхъ точкахъ—въ обоихъ полюсахъ—встрѣчаются болѣе, чѣмъ по

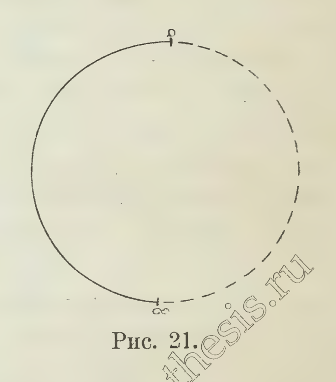
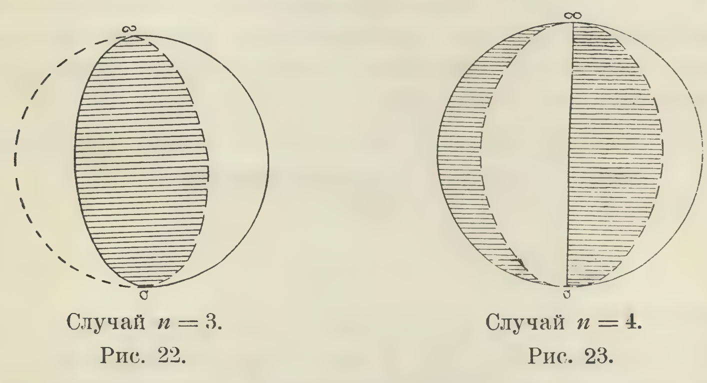


Рис. 21.

двѣ полуобласти, а именно по $2n$, что соотвѣтствуетъ кратности $n-1$. Что же касается распредѣленія заштрихованныхъ и незаштрихованныхъ полуобластей, то необходимо опредѣлить относительно одной какой-нибудь полуобласти, слѣдуетъ ли ее заштриховать или нѣтъ; тогда остальныя полуобласти придется заштриховать черезъ одну. Если смотрѣть на заштрихованную половину сферы w (т. е. на заднее полушаріе), то видимъ, что сплошная часть ея периферіи лежитъ влѣво отъ насъ, а пунктирная вправо. А такъ какъ мы имѣемъ дѣло съ конформнымъ отображеніемъ безъ переворачиванія угловъ (или „прямымъ" конформнымъ отображеніемъ), то и каждая заштрихованная полуобласть на сферѣ z должна быть такъ расположена, что сплошная часть ограничивающей ее линіи лежитъ слѣва, а пунктирная



Случай $n=3$.
Рис. 22.

Случай $n=4$.
Рис. 23.

часть справа. Это даетъ намъ полное знаніе распредѣленія полуобластей на сферѣ z. Слѣдуетъ обратить вниманіе на характерное различіе въ распредѣленіи областей на обѣихъ половинахъ сферы z, въ зависимости отъ того, есть ли n четное или нечетное число, какъ это видно на рис. 22 и 23 для случаевъ $n=3$ и $n=4$.

Хочу обратить ваше вниманіе и на то, насколько дѣйствительно необходимо перейти къ комплексной сферѣ для полнаго пониманія положенія вещей; въ случаѣ комплексной плоскости мы получили бы подраздѣленіе ея на прямолинейно ограниченные секторы, съ вершинами въ началѣ координатъ, и представлялось бы далеко не такимъ нагляднымъ то обстоятельство, что $z=\infty$,

какъ замѣчательная точка, и $w=\infty$, какъ точка развѣтвленія, имѣютъ то же значеніе, что и точки $z=0$ и $w=0$.

Теперь мы имѣемъ основу для полнаго познанія функціональной связи между z и w; остается только изучить конформное отображеніе каждаго изъ $2n$ сферическихъ двусторонниковъ на ту или другую полусферу w. Но я не стану здѣсь входить въ разсмотрѣніе этого вопроса; всякому, кому вообще приходилось имѣть дѣло съ конформнымъ отображеніемъ, этотъ случай знакомъ, какъ одинъ изъ простѣйшихъ и въ высшей степени наглядныхъ примѣровъ. Къ способамъ численнаго опредѣленія z намъ еще придется вернуться ниже.

Теперь же займемся важнымъ вопросомъ о взаимномъ соотношеніи между отдѣльными однородными полуобластями на сферѣ z. Точнѣе говоря: $w=z^n$ принимаетъ одно и то же значеніе въ соотвѣтственныхъ точкахъ всѣхъ n заштрихованныхъ областей; не выражаются ли отвѣчающія этимъ точкамъ значенія z простымъ образомъ другъ черезъ друга? Дѣйствительно, мы сразу видимъ, что для $z'=z\,.\,\varepsilon$, гдѣ ε обозначаетъ какой-нибудь изъ корней n-ой степени изъ единицы, всегда $z'^n=z^n$, т. е. $w=z^n$ принимаетъ одно и то же значеніе во всѣхъ n точкахъ:

$$z'=\varepsilon^k\,.\,z=e^{\frac{2ki\pi}{n}}\,.\,z\quad(k=0,1,2,\ldots,n-1)\,. \qquad (2)$$

Поэтому эти n точекъ распредѣлены какъ разъ между всѣми n заштрихованными областями и пробѣгаютъ по каждой изъ нихъ, когда z движется по одной какой-нибудь; то же имѣетъ мѣсто и для незаштрихованныхъ областей. Но каждая подстановка вида (2) обозначаетъ геометрически вращеніе сферы z около вертикальной оси $(0,\infty)$ на уголъ $k\cdot\frac{2\pi}{n}$, такъ какъ въ комплексной плоскости, какъ извѣстно, умноженіе на $e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ изображаетъ вращеніе около начала на уголъ $\frac{2k\pi}{n}$. Такимъ образомъ, соотвѣтственныя точки нашихъ сферическихъ областей, какъ и самыя области, переходятъ другъ въ друга при n такихъ вращеніяхъ около вертикальной оси.

Поэтому, если бы мы заранѣе могли опредѣлить хоть одну заштрихованную область сферы, то это замѣчаніе дало бы намъ и остальныя однородныя области. При этомъ примѣняется только то свойство подстановокъ (2), что онѣ преобразовываютъ уравненіе (1) само въ себя (т. е. уравненіе $z^n = w$ превращаютъ въ $z'^n = w$) и что число ихъ совпадаетъ со степенью уравненія. Въ дальнѣйшихъ примѣрахъ мы всегда будемъ имѣть возможность заранѣе указать такія линейныя подстановки и постоянно будемъ пользоваться тѣмъ существеннымъ упрощеніемъ, которое благодаря этому вносится въ разрѣшеніе вопроса о подраздѣленіи на области.

Теперь мы воспользуемся нашимъ примѣромъ для выясненія одного важнаго понятія весьма общаго характера, а именно понятія неприводимости въ приложеніи къ уравненіямъ, которыя раціонально содержатъ одинъ параметръ w. О неприводимости уравненій съ раціональными числовыми коэффиціентами мы уже говорили по поводу построенія правильнаго семиугольника. Уравненіе $f(z,w) = 0$ (напримѣръ, наше уравненіе: $z^n - w = 0$), въ которомъ $f(z,w)$ представляетъ многочленъ, цѣлый относительно z, и коэффиціенты котораго являются раціональными функціями отъ w, называется приводимымъ по отношенію къ параметру w, если f разлагается на произведеніе двухъ многочленовъ того же рода:

$$f(z, w) = f_1(z, w) . f_2(z, w);$$

въ противномъ случаѣ уравненіе называется неприводимымъ относительно w. Все обобщеніе, по сравненію съ прежнимъ понятіемъ, сводится къ тому, что подъ „областью раціональности“, въ которой мы оперируемъ и къ которой должны принадлежать всѣ коэффиціенты разсматриваемыхъ многочленовъ, вмѣсто совокупности всѣхъ раціональныхъ чиселъ теперь мы понимаемъ совокупность всѣхъ раціональныхъ функцій одного параметра w; мы переходимъ, такимъ образомъ, отъ точки зрѣнія чистой теоріи чиселъ къ точкѣ зрѣнія теоріи функцій.

Реализуя всякое уравненіе $f(z, w) = 0$ посредствомъ его Римановой поверхности, можно установить *простой критерій приводимости въ этомъ новомъ смыслѣ*. Въ самомъ дѣлѣ, если уравненіе приводимо, то всякая пара значеній $z \mid w$, удовлетворяющая ему, должна обращать въ 0 либо $f_1(z, w)$, либо $f_2(z, w)$. Но рѣшенія уравненій $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ изображаются ихъ Римановыми поверхностями, которыя не имѣютъ между собой ничего общаго и не представляютъ одного связнаго цѣлаго. Слѣдовательно, *Риманова поверхность, принадлежащая приводимому уравненію* $f(z, w) = 0$ *должна распадаться, по крайней мѣрѣ, на двѣ отдѣльныя части.*

Поэтому мы можемъ теперь сразу же утверждать, что *уравненіе* $z^n - w = 0$ *неприводимо въ смыслѣ теоріи функцій*. Въ самомъ дѣлѣ, въ каждой точкѣ развѣтвленія ея Римановой поверхности, которая намъ въ точности извѣстна, циклически связаны между собой всѣ n листовъ, и, кромѣ того, вся поверхность отображается на сплошной сферѣ z; поэтому о распаденіи на части не можетъ быть и рѣчи.

Въ видѣ приложенія, мы можемъ теперь заняться разрѣшеніемъ одной уже раньше затронутой популярной математической проблемы, а именно — задачи о раздѣленіи любого угла φ *на* n *равныхъ частей, въ частности — для* $n = 3$ *— задачи о трисекціи угла*. Задача состоитъ въ томъ, чтобы найти *точное построеніе съ помощью циркуля и линейки, которое давало бы дѣленіе любого угла* φ *на три равныя части*. Для цѣлаго ряда *спеціальныхъ* значеній угла φ легко можно найти такія построенія. Я хочу познакомить васъ съ ходомъ мыслей въ доказательствѣ невозможности трисекціи угла въ указанномъ смыслѣ; при этомъ я попрошу васъ вспомнить доказательство невозможности построенія правильнаго семиугольника съ помощью циркуля и линейки. Какъ и въ томъ доказательствѣ, мы сведемъ задачу къ *неприводимому кубическому уравненію* и затѣмъ покажемъ, что его невозможно рѣшить посредствомъ однихъ только извлеченій квадратнаго корня. Но только теперь въ уравненіе будетъ входить *параметръ* — уголъ φ, — тогда какъ раньше коэффиціенты были цѣлыми чис-

лами; соотвѣтственно этому, теперь *вмѣсто числовой должна оказаться функціональная неприводимость*.

Чтобы получить уравненіе нашей проблемы, представимъ себѣ, что при положительной полуоси вещественныхъ чиселъ построенъ уголъ φ (рис. 24); тогда его вторая сторона пересѣчетъ окружность радіуса 1 въ точкѣ

$$w = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

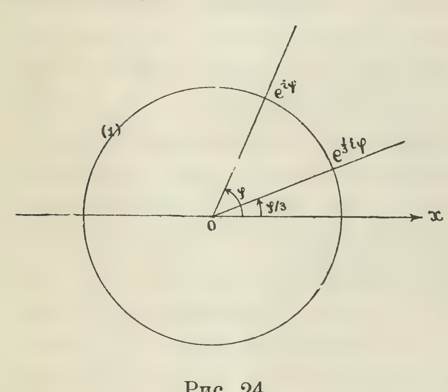


Рис. 24.

Наша задача сводится къ тому, чтобы найти такое независимое отъ величины угла φ построеніе, состоящее изъ конечнаго числа операцій съ циркулемъ и линейкой, которое всякій разъ давало бы точку пересѣченія этой окружности со стороной угла $\frac{\varphi}{3}$, т. е. точку

$$z = e^{\frac{i\varphi}{3}} = \cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}.$$

Это значеніе z удовлетворяетъ уравненію

$$z^3 = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad (3)$$

и аналитическій эквивалентъ нашей геометрической задачи состоитъ въ томъ, чтобы *рѣшить это уравненіе посредствомъ конечнаго числа послѣдовательно извлекаемыхъ одинъ изъ другого квадратныхъ корней изъ раціональныхъ функцій отъ* $\cos\varphi$ *и* $\sin\varphi$, — ибо это суть координаты точки w, изъ которыхъ мы должны исходить при нашемъ построеніи.

Прежде всего надо убѣдиться въ томъ, что *уравненіе* (3) *неприводимо съ точки зрѣнія теоріи функцій*. Правда, это уравненіе не вполнѣ подходитъ подъ тотъ

типъ уравненій, который, мы имѣли въ виду въ предыдущихъ общихъ разсужденіяхъ: вмѣсто раціонально входящаго комплекснаго параметра w здѣсь раціонально входятъ двѣ функціи — косинусъ и синусъ — вещественнаго параметра φ. Будетъ естественнымъ развитіемъ нашего понятія, если мы назовемъ здѣсь многочленъ $z^3 - (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ приводимымъ при томъ условіи, что онъ распадается на многочлены относительно z, коэффиціенты которыхъ тоже являются раціональными функціями отъ $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Можно дать критерій понимаемой въ этомъ смыслѣ приводимости, вполнѣ подобный прежнему. А именно, если φ въ равенствѣ (3) пробѣгаетъ всѣ вещественныя значенія, то $w = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ обѣгаетъ въ то же время окружность радіуса 1 въ плоскости w, которому въ силу стереографической проекціи соотвѣтствуетъ экваторъ на сферѣ w. Линія, лежащая надъ этой сферой на Римановой поверхности уравненія $z^3 = w$ и одновременно пробѣгающая всѣ 3 листа, уравненіемъ (3) взаимно-однозначно отображается на окружности радіуса 1 сферы z-овъ и поэтому можетъ быть, въ извѣстной сетпени, названа его „одномѣрнымъ Римановымъ образомъ". Ясно, что подобнымъ образомъ можно для всякаго уравненія вида $f(z, \cos\varphi, \sin\varphi) = 0$ построить такой Римановъ образъ; для этого нужно взять столько экземпляровъ окружностей съ радіусомъ 1 и съ длиной дуги φ, сколько корней имѣетъ уравненіе, и соединить ихъ въ одно цѣлое соотвѣтственно связности корней. Далѣе заключаемъ, совершенно подобно прежнему, что уравненіе (3) только тогда могло бы быть приводимымъ, если бы его одномѣрный Римановъ образъ распадался на отдѣльныя части; но въ данномъ случаѣ это не имѣетъ мѣста, и потому неприводимость нашего уравненія (3) доказана.

Прежнее доказательство того, что всякое кубическое уравненіе съ раціональными численными коэффиціентами, разрѣшимое посредствомъ ряда извлеченій квадратнаго корня, является приводимымъ, можетъ быть буквально перенесено на настоящій случай неприводимаго въ функціональномъ смыслѣ уравненія (3)*);

*) См. часть I этихъ лекцій (Ариѳметика).

стóитъ только вмѣсто словъ „раціональныя числа“ говорить каждый разъ „раціональныя функціи отъ $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$“. Послѣ этого является вполнѣ доказаннымъ наше утвержденіе о томъ, что невозможно выполнить посредствомъ конечнаго числа операцій съ циркулемъ и линейкой дѣленіе на три части произвольнаго угла φ; такимъ образомъ, всѣ старанія людей, занимающихся трисекціей угла, обречены на вѣчную безплодность!

Теперь перейдемъ къ разсмотрѣнію нѣсколько болѣе сложнаго примѣра.

2. Уравненіе діэдра.

Такъ называютъ слѣдующее уравненіе:

$$w = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right); \tag{1}$$

основаніе же для такого названія будетъ выяснено ниже. Умножая на z^n, находимъ что степень этого уравненія равна $2n$. Вводя однородныя перемѣнныя, получаемъ:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_1^{2n} + z_2^{2n}}{2z_1^n \cdot z_2^n};$$

здѣсь дѣйствительно числитель и знаменатель представляютъ формы измѣренія $2n$. Ихъ функціональный опредѣлитель равенъ

$$\begin{vmatrix} 2n \cdot z_1^{2n-1}, & 2n \cdot z_2^{2n-1} \\ 2nz_1^{n-1}z_2^n, & 2nz_1^n z_2^{n-1} \end{vmatrix} = 4n^2 z_1^{n-1} z_2^{n-1} (z_1^{2n} - z_2^{2n}).$$

Прежде всего, онъ имѣетъ корни $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$, каждый $(n-1)$-ой кратности; остальные $2n$ корней получаются изъ уравненія:

$$z_1^{2n} - z_2^{2n} = 0, \text{ или } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \pm 1.$$

Если ввести наряду съ корнемъ n-ой степени изъ единицы

$$\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}},$$

которымъ мы пользовались уже выше, еще и слѣдующій n-ый

корень изъ -1:

$$\varepsilon' = e^{\frac{i\pi}{n}},$$

то остальные $2n$ корней будутъ:

$$\frac{z_1}{z_2} = \varepsilon^r \text{ и } \frac{z_1}{z_2} = \varepsilon'.\varepsilon^r \quad (r = 0, 1, \dots n-1),$$

такъ что соотвѣтствующія значенія $z = \frac{z_1}{z_2}$ имѣютъ каждое модуль 1 и поэтому расположены на экваторѣ z (соотвѣтствующемъ окружности радіуса 1 на плоскости z), а именно на одинаковыхъ угловыхъ разстояніяхъ $\frac{\pi}{n}$ одно отъ другого. Итакъ, мы находимъ слѣдующія замѣчательныя точки на сферѣ z: южный полюсъ $z = 0$ и сѣверный полюсъ $z = \infty$, каждый съ кратностью $n-1$; $2n$ точекъ на экваторѣ $z = \varepsilon^r, \varepsilon'.\varepsilon^r$, каждая съ кратностью 1.

Сумма всѣхъ кратностей равна $2.(n-1) + 2n.1 = 4n-2$, какъ того требуетъ общая теорема (стр. 178) при степени $2n$. Въ силу уравненія (1) замѣчательнымъ точкамъ $z = 0, \infty$ на сферѣ w отвѣчаетъ точка $w = \infty$, всѣмъ точкамъ $z = \varepsilon^r$ — точка $w = +1$ и, наконецъ, всѣмъ точкамъ $z = \varepsilon'.\varepsilon^r$ — точка $w = -1$. Поэтому на шарѣ w имѣется только 3 мѣста развѣтвленія: $\infty, +1, -1$, но зато расположены надъ

$w = \infty$ ...2 точки развѣтвленія кратности $n-1$

$w = +1$ ...n точекъ развѣтвленія кратности 1.

$w = -1$ ...n точекъ развѣтвленія кратности 1.

Такимъ образомъ, изъ $2n$ листовъ поверхности Римана въ точкѣ $w = \infty$ циклически сходятся обѣ группы по n листовъ, а въ каждой изъ точекъ $w = +1$ и $w = -1$ n разъ по два листа. Детали расположенія этихъ листовъ представятся нягляднѣе, если мы изучимъ соотвѣтствующее подраздѣленіе сферы z на полуобласти.

Для этого полезно знать, какъ замѣчено выше, тѣ линейныя подстановки, которыя превращаютъ уравненіе

(1) само въ себя. Прежде всего оно остается неимѣннымъ, подобно двучленному уравненію, при n подстановкахъ:

$$z' = \varepsilon^r \, . \, z \; (r = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \text{ гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}, \quad (2^a)$$

такъ какъ при нихъ $z'^n = z^n$. Точно такъ же оно переходитъ само въ себя при слѣдующихъ n подстановкахъ:

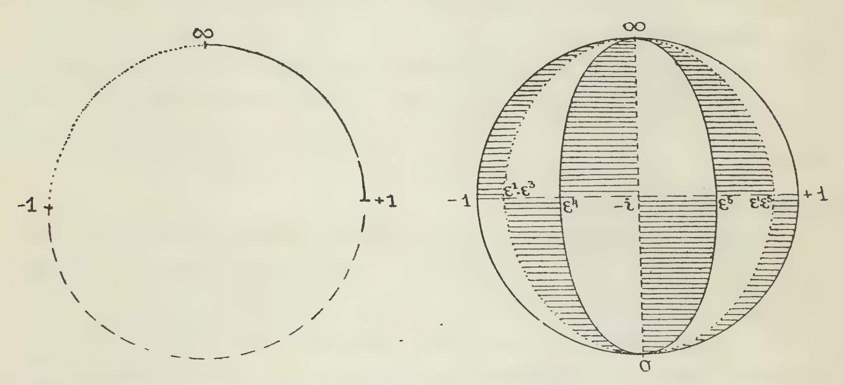
$$z' = \frac{\varepsilon^r}{z} \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1), \qquad (2^b)$$

такъ какъ онѣ только обмѣниваютъ мѣстами z^n и $\frac{1}{z^n}$. Итого, мы имѣемъ $2n$ линейныхъ преобразованій уравненія (1) самого въ себя, т. е. какъ разъ столько, сколько единицъ въ степени уравненія. Поэтому, зная при нѣкоторомъ значеніи w одинъ корень z_0 уравненія, можно сразу получить всѣ $2n$ корней: $\varepsilon^r \, . \, z_0$ и $\frac{\varepsilon^r}{z_0} \, (r = 0, 1, \ldots, n-1)$, если только извѣстенъ корень n-ой степени изъ 1.

Теперь перейдемъ къ изслѣдованію того подраздѣленія сферы z, которое соотвѣтствуетъ разрѣзанію Римановой поверхности на сферѣ w вдоль вещественнаго меридіана; при этомъ мы будемъ различать на вещественномъ меридіанѣ сферы w, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, отрѣзки, опредѣляемые тремя точками развѣтвленія, а именно: отъ $+1$ до ∞ (сплошная линія), отъ ∞ до -1 (пунктиръ изъ точекъ), отъ -1 до $+1$ (пунктиръ изъ черточекъ) (см. рис. 25). Каждому изъ этихъ трехъ отрѣзковъ на сферѣ z отвѣчаетъ по $2n$ различныхъ криволинейныхъ отрѣзковъ, которые всѣ получаются изъ одного изъ нихъ съ помощью $2n$ линейныхъ подстановокъ (2); поэтому достаточно опредѣлить каждый разъ положеніе одного изъ нихъ. Съ другой стороны, всѣ эти отрѣзки должны соединять замѣчательныя точки $z = 0, \infty, \varepsilon^r, \varepsilon' . \varepsilon^r$, которыя мы прежде всего отмѣчаемъ на сферѣ z; аналогично предыдущему случаю, изображеніе этихъ отрѣзковъ нѣсколько различается въ зависимости отъ того, есть ли n четное или нечетное число. Для насъ достаточно будетъ наглядно представить себѣ одинъ какой-

нибудь опредѣленный случай,—напримѣръ, $n=6$. Рис. 25 изображаетъ въ прямоугольной проекціи переднюю сторону сферы z; на немъ видны изъ точекъ ε^n, лежащихъ на экваторѣ на разстояніи въ 60^0 другъ отъ друга, начиная слѣва, точки $\varepsilon^3=-1$, $\varepsilon^4, \varepsilon^5, \varepsilon^6=1$, а изъ точекъ $\varepsilon'.\varepsilon^r$, расположенныхъ посрединѣ между первыми, видны точки $\varepsilon'.\varepsilon^3, \varepsilon'.\varepsilon^4=-i, \varepsilon'.\varepsilon^5$.

Я утверждаю, что квадрантъ $(+1,\infty)$ вещественнаго меридіана z соотвѣтствуетъ сплошной части $+1<w<+\infty$ меридіана w. Дѣйствительно, если положить $z=r$ и давать r вещественныя значенія отъ 1 до ∞, то $w=\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)=\frac{1}{2}\left(r^n+\frac{1}{r^n}\right)$ будетъ принимать также воз-



Случай $n=6$. Слѣва сфера w, справа сфера z.

Рис. 25.

растающія вещественныя значенія отъ 1 до ∞. Изъ этой кривой получаются n другихъ сплошныхъ кривыхъ на сферѣ z съ помощью n линейныхъ подстановокъ (2^a), которыя, какъ мы знаемъ изъ перваго примѣра, изображаютъ вращеніе сферы около вертикальной оси $(0,\infty)$ на углы $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$; такимъ образомъ, мы получаемъ n четвертей меридіана, соединяющихъ сѣверный полюсъ ∞ съ точками ε^r экватора. Еще одну сплошную кривую мы получимъ, примѣняя, напримѣръ, подстановку $z'=\frac{1}{z}$, которая превращаетъ квадрантъ меридіана отъ $+1$ до ∞ въ нижній вещественный квадрантъ меридіана, соединяющій

точки $+1$ и 0. Если подвергнуть и эту кривую всѣмъ вращеніямъ (2^a),— соединеніе этихъ вращеній съ $z' = \frac{1}{z}$ дѣйствительно даетъ всѣ подстановки (2^b), — то получимъ еще n четвертей меридіана, соединяющихъ южный полюсъ съ точками экватора ε^r, такъ что мы дѣйствительно получаемъ $2n$ искомыхъ сплошныхъ кривыхъ, соотвѣтствующихъ сплошной четверти меридіана w. При $n=6$ эти кривыя составляютъ три полныхъ меридіана, которые получаются изъ вещественнаго меридіана вращеніемъ на 0^0, 60^0, 120^0.

Теперь мы можемъ убѣдиться въ томъ, что совокупность значеній $z = \varepsilon' . r$, гдѣ r снова пробѣгаетъ рядъ вещественныхъ значеній отъ $+1$ до ∞, соотвѣтствуетъ части вещественнаго меридіана w, изображенной точечнымъ пунктиромъ; въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (1) даетъ при этихъ значеніяхъ:

$$w = (\varepsilon')^n \cdot \frac{1}{2}\left(r^n + \frac{1}{r^n}\right) = -\frac{1}{2}\left(r^n + \frac{1}{r^n}\right),$$

слѣдовательно, w постоянно убываетъ отъ -1 до $-\infty$. Но $z = \varepsilon' . r$ представляетъ четверть меридіана отъ ∞ до точки ε' на экваторѣ; примѣняя къ ней снова подстановки (2^a) и (2^b), находимъ, аналогично предыдущему, что части вещественнаго меридіана w, отмѣченной точечнымъ пунктиромъ, соотвѣтствуютъ всѣ четверти меридіана, соединяющія полюсы съ точками экватора $\varepsilon' . \varepsilon^r$, такъ что эти меридіаны дѣлятъ пополамъ углы между меридіанами, которыми мы пользовались выше.

Остается найти $2n$ криволинейныхъ отрѣзковъ, соотвѣтствующихъ полумеридіану $-1 < w < +1$, отмѣченному пунктиромъ изъ черточекъ; я докажу, что это суть какъ разъ отрѣзки, опредѣляемые на экваторѣ сферы z точками ε^r и $\varepsilon' . \varepsilon^r$. Въ самомъ дѣлѣ, экваторъ изображаетъ точки съ модулемъ 1 и поэтому можетъ быть представленъ посредствомъ функціи $z = e^{i\varphi}$, гдѣ φ принимаетъ вещественныя значенія отъ 0 до 2π. Поэтому соотвѣтствующее w равно

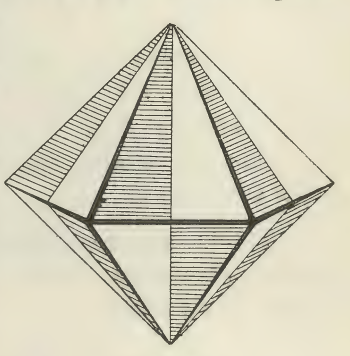
$$w = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi}\right) = \cos(n\varphi);$$

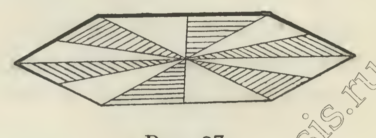
оно, дѣйствительно, остается всегда вещественнымъ и по модулю меньше 1, а именно принимаетъ по разу всѣ значенія между $+1$ и -1, когда φ пробѣгаетъ дугу длиною въ $\frac{\pi}{n}$, т. е. одинъ изъ тѣхъ отрѣзковъ, о которыхъ идетъ рѣчь.

Опредѣленныя такимъ образомъ кривыя раздѣляютъ сферу z на $2.2n$ — вообще треугольной формы — полуобластей; каждая изъ нихъ ограничена тремя кривыми, по одной каждаго рода, и соотвѣтствуетъ одному изъ полулистовъ поверхности Римана. Только въ замѣчательныхъ точкахъ сходятся вмѣстѣ по нѣсколько областей, а именно, какъ это и должно быть по таблицѣ кратностей (стр. 190), въ сѣверномъ и южномъ полюсахъ по $2.n$, а въ каждой изъ точекъ ε^r и $\varepsilon'.\varepsilon^r$ по 2.2. Чтобы опредѣлить, какія изъ этихъ областей слѣдуетъ заштриховать, обратимъ вниманіе на то, что граница задней полусферы w, считая въ положительномъ направленіи, состоитъ изъ сплошной, черточно-пунктирной и точечно-пунктирной кривой; въ виду конформности отображенія, слѣдуетъ заштриховать всѣ тѣ полуобласти, у которыхъ три части периферіи слѣдуютъ одна за другой въ такомъ же порядкѣ, всѣ же остальныя оставить безъ штриховки.

Такимъ образомъ, мы получили полный геометрическій образъ зависимости между z и w, изображаемой нашимъ уравненіемъ; этотъ образъ можно прослѣдить еще дальше, подробнѣе разбирая конформное отображеніе отдѣльной треугольной области на полусферѣ w, но мы не станемъ здѣсь этимъ заниматься. Я хочу только описать эти результаты въ примѣненіи къ случаю $n=6$, на которомъ мы останавливались выше. Въ этомъ случаѣ сфера распадается на 12 заштрихованныхъ и на 12 незаштрихованныхъ треугольниковъ, изъ которыхъ на нашемъ рисункѣ видно по 6 тѣхъ и другихъ. Въ каждомъ полюсѣ сходится по 6 треугольниковъ того и другого рода, а въ 12 равноотстоящихъ точкахъ экватора по 2. Каждая область конформно отображается на такомъ же полулистѣ поверхности Римана; послѣдніе, соотвѣтственно группировкѣ полуобластей, сопряжены по 6 полулистовъ каждаго рода надъ мѣстомъ развѣтвленія ∞ и по 2 каждаго рода надъ мѣстами развѣтвленія ± 1.

Особенно удобный и, въ виду аналогіи съ послѣдующимъ, особенно цѣнный образъ дѣленія сферы получается такъ: соединяютъ прямыми каждыя двѣ сосѣднія точки дѣленія экватора, отстоящія одна отъ другой на $\frac{2\pi}{n}$ (напр., всѣ ε^r), и затѣмъ каждую изъ нихъ съ обоими полюсами (рис. 26). Такимъ образомъ получаютъ вписанную въ сферу двойную пирамиду съ n (на нашемъ рисункѣ 6) боковыми гранями у каждой изъ простыхъ пирамидъ. Если спроектировать сферу съ ея областями изъ центра на эту пирамиду, то каждая треугольная грань раздѣлится своей высотой на заштрихованную и незаштрихованную половину. Если принять эту двойную пирамиду за изображеніе дѣленія сферы и, слѣдовательно, нашей функціи, то она окажетъ намъ тѣ же услуги, какія представятъ правильные многогранники въ нижеслѣдующихъ примѣрахъ. Мы достигнемъ полной аналогіи съ послѣдними, если представимъ себѣ, что наша двойная пирамида сплюснута въ плоскость основаній, и станемъ разсматривать получающійся при этомъ дважды покрытый правильный n-угольникъ (шестиугольникъ), обѣ стороны котораго раздѣлены прямыми, соединяющими центръ его съ вершинами и со срединами сторонъ, на $2n$ треугольниковъ каждая (рис. 27). Я всегда былъ склоненъ причислять этотъ образъ, называя его діэдромъ, къ 5 правильнымъ многогранникамъ, которые извѣстны со временъ Платона. Дѣйствительно, этотъ образъ удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ, при помощи которыхъ обыкновенно опредѣляютъ правильный многогранникъ: всѣ его ребра равны между собой (стороны правильнаго n-угольника), и углы его также равны между собой (углы n-угольника); единственное различіе заключается въ томъ, что онъ не


Рис. 26.


Рис. 27.

представляетъ собой тѣла въ тѣсномъ смыслѣ слова, такъ какъ заключаетъ въ себѣ объемъ, равный 0. Такимъ образомъ, теорема *Платона* о томъ, что существуетъ только 5 правильныхъ многогранниковъ, справедлива лишь въ томъ случаѣ, если включить въ опредѣленіе требованіе — всегда, конечно, молча подразумѣваемое,— чтобы многогранникъ былъ тѣломъ въ *собственномъ смыслѣ* слова.

Исходя отъ діэдра, можно, очевидно, получить наше дѣленіе сферы, проектируя на сферу не только его вершины, но и средины его сторонъ и боковыя грани; поэтому его тоже можно разсматривать, *какъ представителя изображаемой нашимъ уравненіемъ функціональной зависимости между* w и z, такъ что это уравненіе можно, какъ уже было указано, назвать *уравненіемъ діэдра*.

Теперь мы переходимъ къ упомянутымъ уже примѣрамъ, которые стоятъ въ самомъ тѣсномъ отношеніи къ правильнымъ тѣламъ *Платона*.

3. Уравненія тетраэдра, октаэдра и икосаэдра.

Мы увидимъ, что два послѣднія уравненія мы могли бы съ такимъ же правомъ назвать уравненіями *куба* и *додекаэдра*, такъ что дѣйствительно перебраны всѣ 5 правильныхъ тѣлъ. Здѣсь мы пойдемъ по обратному пути, сравнительно съ предыдущимъ примѣромъ: *сперва мы выведемъ, исходя отъ правильнаго тѣла, дѣленіе сферы на области и затѣмъ составимъ соотвѣтствующее алгебрическое уравненіе, которое находитъ въ этой фигурѣ свое геометрическое наглядное изображеніе*. Но мнѣ придется при этомъ часто ограничиваться намеками, и поэтому я съ самаго начала указываю вамъ на мою книгу: „*Лекціи объ икосаэдрѣ и о рѣшеніи уравненій пятой степени*“ („Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade“, Leipzig 1884), въ которой вы найдете систематическое изложеніе всей этой обширной теоріи со всѣми ея приложеніями.

Я буду разбирать всѣ три случая параллельно и начну съ *дѣленія сферы на области для тетраэдра*.

1) Тетраэдръ. Раздѣлимъ каждый изъ 4 равностороннихъ треугольниковъ тетраэдра тремя высотами на 6 треугольничковъ, которые по три конгруентны между собой, въ то время какъ 2 неконгруентныхъ треугольничка зеркально симметричны между собой (рис. 28). Въ результатѣ получается подраздѣленіе всей поверхности тетраэдра на 12 конгруентныхъ между собой и 12 другихъ, тоже конгруентныхъ между собой, но зеркально равныхъ первымъ, треугольничковъ; одну изъ этихъ группъ треугольничковъ отмѣтимъ штриховкой (рис. 29). Что же касается угловъ этихъ треугольниковъ, то можно различать 3 рода ихъ, такъ что каждый треугольникъ имѣетъ по одному углу каждаго рода:

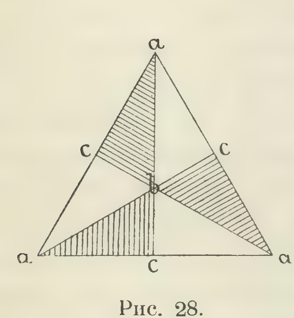


Рис. 28.

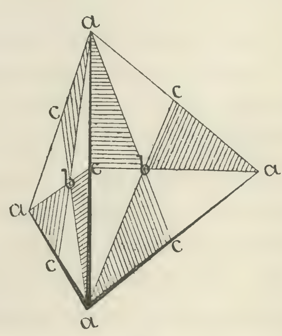


Рис. 29.

a) 4 вершины первоначальнаго тетраэдра, въ которыхъ сходится по 3 заштрихованныхъ и по 3 незаштрихованныхъ треугольника;

b) 4 центра боковыхъ граней, которые, въ свою очередь, образуютъ правильный тетраэдръ (противоположный тетраэдръ); въ нихъ сходится по 3 треугольника каждаго рода;

c) 6 срединъ реберъ, образующія правильный октаэдръ; въ нихъ сходится по 2 треугольника каждаго рода.

Если спроектировать это дѣленіе на треугольники изъ центра на описанную сферу, то послѣдняя раздѣлится на 2.12 треугольниковъ, ограниченныхъ дугами большихъ круговъ; они попеременно кон-

груентны и симметричны. Около каждой вершины рода a), b), c) расположено соотвѣтственно по 6, 6, 4 равныхъ угла и, такъ какъ сумма угловъ на поверхности шара вокругъ точки всегда равна 2π, то каждый изъ нашихъ сферическихъ треугольниковъ имѣетъ въ вершинахъ a и b углы $\frac{\pi}{3}$, а въ вершинѣ c уголъ $\frac{\pi}{2}$.

Характерное свойство этого подраздѣленія сферы заключается въ томъ, что оно — какъ и самъ тетраэдръ — при нѣкоторыхъ вращеніяхъ около центра переходитъ само въ себя. Вы легко можете представить себѣ это во всѣхъ деталяхъ на модели тетраэдра, которую вы видите передъ собой и которую я взялъ изъ нашей коллекціи моделей; но здѣсь я ограничусь тѣмъ, что перечислю всѣ возможныя вращенія, при чемъ къ нимъ всегда будетъ сопричисляться „движеніе", оставляющее фигуру въ покоѣ, въ качествѣ „тождественнаго вращенія". Выберемъ какую-нибудь опредѣленную вершину первоначальнаго тетраэдра; вращеніемъ мы можемъ совмѣстить ее съ любой другой вершиной тетраэдра (и даже съ нею же самой), что даетъ 4 возможныхъ случая. Оставляя же ее неподвижной въ одномъ изъ этихъ положеній, можно тремя различными способами совмѣстить тетраэдръ съ самимъ собой, а именно — вращая его на углы въ 0^0, 120^0 или 240^0 вокругъ прямой, проходящей черезъ эту неподвижную вершину и черезъ центръ. Это даетъ въ общемъ $4 . 3 = 12$ вращеній, которыя переводятъ тетраэдръ или соотвѣтствующее дѣленіе описанной сферы на треугольники въ самого себя. Посредствомъ такихъ вращеній можно любой заштрихованный (или незаштрихованный) треугольникъ перевести въ любой другой заштрихованный (соотвѣтственно незаштрихованный) треугольникъ; любое вращеніе вполнѣ опредѣлено, если данъ и этотъ второй треугольникъ.— Эти 12 вращеній образуютъ, очевидно, то, что называютъ группой G_{12}, т. е. если произвести два такихъ вращенія одно послѣ другого, то результатъ будетъ соотвѣтствовать одному изъ 12 вращеній.

Если разсматривать нашу сферу, какъ сферу z-овъ, то каждое изъ этихъ 12 вращеній можетъ быть представлено посредствомъ

линейнаго преобразованія z; получаемыя такимъ образомъ 12 линейныхъ преобразованій не измѣняютъ уравненія, принадлежащаго тетраэдру. Для сравненія я замѣчу, что, какъ вы сами можете убѣдиться, $2n$ линейныхъ подстановокъ уравненія діэдра можно интерпретировать, какъ совокупность вращеній діэдра въ себѣ.

2) Приложимъ аналогичныя разсужденія къ октаэдру; но теперь мы можемъ выражаться болѣе сжато. Раздѣлимъ, какъ и раньше, каждую изъ 8 боковыхъ треугольныхъ граней на 6 треугольничковъ; получается подраздѣленіе всей поверхности октаэдра на 24 конгруентныхъ между собой заштрихованныхъ треугольничка и на 24, въ свою очередь, конгруентныхъ между собой, но зеркально симметричныхъ по отношенію къ первымъ, незаштрихованныхъ треугольничковъ (рис. 30). И на этотъ разъ можно различать вершины трехъ родовъ:

a) 6 вершинъ октаэдра, въ которыхъ сходится по 4 треугольника каждаго рода;

b) 8 центровъ граней, образующіе вершины куба; въ нихъ сходится по 3 треугольника каждаго рода;

c) 12 techno срединъ реберъ, въ которыхъ встрѣчаются по 2 треугольника каждаго рода.

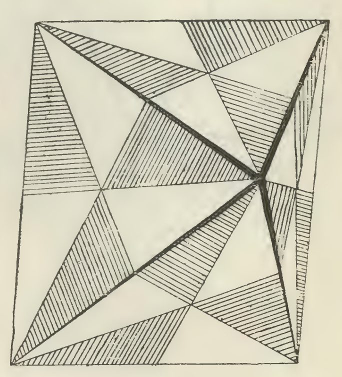


Рис. 30.

Переходя съ помощью центральной проекціи къ описанной сферѣ, получаемъ подраздѣленіе на 2.24 конгруентныхъ, соотвѣтственно симметричныхъ треугольника, каждый изъ которыхъ имѣетъ въ вершинѣ a уголъ $\frac{\pi}{4}$, въ вершинѣ b—уголъ $\frac{\pi}{3}$ и въ вершинѣ c—уголъ $\frac{\pi}{2}$. Принимая во вниманіе то обстоятельство, что вершины b образуютъ кубъ, легко можно убѣдиться въ томъ, что точно такое же подраздѣленіе получилось бы, если исходить

отъ куба и проектировать его вершины и средины граней и реберъ на сферу; такимъ образомъ, дѣйствительно не приходится разсматривать кубъ отдѣльно.

Совершенно такъ же, какъ и въ первомъ случаѣ, можно убѣдиться въ томъ, что какъ октаэдръ, такъ и это подраздѣленіе сферы на области переходятъ сами въ себя при 24 вращеніяхъ, образующихъ группу G_{24}; каждое отдѣльное вращеніе характеризуется тѣмъ, что оно переводитъ одинъ заданный треугольникъ въ опредѣленный другой треугольникъ.

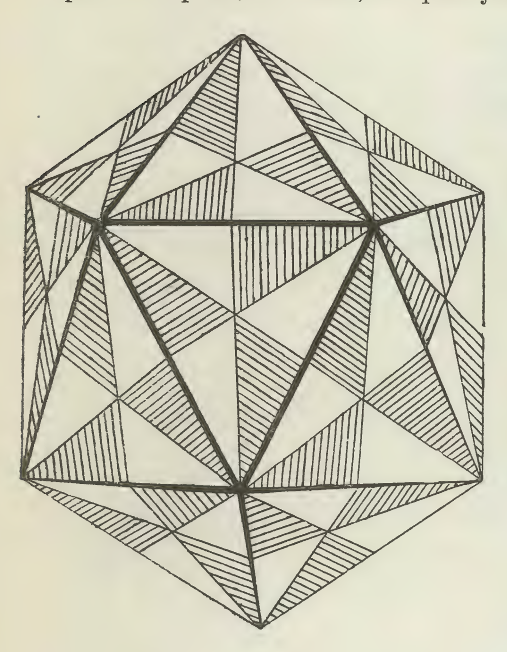


Рис. 31.

3) Теперь мы подошли къ икосаэдру (двадцатиграннику). И здѣсь въ основу кладемъ дѣленіе каждой изъ 20 треугольныхъ граней на 6 составляющихъ треугольничковъ и въ общемъ получаемъ 60 заштрихованныхъ и 60 незаштрихованныхъ такихъ треугольничковъ (рис. 31). Три типа вершинъ въ этомъ случаѣ будутъ:

a) 12 вершинъ икосаэдра, въ которыхъ сходится по 5 треугольниковъ каждаго рода;

b) 20 центровъ граней; они образуютъ вершины правильнаго пентагондодекаэдра (двѣнадцатигранника съ пятиугольными гранями); въ нихъ встрѣчается по 3 треугольника каждаго рода;

c) 30 срединъ реберъ; въ нихъ сходится по 2 треугольника того и другого рода.

Поэтому при перенесеніи на сферу каждый треугольникъ получаетъ при вершинахъ a, b, c углы $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. Изъ свойства угловъ b можно опять заключить,

что такая же фигура получилась бы изъ правильнаго додекаэдра. Наконецъ, можно видѣть, что икосаэдръ и соотвѣтствующее подразделеніе сферы переходятъ сами въ себя посредствомъ группы G_{60} изъ 60 вращеній сферы около центра. Эти вращенія, какъ и вращенія октаэдра, вы можете уяснить себѣ на модели, подобной той, которую вы видите здѣсь.

Я еще разъ, господа, хочу сопоставить тѣ углы сферическихъ треугольниковъ, которые получались въ трехъ разсмотрѣнныхъ случаяхъ, присоединяя сюда же и діэдръ:

Діэдръ: $\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2};$

Тетраэдръ: $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2};$

Октаэдръ: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2};$

Икосаэдръ: $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}.$

Натуралистъ, вѣроятно, немедленно заключилъ бы изъ этого, что возможны и дальнѣйшія аналогичныя подраздѣленія сферы съ углами $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}; \ldots$. Но математикъ не долженъ, разумѣется, примѣнять такихъ заключеній по аналогіи, и его осторожность оказывается въ данномъ случаѣ справедливой, такъ какъ дѣйствительно рядъ возможныхъ подраздѣленій сферы описаннаго рода обрывается на перечисленныхъ выше. Конечно, этотъ фактъ стоитъ въ связи съ тѣмъ, что нѣтъ другихъ правильныхъ многогранныхъ тѣлъ, кромѣ Платоновыхъ 5 тѣлъ. Послѣднее основаніе этого можно усмотрѣть въ нѣкоторомъ свойствѣ цѣлыхъ чиселъ, которое не можетъ быть сведено къ болѣе простымъ соображеніемъ. А именно, можно показать, что углы каждаго изъ нашихъ треугольниковъ должны быть такими цѣлыми частями π: $\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{r}$, чтобы было удовлетворено неравенство

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{r}>1;$$

оказывается, что этому неравенству удовлетворяютъ только перечисленныя выше рѣшенія. Впрочемъ, смыслъ этого неравенства легко понять, такъ какъ оно говоритъ, что сумма угловъ сферическаго треугольника всегда больше π.

Я хотѣлъ бы здѣсь еще упомянуть о томъ, что,— какъ многимъ изъ васъ, конечно, извѣстно,— разумное обобщеніе этой теоріи выводитъ за эти какъ будто слишкомъ узкія рамки: теорія автоморфныхъ функцій разсматриваетъ дѣленія сферы на безчисленное множество треугольниковъ съ суммой угловъ, меньшей π.

4. Продолженіе; выводъ уравненій.

Теперь мы переходимъ ко второй части нашей задачи, а именно къ установленію тѣхъ уравненій вида

$$\varphi(z) = w \,.\, \psi(z) = 0, \text{ или } w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \qquad (1)$$

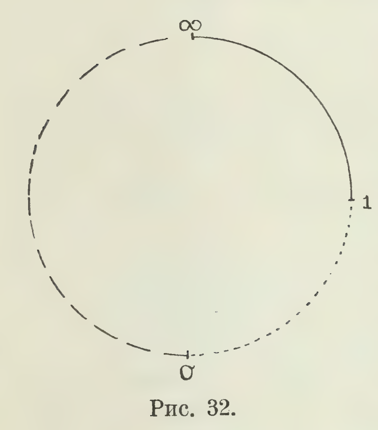


Рис. 32.

которыя принадлежатъ каждому изъ нашихъ подраздѣленій сферы, т. е. тѣхъ уравненій, въ силу которыхъ обѣ полусферы w отображаются на 2.12, или, соотвѣтственно, на 2.24, или, наконецъ, на 2.60 треугольничкахъ сферы z. Такимъ образомъ, каждому значенію w должно въ общемъ соотвѣтствовать по 12, 24, 60 значеній z — каждое въ треугольникѣ соотвѣтствующаго рода,— такъ что искомыя уравненія должны имѣть степень 12, 24, 60, которую мы будемъ обозначать вообще черезъ N. Но каждый треугольничекъ упирается на три замѣчательныя точки, такъ что во всякомъ случаѣ на сферѣ w должны быть 3 точки развѣтвленія, которыя мы помѣстимъ, какъ это принято, въ точкахъ $w = 0, 1, \infty$; въ качествѣ линіи разрѣза L, проходящей черезъ эти 3 точки, 3 отрѣзка которой должны соотвѣтствовать пограничнымъ линіямъ треугольниковъ z, мы снова возьмемъ меридіанъ вещественныхъ чиселъ (рис. 32).

Далѣе, мы устанавливаемъ, что въ каждомъ изъ трехъ случаевъ точкѣ $w=0$ соотвѣтствуютъ центры граней (углы b въ прежнемъ обозначеніи), точкѣ $w=1$ соотвѣтствуютъ средины реберъ (углы c) и точкѣ $w=\infty$ соотвѣтствуютъ вершины многогранника (углы a) (см. рис. 33.). При этихъ условіяхъ стороны треугольниковъ соотвѣтствуютъ такъ, какъ это указано на чертежѣ, тремъ отрѣзкамъ меридіана w, и при этомъ заштрихованные треугольники соотвѣтствуютъ задней, а незаштрихованные передней полусферѣ. При этомъ уравненіе (1) должно, соотвѣтственно этимъ сопряженіямъ, отображать взаимно-однозначно сферу z на N-листной Римановой поверхности, покрывающей сферу w и имѣющей развѣтвленія въ точкахъ 0, 1, ∞.

Можно было бы легко вывести a priori существованіе этого уравненія изъ общихъ теоремъ теоріи функцій, но я не хочу здѣсь предполагать необходимыхъ для этого знаній и предпочитаю болѣе эмпирическое построеніе отдѣльныхъ уравненій, которое, быть можетъ, дастъ намъ и болѣе живое и наглядное представленіе объ отдѣльныхъ моментахъ.

Рис. 33.

Представимъ себѣ уравненіе (1) написаннымъ въ однородныхъ перемѣнныхъ:

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{\Phi_N(z_1, z_2)}{\Psi_N(z_1, z_2)},$$

гдѣ Φ_N, Ψ_N обозначаютъ однородные многочлены измѣренія N въ z_1, z_2 ($N=12, 24$ или 60). При такомъ способѣ писанія уравненія исключительную роль играютъ точки $w_1=0$ и $w_2=0$ на сферѣ w; но такъ какъ наряду съ ними для насъ всегда представляетъ равный интересъ и третья точка развѣтвленія $w=1$ (въ однородныхъ перемѣнныхъ: $w_1-w_2=0$), то представляется цѣлесообразнымъ имѣть въ виду и слѣдующую форму уравненія:

$$\frac{w_1-w_2}{w_2}=\frac{X_N(z_1, z_2)}{\Psi_N(z_1, z_2)},$$

гдѣ $X_N=\Phi_N-\Psi_N$ тоже представляетъ форму N-го измѣренія.

Оба вида я предпочитаю соединить въ одну непрерывную пропорцію:

$$w_1:(w_1-w_2):w_2=\Phi_N(z_1,z_2):X_N(z_1,z_2):\Psi_N(z_1,z_2); \quad (2)$$

это представляетъ собой однородную форму уравненія (1) и въ ней одинаково приняты во вниманіе всѣ 3 точки развѣтвленія.

Теперь наша задача заключается въ томъ, чтобы составить формы Φ_N, X_N, Ψ_N; для этой цѣли мы сразу же поставимъ ихъ въ связь съ нашимъ дѣленіемъ сферы z. Изъ уравненія (2) мы находимъ, что при $w_1=0$ оказывается $\Phi_N(z_1,z_2)=0$, т. е. значенію $w=0$ соотвѣтствуютъ на сферѣ z N корней формы Φ_N. Съ другой же стороны, согласно нашимъ условіямъ, мѣсту развѣтвленія $w=0$ должны соотвѣтствовать центры граней многогранниковъ (вершины b въ нашемъ подраздѣленіи); число ихъ въ каждомъ случаѣ равно $\frac{N}{3}$; но въ каждой изъ этихъ точекъ встрѣчается по 3 заштрихованныхъ и по 3 незаштрихованныхъ треугольника, однократно отображенныхъ на отдѣльныхъ полусферахъ, такъ что каждую изъ нихъ слѣдуетъ считать тройнымъ корнемъ нашего уравненія. Такимъ образомъ, эти точки, если принять во вниманіе ихъ кратность, доставляютъ всѣ точки, соотвѣтствующія $w=0$, и, слѣдовательно, всѣ корни функціи Φ_N; такимъ образомъ, функція Φ_N имѣетъ исключительно тройные корни и представляетъ поэтому третью степень нѣкоторой формы $\varphi(z_1,z_2)$ степени $\frac{N}{3}$:

$$\Phi_N=\left(\varphi_{\frac{N}{3}}(z_1,z_2)\right)^3.$$

Такимъ же образомъ находимъ, что значеніямъ $w=1$ или $w_1-w_2=0$ соотвѣтствуютъ корни уравненія $X_N=0$, и что они тождественны съ $\frac{N}{2}$ срединами реберъ многогранника, считая по два раза каждую (вершины c въ нашемъ подраздѣленіи); поэтому X_N должно быть полнымъ квадратомъ формы измѣренія $\frac{N}{2}$:

$$X_N=\left(\chi_{\frac{N}{2}}(z_1,z_2)\right)^2.$$

Наконецъ, значенію $w = \infty$ соотвѣтствуютъ корни функціи Φ_N, и поэтому они должны быть тождественны съ вершинами первоначальнаго многогранника (вершины a); въ нихъ сходится въ соотвѣтственныхъ случаяхъ по 3, 4 или 5 треугольниковъ, такъ что получаемъ:

$$\Phi_N = \left(\psi_{\frac{N}{r}}(z_1, z_2)\right)^r, \text{ гдѣ } r = 3,\ 4 \text{ или } 5.$$

Такимъ образомъ наше уравненіе непремѣнно должно имѣть видъ:

$$w_1 : (w_1 - w_2) : w_2 = \varphi(z_1, z_2)^3 : \chi(z_1, z_2)^2 : \psi(z_1, z_2)^r; \quad (3)$$

измѣренія и показатели формъ φ, χ, ψ, а также значенія степени уравненія N получаются изъ слѣдующей таблички:

Тетраэдръ: $\varphi_4^3, \chi_6^2, \psi_4^3$; $N = 12$.

Октаэдръ: $\varphi_8^3, \chi_{12}^2, \psi_6^4$; $N = 24$.

Икосаэдръ: $\varphi_{20}^3, \chi_{30}^2, \psi_{12}^5$; $N = 60$.

Теперь я хочу еще показать, что и разобранное раньше уравненіе діэдра можно включить въ эту схему (3). Мы должны только вспомнить, что тамъ мы помѣщали мѣста развѣтвленія на сферѣ w въ точкахъ $-1, +1, \infty$, а не въ точкахъ $0, +1, \infty$, какъ теперь, такъ что мы достигнемъ дѣйствительной аналогіи съ уравненіями (3) лишь въ томъ случаѣ, если попробуемъ представить уравненіе діэдра въ такомъ видѣ:

$$(w_1 + w_2) : (w_1 - w_2) : w_2 = \Phi : X : \Psi.$$

Изъ формы уравненія діэдра:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_1^{2n} + z_2^{2n}}{2z_1^n z_2^n},$$

которой мы пользовались въ свое время (стр. 189), съ помощью простой передѣлки получаемъ:

$$(w_1 + w_2) : (w_1 - w_2) : w_2 = (z_1^{2n} + z_2^{2n} + 2z_1^n z_2^n) : (z_1^{2n} + z_2^{2n} - 2z_1^n z_2^n) :$$
$$: 2z_1^n z_2^n = (z_1^n + z_2^n)^2 : (z_1^n - z_2^n)^2 : 2(z_1 z_2)^n.$$

Такимъ образомъ мы дѣйствительно можемъ присоединить къ предыдущей табличкѣ слѣдующую строчку:

$$\text{Діэдръ:}\quad \varphi_n^2, \chi_n^2, \psi_n^2; N = 2n.$$

Замѣчательныя точки и ихъ кратности, непосредственно опредѣляются по этой формѣ уравненія и совпадаютъ съ установленными раньше (стр. 190).

Теперь нашей задачей является дѣйствительно построить формы φ, χ, ψ въ трехъ новыхъ случаяхъ. При этомъ я остановлюсь подробнѣе только на октаэдрѣ, для котораго обстоятельства складываются наиболѣе просто. Но и здѣсь, желая оставаться въ рамкахъ краткаго обзора, я многое буду только намѣчать и сообщать въ видѣ результатовъ; всякій же, кто пожелаетъ познакомиться съ этимъ ближе, можетъ найти подробное изложеніе въ моей книгѣ объ икосаэдрѣ.

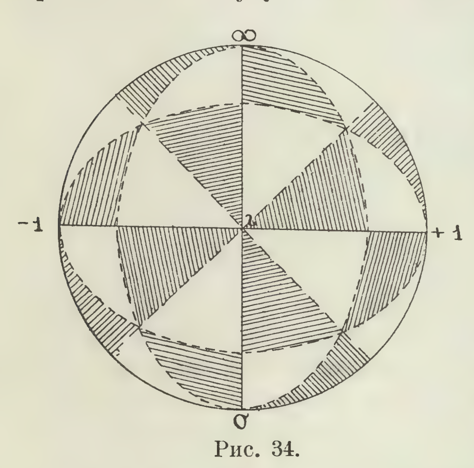


Рис. 34.

Ради простоты представимъ себѣ, что октаэдръ такъ вписанъ въ сферу z, что 6 его вершинъ совпадаютъ съ точками (рис. 34):

$$z = 0, \infty, +1, +i, -1, -i.$$

При такомъ положеніи октаэдра тѣ 24 линейныя подстановки z, которыя изображаютъ его вращенія, т. е. перемѣщаютъ названныя 6 точекъ, можно представить въ очень простомъ видѣ: начнемъ съ 4 вращеній, при которыхъ вершины 0 и ∞ остаются неподвижными:

$$z' = i^k . z \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \qquad (4^a)$$

Далѣе можно, напримѣръ, посредствомъ подстановки $z' = \frac{1}{z}$ [т. е. вращенія около горизонтальной оси $(+1, -1)$ на 180^0] перемѣстить точку 0 въ ∞; примѣняя затѣмъ еще 4 вращенія (4^a), получимъ 4 новыхъ подстановки:

$$z' = \frac{i^k}{z} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \qquad (4^b)$$

Точно такъ же перемѣстимъ съ помощью подстановокъ

$$z' = \frac{z+1}{z-1}, \frac{z+i}{z-i}, \frac{z-1}{z+1}, \frac{z-i}{z+i}$$

поочередно каждую изъ 4 точекъ $z=1,\ i,\ -1,\ -i$ въ ∞; примѣняя каждый разъ 4 вращенія (4^a), получимъ еще $4 \cdot 4 = 16$ подстановокъ октаэдра:

$$\left\{\begin{aligned} &z' = i^k \cdot \frac{z+1}{z-1},\ z' = i^k \cdot \frac{z-1}{z+1}, \\ &z' = i^k \cdot \frac{z+i}{z-i},\ z' = i^k \cdot \frac{z-i}{z+i}. \end{aligned}\right. \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3). \quad (4^c)$$

Теперь мы нашли всѣ 24 искомыя подстановки; непосредственнымъ вычисленіемъ можно убѣдиться въ томъ, что онѣ дѣйствительно переводятъ 6 вершинъ октаэдра въ самихъ себя и что онѣ образуютъ группу,— другими словами, что послѣдовательное производство любыхъ двухъ изъ этихъ подстановокъ представляетъ снова нѣкоторую подстановку (4).

Теперь я хочу прежде всего образовать форму ψ_6, которая имѣетъ простыми корнями 6 вершинъ октаэдра: точка $z=0$ даетъ множитель z_1, точка $z=\infty$ даетъ множитель z_2; 4 точки ± 1 и $\pm i$ представляютъ простые корни формы $z_1^4 - z_2^4$, такъ что окончательно получаемъ:

$$\psi_6 = z_1 \cdot z_2 \cdot (z_1^4 - z_2^4). \qquad (5^a)$$

Труднѣе составить формы φ_8 и χ_{12}, для которыхъ центры граней и, соотвѣтственно, средины реберъ служатъ простыми корнями; я приведу ихъ здѣсь безъ вывода (ср. „Икосаэдръ", стр. 54):

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi_8 = z_1^8 + 14 z_1^4 z_2^4 + z_2^8, \\ &\chi_{12} = z_1^{12} - 33 z_1^8 z_2^4 - 33 z_1^4 z_2^8 + z_2^{12}. \end{aligned}\right. \qquad (5^b)$$

Конечно, во всѣ эти 3 формы входитъ еще неопредѣленный постоянный множитель. Поэтому, если подъ φ_8, ψ_6, χ_{12} понимать формы въ томъ видѣ, какъ онѣ выражены равенствами (5), то въ уравненіе октаэдра (3) слѣдуетъ еще ввести неопредѣленныя

постоянныя c_1, c_2 и писать его въ такомъ видѣ:

$$w_1 : (w_1 - w_2) : w_2 = \varphi_8{}^3 : c_1 \chi_{12}{}^2 : c_2 \psi_6{}^4$$

Кромѣ того, надо такъ опредѣлить постоянныя c, чтобы послѣднія уравненія дѣйствительно представляли только одно уравненіе между z и w, а это имѣетъ мѣсто въ томъ и только въ томъ случаѣ, если

$$\varphi_8{}^3 - c_2 \psi_6{}^4 = c_1 \chi_{12}{}^2$$

тождественно въ z_1, z_2. Послѣднее соотношеніе дѣйствительно можно осуществить при помощи соотвѣтствующаго выбора постоянныхъ c_1, c_2, а именно имѣетъ мѣсто,— въ чемъ можно убѣдиться простой передѣлкой,— тождество:

$$\varphi_8{}^3 - 108\,\psi_6{}^4 = \chi_{12}{}^2,$$

такъ что уравненіе октаэдра (3) принимаетъ слѣдующій видъ:

$$w_1 : (w_1 - w_2) : w_2 = \varphi_8{}^3 : \chi_{12}{}^2 : 108\psi_6{}^4. \qquad (6)$$

Это уравненіе дѣйствительно отображаетъ точки $w = 0, 1, \infty$ соотвѣтственно въ центрахъ граней, срединахъ реберъ и вершинахъ октаэдра съ надлежащей кратностью, такъ какъ формы φ, χ, ψ составлены соотвѣтственнымъ образомъ. Кромѣ того, 24 подстановки октаэдра (4) переводятъ это уравненіе само въ себя, такъ какъ онѣ преобразуютъ корни каждой формы φ, χ, ψ въ самихъ себя и, слѣдовательно, вводятъ въ самыя формы только лишь по множителю, а вычисленіе показываетъ, что при образованіи частныхъ эти множители выпадаютъ.

Остается еще показать, что это уравненіе дѣйствительно отображаетъ конформнымъ образомъ каждый заштрихованный или незаштрихованный треугольникъ сферы z на заднюю или переднюю полусферу w. Намъ уже извѣстно, что тремъ воршинамъ каждаго треугольника соотвѣтствуютъ точки 0, 1, ∞ вещественнаго меридіана w, и что внутри каждаго треугольника w принимаетъ не болѣе, чѣмъ по разу, одно и то же значеніе, ибо уравненіе при этомъ w имѣетъ только 24 корня, которые должны распредѣлиться по 24 однороднымъ треугольникамъ. Если бы намъ удалось еще по-

казать, что w вообще остается вещественнымъ вдоль трехъ сторонъ треугольника, то отсюда нетрудно было бы заключить, что каждая сторона взаимно-однозначно отображается на отрѣзкѣ вещественнаго меридіана w, и что всѣ внутреннія точки треугольника сопряжены конформно и взаимно-однозначно съ полусферой. Вы легко сумѣете сами довести до конца эту цѣпь выводовъ, въ которой главное значеніе имѣетъ то обстоятельство, что отображеніе производится непрерывной и аналитической функціей $w(z)$. Я же хочу подробнѣе остановиться только на одномъ моментѣ доказательства, а именно на доказательствѣ вещественности w на сторонахъ треугольника.

Оказывается болѣе удобнымъ доказывать это утвержденіе въ такой формѣ, что w имѣетъ вещественное значеніе на всѣхъ большихъ кругахъ, которые образуютъ подраздѣленіе октаэдра. Это прежде всего тѣ 3 взаимно перпендикулярныхъ круга, которые проходятъ черезъ каждыя 4 изъ 6 вершинъ октаэдра и соотвѣтствуютъ ребрамъ октаэдра (большіе круги, изображенные на рис. 34 сплошными линіями), и далѣе 6 круговъ, соотвѣтствующихъ высотамъ граней октаэдра; они дѣлятъ пополамъ углы между большими кругами (малые круги, на рис. 34 пунктиръ изъ черточекъ). Съ помощью подстановокъ октаэдра можно любой большой кругъ превратить въ любой другой и точно такъ же каждый малый кругъ превратить въ любой другой. Поэтому достаточно показать, что w сохраняетъ вещественное значеніе вдоль одного какого-нибудь большого и одного малаго круга, ибо на другихъ кругахъ оно должно принимать тѣ же самыя значенія.

Но среди большихъ круговъ имѣется меридіанъ вещественныхъ чиселъ z и на немъ, конечно, w имѣетъ вещественное значеніе, получаемое изъ уравненія (6):

$$w = \frac{w_1}{w_2} = \frac{\varphi_8{}^3}{108\,\psi_6{}^4},$$

такъ какъ φ и ψ представляютъ вещественные многочлены относительно z_1 и z_2.

Изъ малыхъ круговъ, проходящихъ черезъ точки 0 и ∞, мы выбираемъ тотъ, который составляетъ съ вещественнымъ ме-

ридіаномъ уголъ въ 45^0 и вдоль котораго, слѣдовательно, z принимаетъ значенія $z = e^{\frac{i\pi}{4}}. r$, гдѣ r проходитъ черезъ вещественныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$; вдоль него, во всякомъ случаѣ, $z^4 = e^{i\pi}. r = -r$ имѣетъ вещественное значеніе; а такъ какъ, въ силу уравненія (5), въ функцію φ_8 и въ четвертую степень функціи ψ_6 входятъ только четвертыя степени z_1 и z_2, то w, въ виду послѣдней формулы, опять-таки имѣетъ вещественное значеніе.

Теперь мы подошли къ концу нашего доказательства: уравненіе (6) дѣйствительно отображаетъ конформнымъ образомъ полуплоскости, соотвѣтствующія Римановой сферѣ или покрывающей ее Римановой поверхности, на сферу z въ ея подраздѣленіи на треугольники, соотвѣтствующемъ октаэдру; поэтому мы — и обратно — съ той же полнотой владѣемъ геометрически зависимостью между z и w, устанавливаемой этимъ уравненіемъ, какъ и въ предыдущихъ примѣрахъ.

Съ тетраэдромъ и икосаэдромъ поступаютъ совершенно такимъ же оброзомъ; я дамъ здѣсь лишь результаты, которые и въ этихъ случаяхъ получаются при возможно болѣе простомъ положеніи подраздѣленія на сферѣ z. Для тетраэдра*) получается такое уравненіе:

$$w_1 : (w_1 - w_2) : w_2 = \left\{ z_1^4 - 2\sqrt{-3}\; z_1^2 z_2^2 + z_2^4 \right\}^3$$
$$: -12\sqrt{-3} \left\{ z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4) \right\}^2$$
$$: \left\{ z_1^4 + 2\sqrt{-3}\; z_1^2 z_2^2 + z_2^4 \right\}^3,$$

а для икосаэдра**):

$$w_1 : (w_1 - w_2) : w_2 =$$
$$= \left\{ -(z_1^{20} + z_2^{20}) + 228\,(z_1^{15} z_2^5 - z_1^5 z_2^{15}) - 494\, z_1^{10} z_2^{10} \right\}^3$$
$$: - \left\{ (z_1^{30} + z_2^{30}) + 522\,(z_1^{25} z_2^5 - z_1^5 z_2^{25}) - 10005\,(z_1^{20} z_2^{10} + z_1^{10} z_2^{20}) \right\}^2$$
$$: 1728 \left\{ z_1 z_2 (z_1^{10} + 11\, z_1^5 z_2^5 - z_2^{10}) \right\}^5;$$

*) Ср. „Ikosaeder“, p. 60, 51.

**) Loco citato, p. 60, 56.

другими словами, эти уравненія отображаютъ полусферы w на заштрихованные и незаштрихованные треугольники принадлежащаго тетраэдру и икосаэдру подраздѣленія сферы z.

5. О рѣшеніи нашихъ нормальныхъ уравненій.

Теперь мы займемся общими свойствами тѣхъ уравненій, которыя мы до сихъ поръ разсматривали, какъ примѣры общей теоріи, развитой выше, и которымъ мы дадимъ названіе нормальныхъ уравненій. Конечно, я и здѣсь могу представить вамъ положеніе вещей лишь въ самыхъ простыхъ случаяхъ, отсылая интересующихся подробностями къ моей книгѣ объ икосаэдрѣ.

Начну съ того замѣчанія, что крайне простая природа всѣхъ нашихъ нормальныхъ уравненій происходитъ отъ того, что они допускаютъ столько же линейныхъ подстановокъ, сколько единицъ въ показателѣ ихъ степени, такъ что всѣ корни представляютъ линейныя функціи одного изъ нихъ; замѣчу также, что въ подраздѣленіяхъ сферы мы имѣемъ крайне наглядный геометрическій образъ всѣхъ разсматриваемыхъ здѣсь соотношеній. Я хочу показать на примѣрѣ одного вопроса, относящагося къ уравненію икосаэдра, до чего просто слагается, благодаря указаннымъ обстоятельствамъ, многое такое, что вообще оказывается крайне сложнымъ, когда имѣешь дѣло съ уравненіями столь высокой степени.

Дано вещественное значеніе w_0, напримѣръ, на отрѣзкѣ $(1, \infty)$ вещественнаго меридіана w; требуется опредѣлить 60 корней z уравненія икосаэдра при $w = w_0$ (рис. 35). Наша теорія отображенія показываетъ, что каждый изъ нихъ долженъ лежать на одной изъ 60 соотвѣтственныхъ (на рис. 33 сплошныхъ) сторонъ треугольниковъ подраздѣленія сферы z. Такимъ образомъ выполнено то, что въ теоріи уравненій называютъ отдѣленіемъ корней, представляющимъ, большей частью, крайне утомительную работу, которая должна предшествовать численному вычисленію корней: такъ называется задача опредѣленія такихъ отдѣльныхъ промежутковъ,

въ которыхъ навѣрно заключается только по одному корню. Но мы можемъ также сразу опредѣлить, сколько среди этихъ 60 корней вещественныхъ. А именно, изъ того, что при приведенной выше формѣ уравненія икосаэдра послѣдній предполагается вложеннымъ въ сферу z такимъ образомъ, *) что вещественный меридіанъ проходитъ черезъ 4 угла каждаго рода a), b), c), вытекаетъ, что (ср. рис. 33 и 31) какъ разъ 4 сплошныхъ стороны треугольниковъ лежатъ вдоль вещественнаго меридіана, такъ что имѣется какъ разъ 4 вещественныхъ корня. То же самое имѣетъ мѣсто, если w лежитъ въ одномъ изъ двухъ другихъ отрѣзковъ вещественнаго меридіана w, такъ что вообще при всякомъ вещественномъ w уравненіе икосаэдра имѣетъ 4 вещественныхъ и 56 мнимыхъ корней.

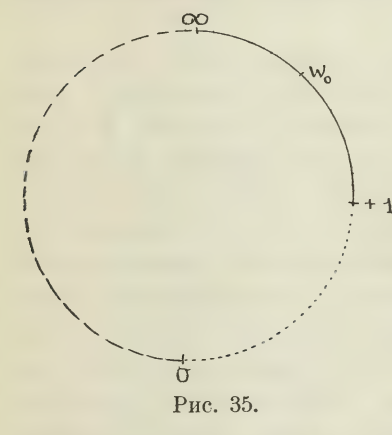


Рис. 35.

Теперь я хочу сказать нѣсколько словъ о дѣйствительномъ численномъ опредѣленіи корней нашихъ нормальныхъ уравненій. Прежде всего, здѣсь снова является для насъ благопріятнымъ то обстоятельство, что вычислять приходится каждый разъ только одинъ корень уравненія, такъ какъ остальные корни получаются посредствомъ линейныхъ подстановокъ. Впрочемъ, я долженъ замѣтить, что численное опредѣленіе корня представляетъ, собственно говоря, задачу анализа, а не алгебры, такъ какъ оно необходимо требуетъ примѣненія безконечныхъ процессовъ, чтобы представить съ любымъ приближеніемъ ирраціональныя, обыкновенно, значенія корней.

Болѣе подробно я остановлюсь только на самомъ простомъ примѣрѣ — на двучленномъ уравненіи

$$w = z^n,$$

*) Ср. „Ikosaeder“, p. 55.

при чемъ я снова прихожу въ непосредственное соприкосновенiе со школьной математикой, такъ какъ и въ ней разбирается эта задача — вычисленiе $\sqrt[n]{w}$, — по крайней мѣрѣ, для первыхъ значенiй n и для положительныхъ вещественныхъ значенiй $w=r$. Методъ вычисленiя квадратныхъ и кубическихъ корней, извѣстный всѣмъ вамъ со школьной скамьи, состоитъ, въ сущности, въ слѣдующемъ: изслѣдуютъ, какое мѣсто занимаетъ подрадикальное число $w=r$ въ ряду квадратовъ или кубовъ цѣлыхъ чиселъ 1, 2, 3, 4, ...; затѣмъ, основываясь на десятичной системѣ письменнаго счисленiя, повторяютъ то же

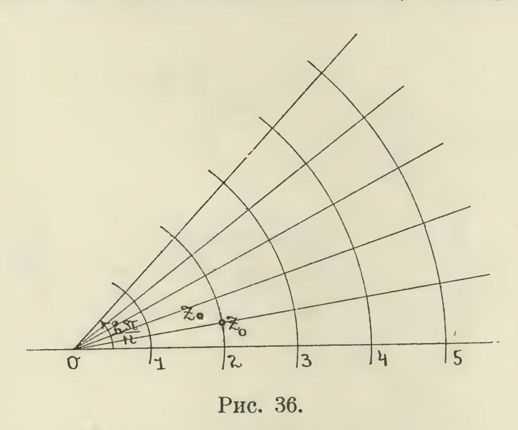


Рис. 36.

испытанiе съ десятыми долями найденнаго промежутка, затѣмъ съ сотыми долями и т. д., получая при этомъ, разумѣется, любую степень точности.

Здѣсь мы примѣнимъ болѣе рацiональный методъ, который годится не только при любыхъ цѣлыхъ n, но и при любыхъ комплексныхъ значенiяхъ w. Такъ какъ намъ нужно найти лишь одно какое-нибудь рѣшенiе уравненiя, то станемъ искать какъ разъ то значенiе $z=\sqrt[n]{w}$, которое лежитъ внутри угла $\frac{2\pi}{n}$, построеннаго при оси вещественныхъ чиселъ (рис. 36). Строго придерживаясь обобщенiя упомянутаго выше элементарнаго метода, начнемъ съ того что раздѣлимъ (лучами, проходящими черезъ вершину) ограни-

чиваемое этимъ угломъ пространство на ν равныхъ частей (на рисункѣ $\nu = 5$) и пересѣчемъ эти лучи окружностями, описанными около начала радіусами $r = 1, 2, 3, \ldots$ Такимъ образомъ, мы получимъ — при выбранномъ ν — внутри угла всѣ точки

$$z = r \cdot e^{\frac{2i\pi}{n} \cdot \frac{k}{\nu}} \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \ldots, \nu \\ r = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix},$$

и соотвѣтствующія имъ значенія w

$$w = z^n = r^n \cdot e^{2i\pi \frac{k}{\nu}}$$

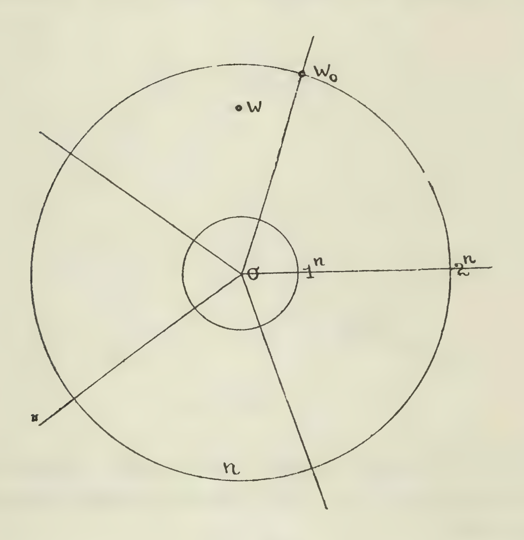


Рис. 37.

мы можемъ сразу указать въ плоскости w. Они образуютъ тамъ вершины подобной же, но покрывающей всю плоскость w сѣти, которая состоитъ изъ окружностей съ радіусами $1^n, 2^n, 3^n, \ldots$ и лучей, составляющихъ съ вещественною осью углы 0, $\frac{2\pi}{\nu}, \frac{4\pi}{\nu}, \ldots \frac{(\nu-1)2\pi}{\nu}$ (рис. 37). Данное значеніе w должно находиться въ какой-нибудь изъ этихъ клѣтокъ; пусть w_0 есть ближайшая къ этому w вершина. Одно изъ значеній $z_0 = \sqrt[n]{w_0}$ намъ

извѣстно: это — одна изъ вершинъ исходной сѣти въ плоскости z. Теперь полагаемъ для искомаго значенія корня:

$$z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{w_0 + (w - w_0)} = \sqrt[n]{w_0}\sqrt[n]{1 + \frac{w - w_0}{w_0}} = z_0\left(1 + \frac{w - w_0}{w_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Правую часть развернемъ по биному Ньютона, который мы спокойно можемъ считать извѣстнымъ, ибо мы и безъ того вѣдь, въ сущности, находимся въ области анализа:

$$z = z_0\left(1 + \frac{1}{n}\cdot\frac{w - w_0}{w_0} + \frac{1 - n}{2n^2}\cdot\left(\frac{w - w_0}{w_0}\right)^2 + \cdots\right).$$

Вопросъ о сходимости этого ряда мы можемъ рѣшить сразу, разсматривая его, какъ разложеніе аналитической функціи $\sqrt[n]{w}$ въ рядъ Тэйлора, и примѣняя ту теорему, что рядъ Тэйлора сходится внутри окружности, описанной около w_0 и проходящей черезъ ближайшую особенную точку. Такъ какъ для $\sqrt[n]{w}$ особенными точками являются только 0 и ∞, то написанный выше рядъ будетъ сходиться тогда и только тогда, когда w будетъ лежать внутри окружности, описанной около w_0 и проходящей черезъ начало, чего мы всегда можемъ достигнуть, исходя въ случаѣ надобности изъ подобной же сѣти въ плоскости z, но съ болѣе мелкими клѣтками. А чтобы нашъ рядъ сходился хорошо, т. е. годился для численнаго опредѣленія, необходимо, сверхъ того, чтобы дробь $\frac{w - w_0}{w_0}$ была достаточно мала, чего всегда можно достигнуть дальнѣйшимъ суженіемъ сѣти. Этотъ пріемъ дѣйствительно оказывается весьма пригоднымъ для фактическаго выполненія численнаго опредѣленія корней.

Замѣчательно, что численное разрѣшеніе дальнѣйшихъ нормальныхъ уравненій правильныхъ тѣлъ оказывается, въ сущности, нисколько не труднѣе; конечно, здѣсь я долженъ ограничиться указаніемъ на это, какъ на фактъ. Если примѣнить только-что изложенный методъ къ нашимъ нормальнымъ уравненіямъ и исходить изъ

отображенія двухъ сосѣднихъ треугольниковъ на сферѣ w, то вмѣсто биноміальнаго ряда появляются другіе ряды, которые, однако, являются въ анализѣ не менѣе извѣстными и пользоваться которыми достаточно легко: это — *гипергеометрическіе ряды*. Я самъ въ 1877 году далъ численное выраженіе рядовъ, о которыхъ идетъ рѣчь („Weitere Untersuchungen über die Theorie des Ikosaeders", Mathem. Annalen, Bd. XII, pag. 515 ff.).

6. Униформизированіе нормальныхъ уравненій посредствомъ трансцендентныхъ функцій.

Теперь я перейду къ разсмотрѣнію *другого метода рѣшенія нашихъ нормальныхъ уравненій*, который характеризуется *систематическимъ привлеченіемъ трансцендентныхъ функцій*. Вмѣсто того, чтобы въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ обращаться къ разложенію въ рядъ въ окрестности извѣстнаго рѣшенія, при примѣненіи этого метода *стараются представить разъ на всегда всѣ удовлетворяющія уравненію пары значеній* w, z, *какъ однозначныя аналитическія функціи одной вспомогательной перемѣнной* или, *какъ говорятъ, униформизировать уравненіе*. Если при этомъ удается примѣнить такія функціи, для которыхъ легко можно составить таблицы значеній, или уже существуютъ числовыя таблицы, то можно найти *численное рѣшеніе уравненія безъ новой вычислительной работы*. Я тѣмъ охотнѣе поговорю объ этомъ примѣненіи трансцендентныхъ функцій, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ оно имѣетъ мѣсто и въ *школьномъ преподаваніи*, при чемъ тамъ оно часто еще имѣетъ неясный, почти мистическій характеръ; причина же этого заключается въ томъ, что все еще держатся старыхъ, несовершенныхъ воззрѣній даже тамъ, гдѣ современная теорія функцій комплексныхъ перемѣнныхъ давно уже все выяснила.

Теперь я подробнѣе разовью всѣ эти замѣчанія общаго характера, прежде всего, на примѣрѣ *двучленнаго уравненія*. Вамъ извѣстно, что уже въ школѣ *постоянно вычисляютъ съ помощью логариѳмовъ положительное рѣшеніе уравненія* $z^n = r$ *при положительномъ веще-*

ственномъ r, а именно пишутъ уравненіе въ видѣ $z = e^{\frac{\log r}{n}}$, понимая подъ $\log r$ положительное главное значеніе этой функціи; по таблицѣ логариѳмовъ находятъ сперва это значеніе, а затѣмъ въ обратномъ порядкѣ z, какъ „numerus“ $\frac{\log r}{n}$; впрочемъ, обыкновенно пользуются вмѣсто e основаніемъ 10. Этотъ пріемъ можно перенести на комплексныя значенія: чтобы удовлетворить уравненію

$$z^n = w,$$

полагаютъ x равнымъ общему значенію комплекснаго логариѳма $\log w$, такъ что оказывается:

$$w = e^x, \quad z = e^{\frac{x}{n}}.$$

При этомъ въ виду многозначности функціи $x = \log w$, — позднѣе мы еще будемъ подробно говорить объ этой функціи, — для одного и того же w дѣйствительно получается какъ разъ n значеній z. Это x называютъ униформизирующей перемѣнной. Но наши таблицы содержатъ только вещественные логариѳмы вещественныхъ чиселъ, такъ что примѣнить указанный пріемъ непосредственно къ численному рѣшенію уравненія невозможно. Но можно, пользуясь нѣкоторыми простыми свойствами логариѳмовъ, свести вычисленіе къ употребленію всѣмъ доступныхъ тригонометрическихъ таблицъ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ

$$w = u + iv = \left|\sqrt{u^2 + v^2}\right| \cdot \left(\frac{u}{\left|\sqrt{u^2 + v^2}\right|} + i\frac{v}{\left|\sqrt{u^2 + v^2}\right|}\right);$$

первый множитель, какъ положительное вещественное число имѣетъ вещественный логариѳмъ, а второй множитель, какъ величина съ модулемъ 1, имѣетъ, какъ извѣстно, чисто мнимый логариѳмъ $i \cdot \varphi$, при чемъ φ получается изъ уравненій

$$\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \sin\varphi.$$

Такимъ образомъ находимъ:

$$x = \log w = \log\left|\sqrt{u^2 + v^2}\right| + i\varphi,$$

такъ что искомый корень уравненія равенъ

$$z = e^{\frac{x}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log\left|\sqrt{u^2+v^2}\right|} \cdot e^{\frac{1}{n} i\varphi} = e^{\frac{1}{n}\log\left|\sqrt{u^2+v^2}\right|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right).$$

Въ виду того, что въ величину φ входитъ слагаемымъ произвольное кратное 2π, наша формула доставляетъ всѣ n значеній корня. Съ помощью обыкновенныхъ логариѳмическихъ и тригонометрическихъ таблицъ можно опредѣлить сперва φ по его синусу и косинусу, а затѣмъ по послѣдней формулѣ и z. Мы получили здѣсь это „*тригонометрическое рѣшеніе*“ *вполнѣ естественнымъ образомъ, исходя изъ логариѳмовъ комплексныхъ чиселъ*; если же стоять на той точкѣ зрѣнія, что такихъ логариѳмовъ не существуетъ, и все же стараться получить это тригонометрическое рѣшеніе, — въ школѣ слѣдуютъ такому именно пути, — то оно должно казаться чѣмъ-то совершенно страннымъ и непонятнымъ.

Но въ одномъ мѣстѣ школьнаго преподаванія является необходимымъ извлекать корни изъ не-вещественныхъ чиселъ, а именно при такъ называемомъ *рѣшеніи уравненія третьей степени по способу Кардана*; я хочу сдѣлать здѣсь по этому поводу нѣсколько замѣчаній.

Если кубическое уравненіе дано въ приведенномъ видѣ:

$$x^3 + px - q = 0, \tag{1}$$

то, какъ извѣстно, формула *Кардана* гласитъ, что три его корня x_1, x_2, x_3 содержатся въ слѣдующемъ выраженіи:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{2}$$

Такъ какъ каждый кубическій корень имѣетъ три значенія, то само по себѣ это выраженіе имѣетъ 9 вообще различныхъ значеній; среди нихъ x_1, x_2, x_3 опредѣляются тѣмъ условіемъ, что *произведеніе обоихъ входящихъ въ нихъ кубическихъ корней должно быть равно* $-\frac{p}{3}$. Замѣняя

коэффиціенты уравненія p, q ихъ обычными выраженіями въ видѣ симметрическихъ функцій отъ x_1, x_2, x_3 и имѣя въ виду, что коэффиціентъ при x^2 равенъ $x_1+x_2+x_3=0$, находимъ:

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-\frac{(x_1-x_2)^2.(x_2-x_3)^2.(x_3-x_1)^2}{108},$$

т. е. выраженіе, стоящее подъ знакомъ квадратнаго корня, равно—если не считать постояннаго отрицательнаго множителя—дискриминанту уравненія. Отсюда слѣдуетъ, что подкоренное количество имѣетъ отрицательное значеніе, если уравненіе имѣетъ 3 вещественныхъ корня; положительнымъ же подкоренное выраженіе будетъ въ томъ случаѣ, если одинъ корень вещественный, а два другіе мнимые сопряженные. Такимъ образомъ, какъ разъ въ наиболѣе, повидимому, простомъ случаѣ, когда кубическое уравненіе имѣетъ только вещественные корни, формула Кардана требуетъ извлеченія квадратнаго корня изъ отрицательнаго числа, а затѣмъ кубическаго корня изъ комплексной величины.

Этотъ переходъ черезъ комплексное количество долженъ былъ, конечно, представляться старымъ алгебраистамъ въ эпоху, когда они были еще такъ далеки отъ теоріи комплексныхъ чиселъ — за 250 лѣтъ до того, какъ Гауссъ показалъ ихъ интерпретацію на числовой плоскости, чѣмъ-то совершенно невозможнымъ. Тогда говорили о „неприводимомъ случаѣ“ (casus irreducibilis) кубическаго уравненія и думали, что въ этомъ именно случаѣ формула Кардана не даетъ разумнаго, пригоднаго рѣшенія. Впослѣдствіи, однако, нашли, что какъ разъ въ этомъ случаѣ кубическое уравненіе оказывается въ тѣсной связи съ трисекціей угла, и такимъ образомъ получили „тригонометрическое рѣшеніе“, цѣликомъ выполняемое въ области вещественныхъ чиселъ, въ качествѣ замѣстителя отказывающейся служить формулы Кардана; но при этомъ полагали, что открыли нѣчто совершенно новое, не стоящее ни въ какомъ отношеніи къ старой формулѣ. И на этой-то точкѣ зрѣнія до сихъ поръ еще въ общемъ стоитъ, къ сожалѣнію, элементарное преподаваніе.

Въ противоположность этому, я хотѣлъ бы особенно подчеркнуть то обстоятельство, что это тригонометрическое рѣшеніе является ничѣмъ инымъ, какъ примѣненіемъ изложеннаго выше общаго метода къ вычисленію корней изъ комплексныхъ величинъ. Оно получается самымъ естественнымъ образомъ, если сдѣлать формулу Кардана при комплексномъ подрадикальномъ выраженіи въ кубическомъ корнѣ столь же удобной для численнаго вычисленія, какъ это дѣлаютъ въ школѣ для вещественныхъ выраженій. Въ дѣйствительности это получается въ такомъ видѣ. Мы предполагаемъ, слѣдовательно,

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0,$$

такъ что непремѣнно должно быть $p<0$. Переписывая затѣмъ первый кубическій корень въ выраженіи (2) въ такомъ видѣ:

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}+i\left|\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}\right|},$$

замѣчаемъ, что его модуль (какъ положительный кубическій корень изъ модуля $\sqrt{-p^3/27}$ подкоренной величины) равенъ $\left|\sqrt{-p/3}\right|$; но такъ какъ произведеніе его на второй кубическій корень должно какъ разъ равняться $-\frac{p}{3}$, то этотъ второй корень долженъ, во всякомъ случаѣ, имѣть комплексное значеніе, сопряженное съ первымъ корнемъ, а сумма обоихъ радикаловъ — рѣшеніе кубическаго уравненія — должна равняться поэтому ихъ удвоенной вещественной части:

$$x_1,\ x_2,\ x_3=2R\left(\sqrt[3]{\frac{q}{2}+i\left|\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}\right|}\right)^{*)}$$

*) R обозначаетъ „вещественная часть“.

Теперь примѣнимъ въ точности общій пріемъ, описанный на страницѣ 217 и сл. Пишемъ подкоренное количество кубическаго корня, отдѣляя модуль:

$$\left|\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\right| \cdot \left(\frac{q/2}{|\sqrt{-p^3/27}|} + i\frac{|\sqrt{-q^2/4-p^3/27}|}{|\sqrt{-p^3/27}|}\right),$$

и опредѣляемъ φ изъ уравненій:

$$\cos\varphi = \frac{q/2}{|\sqrt{-p^3/27}|}, \ \sin\varphi = \frac{|\sqrt{-q^2/4-p^3/27}|}{|\sqrt{-p^3/27}|}.$$

Для кубичнаго корня находимъ — такъ какъ положительный корень третьей степени изъ $|\sqrt{-p^3/27}|$ равенъ $|\sqrt{-p/3}|$:

$$|\sqrt{-p/3}| \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right);$$

принимая же во вниманіе, что въ выраженіе φ входитъ слагаемымъ неопредѣленное кратное 2π, находимъ:

$$x_k = |\sqrt{-p/3}| \, . \cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} \quad (k = 0, 1, 2).$$

А это какъ разъ обычный видъ тригонометрическаго рѣшенія.

Позвольте сдѣлать по этому поводу еще одно замѣчаніе относительно выраженія „casus irreducibilis“. Здѣсь слово „irreducibilis“ (неприводимый) употреблено въ совершенно другомъ смыслѣ сравнительно съ его нынѣшнимъ употребленіемъ и съ тѣмъ смысломъ, въ которомъ я часто уже пользовался имъ въ настоящихъ лекціяхъ; здѣсь оно должно обозначать, что рѣшеніе кубическаго уравненія не можетъ быть сведено къ извлеченію кубическихъ корней изъ вещественныхъ чиселъ, — а это не имѣетъ ничего общаго съ современнымъ значеніемъ этого слова. Вы видите, какъ именно въ этой области неудачное обозначеніе и всеобщая боязнь комплексныхъ чиселъ создали во всякомъ случаѣ возможность для множества недоразумѣній. Я бы хотѣлъ, чтобы мои слова могли способствовать тому, чтобы устранить эти недоразумѣнія, по крайней мѣрѣ, въ вашей средѣ.

Попытаемся теперь вкратцѣ оріентироваться въ томъ, **как ъ достигается униформизированіе посредствомъ**

трансцендентныхъ функцій въ случаѣ другихъ нормальныхъ уравненій. Начнемъ съ уравненія діэдра:

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2w .$$

Здѣсь достаточно попросту положить

$$w = \cos\varphi ,$$

и уравненіе — какъ это видно сразу на основаніи формулы Моавра — будетъ тождественно удовлетворяться при

$$z = \cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n} \cdot$$

Такъ какъ всѣ значенія $\varphi + 2k\pi$ и $2k\pi - \varphi$ даютъ для w одно и то же значеніе, то эта формула дѣйствительно доставляетъ при каждомъ w $2n$ корней z, которые можно написать въ такомъ видѣ:

$$z = \cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n - 1) .$$

При уравненіяхъ октаэдра, тетраэдра и икосаэдра этихъ „элементарныхъ“ трансцендентныхъ функцій оказывается недостаточно, но зато можно получить совершенно аналогичное рѣшеніе съ помощью эллиптическихъ модулярныхъ функцій. Хотя этого и нельзя отнести къ элементарной математикѣ, но я все же хочу указать по крайней мѣрѣ, формулы, относящіяся къ икосаэдру. Эти формулы находятся въ самой тѣсной связи съ рѣшеніемъ общаго уравненія пятой степени посредствомъ эллиптическихъ функцій, о которомъ всегда упоминается въ учебникахъ; о немъ я тоже хочу сказать нѣсколько пояснительныхъ словъ. Уравненіе икосаэдра имѣло такой видъ (стр. 210):

$$w = \frac{\varphi_{20}(z)^3}{\psi_{12}(z)^5} \cdot$$

Отождествимъ w съ абсолютнымъ инваріантомъ J изъ теоріи эллиптическихъ функцій и станемъ разсма-

тривать послѣднiй, какъ функцiю отношенiя перiодовъ $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ $\left(\text{въ обозначенiи Якоби } \frac{iK'}{K}\right)$, т. е. положимъ:

$$w = J(\omega) = \frac{g_2^3(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)},$$

гдѣ g_2 и Δ означаютъ извѣстныя играющiя большую роль трансцендентныя формы (—4)-го и (—12)-го измѣренiя относительно ω_1 и ω_2. Если введемъ еще обычно употребляемое сокращенное обозначенiе Якоби

$$q = e^{i\pi\omega} = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

то корни z уравненiя икосаэдра представятся въ видѣ такого частнаго двухъ ϑ-функцiй:

$$z = -q^{\frac{3}{5}} \frac{\vartheta_1(2\pi\omega, q^5)}{\vartheta(\pi\omega, q^5)}.$$

Принимая во вниманiе безконечную многозначность функцiи $\omega(w)$, опредѣляемой изъ перваго уравненiя, можно показать, что эта формула дѣйствительно доставляетъ при каждомъ w по 60 корней уравненiя икосаэдра. Конечно, эти же корни можно получить при опредѣленномъ значенiи w, примѣняя къ послѣднему выраженiю 60 подстановокъ икосаэдра. Такъ, напримѣръ,

$$z' = -\frac{1}{z} = q^{-\frac{3}{5}} \frac{\vartheta_1(\pi\omega, q^5)}{\vartheta_1(2\pi\omega, q^5)}$$

тоже представляетъ правильное рѣшенiе нашего уравненiя. Объ этой формулѣ — при случаѣ ею пользуется Шейбнеръ (Scheibner)—упоминаетъ Моргенштернъ (Morgenstern) въ своей недавно появившейся диссертацiи*) и утверждаетъ, что, напротивъ, моя формула для z ложна, а между тѣмъ какъ разъ изъ основныхъ свойствъ уравненiя икосаэдра слѣдуетъ, что формулы для z и z' либо обѣ ложны, либо обѣ справедливы.

*) „Beiträge zur numerischen Lösung der Gleichungen 5. Grades", (Halle 1907), p.p. 44, 45.

7. Разрѣшимость въ радикалахъ.

Одного вопроса въ теоріи нормальныхъ уравненій я еще не затрагивалъ. Представляютъ ли наши нормальныя уравненія вообще что-либо алгебраически существенно новое и нельзя ли ихъ свести одно къ другому и, въ частности, къ ряду двучленныхъ уравненій? Другими словами: можно ли рѣшеніе z этихъ уравненій выразить посредствомъ конечнаго числа послѣдовательныхъ извлеченій корня?

Что касается, прежде всего, уравненій діэдра, тетраэдра и октаэдра, то съ помощью алгебраической теоріи легко убѣдиться въ томъ, что ихъ возможно свести къ двучленнымъ уравненіямъ. Достаточно показать это на примѣрѣ уравненія діэдра:

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2w\,.$$

Если положить

$$z^n = \zeta,$$

то уравненіе принимаетъ видъ:

$$\zeta^2 - 2w\,\zeta + 1 = 0\,;$$

а отсюда непосредственно слѣдуетъ

$$\zeta = w \pm \sqrt{w^2 - 1}\,,$$

и, слѣдовательно,

$$z = \sqrt[n]{w \pm \sqrt{w^2 - 1}}\,,$$

что и представляетъ искомое рѣшеніе въ радикалахъ.

Между тѣмъ для уравненія икосаэдра подобное рѣшеніе въ радикалахъ невозможно, такъ что это уравненіе опредѣляетъ нѣкоторую существенно новую алгебраическую функцію. Я покажу вамъ одно особенно наглядное доказательство этого утвержденія, которое я недавно опубликовалъ въ 61 томѣ „Mathem. Annalen“ *); оно основано на хорошо намъ извѣстномъ въ теоріи функцій построеніи функціи

*) p.p. 369—371: „Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen“.

икосаэдра $z(w)$. Я пользуюсь при этомъ только слѣдующей извѣстной леммой Абеля, доказательство которой вы можете найти въ любомъ учебникѣ алгебры: Если алгебраическое уравненіе разрѣшимо съ помощью ряда радикаловъ, то каждый входящій въ это выраженіе радикалъ можетъ быть представленъ въ видѣ раціональной функціи всѣхъ n корней первоначальнаго уравненія.

Примѣнимъ теперь все это, въ частности, къ уравненію икосаэдра! Итакъ, если допустить, что его корень z выражается съ помощью ряда извлеченій корня изъ коэффиціентовъ уравненія, т. е. изъ раціональныхъ функцій отъ w, — а мы покажемъ, что это допущеніе ведетъ къ противорѣчію, — то каждый входящій въ выраженія корней радикалъ выражаетъ нѣкоторую раціональную функцію 60 корней уравненія:

$$R(z_1, z_2, \ldots, z_{60}).$$

Но такъ какъ всѣ корни уравненія икосаэдра получаются изъ какого-нибудь одного изъ нихъ z съ помощью линейныхъ подстановокъ, то можно вмѣсто послѣдняго выраженія написать просто раціональную функцію $R(z)$ отъ одного только z. Представимъ себѣ это $R(z)$, какъ функцію отъ w, которая получится, если вмѣсто z подставить 60-значную функцію икосаэдра $z(w)$. Въ виду того, что каждый обходъ въ плоскости w, который возвращаетъ z къ его начальному значенію, необходимымъ образомъ приводитъ и функцію $R(z)$ къ ея первоначальному значенію, то R можетъ имѣть развѣтвленія только въ мѣстахъ $w = 0, 1, \infty$, въ которыхъ развѣтвляется и $z(w)$; вмѣстѣ съ тѣмъ число листовъ поверхности Римана для R, которые циклически сходятся въ каждомъ такомъ мѣстѣ, должно быть дѣлителемъ соотвѣтствующаго числа для $z(w)$, которое, какъ мы знаемъ, равно соотвѣтственно 3, 2 и 5. Всякая раціональная функція $R(z)$ одного изъ корней уравненія икосаэдра и, слѣдовательно, всякій радикалъ, входящій въ предполагаемое рѣшеніе, можетъ, въ качествѣ функціи отъ w, имѣть развѣтвленія, — если только она ихъ вообще имѣетъ, — лишь въ

точкахъ $w=0$, $w=1$, $w=\infty$, а именно: въ данномъ случаѣ въ точкѣ 0 должно сходиться по 3 листа ея Римановой поверхности, въ точкѣ 1 по 2 листа и въ точкѣ ∞ по 5 листовъ, такъ какъ числа 2, 3, 5 не имѣютъ другихъ дѣлителей, кромѣ 1.

Теперь мы постараемся показать, что мы необходимо должны придти къ противорѣчію съ этимъ результатомъ: съ этой цѣлью разсмотримъ самый внутренній радикалъ, какой только входитъ въ допущенное нами выраженіе для $z(w)$. Онъ долженъ во всякомъ случаѣ представлять собой корень изъ раціональной функціи $P(w)$, и мы можемъ считать его показатель простымъ числомъ p, такъ какъ всякій другой радикалъ можно составить изъ ряда корней съ простыми показателями. Кромѣ того, $P(w)$ не можетъ быть p-ой степенью раціональной функціи $s(w)$ отъ w, ибо иначе нашъ радикалъ былъ бы вообще излишенъ, и мы могли бы отнести наши разсужденія къ ближайшему дѣйствительно необходимому знаку корня.

Посмотримъ же, какія развѣтвленія можетъ имѣть этотъ радикалъ $\sqrt[p]{P(w)}$; для этого наиболѣе удобно написать въ однородномъ видѣ:

$$P(w)=\frac{g(w_1, w_2)}{h(w_1, w_2)},$$

гдѣ g, h обозначаютъ формы одного и того же измѣренія въ однородныхъ перемѣнныхъ w_1, w_2 $\left(w=\frac{w_1}{w_2}\right)$. Согласно основной теоремѣ алгебры можно функціи g и h разбить на линейные множители, что даетъ:

$$P(w)=\frac{l^\alpha . m^\beta . n^\gamma \ldots}{l'^{\alpha'} . m'^{\beta'} . n'^{\gamma'} \ldots},$$

гдѣ въ виду равенства измѣреній числителя и знаменателя

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots=\alpha'+\beta'+\gamma'+\cdots$$

Ясно, что всѣ показатели $\alpha, \beta, \ldots, \alpha', \beta', \ldots$ не могутъ дѣлиться на p, ибо иначе P представляло бы полную p-ую степень; съ другой же стороны, сумма всѣхъ показателей $\alpha+\beta+\cdots-\alpha'-\beta'-\cdots$ равна нулю, а потому дѣлится на p; вслѣдствіе этого не можетъ быть, чтобы только одно изъ этихъ чиселъ не

дѣлилось на p, т. е. такихъ чиселъ (не дѣлящихся на p) должно быть, по крайней мѣрѣ, два. Поэтому корни соотвѣтствующихъ линейныхъ множителей должны навѣрное быть такими мѣстами развѣтвленія для $\sqrt[p]{P(w)}$, въ которыхъ циклически сходится по p листовъ. Но это стоитъ въ противорѣчіи съ установленнымъ выше положеніемъ, которое должно, конечно, имѣть мѣсто и для $\sqrt[p]{P(w)}$. Въ самомъ дѣлѣ, мы тамъ перебрали всѣ возможныя развѣтвленія и среди нихъ мы не нашли двухъ съ равнымъ числомъ сходящихся листовъ. Такимъ образомъ, наше допущеніе оказывается ложнымъ, и уравненіе икосаэдра, во всякомъ случаѣ, не разрѣшимо въ радикалахъ.

Это доказательство существеннымъ образомъ основано на томъ, что характерныя для икосаэдра числа 3, 2, 5 не имѣютъ общаго дѣлителя. Когда же, наоборотъ, общій дѣлитель имѣется, какъ, напримѣръ, въ случаѣ чиселъ 3, 2, 4 для октаэдра, то возможны такія раціональныя функціи $R(z(w))$, которыя въ двухъ мѣстахъ представляютъ однородныя развѣтвленія, — напримѣръ, функція, у которой сходится по два листа въ точкахъ 1 и ∞; такія функціи дѣйствительно можно представить въ видѣ корней изъ раціональной функціи $P(w)$. Такимъ образомъ обнаруживается разрѣшимость въ радикалахъ уравненія октаэдра и тетраэдра (съ числами 3, 2, 3), а также діэдра (2, 2, n).

Я хотѣлъ бы указать здѣсь вообще на то, какъ сильно отстала отъ успѣховъ современной науки та терминологія, которая царитъ въ широкихъ математическихъ кругахъ. Слово „корень" теперь употребляютъ почти всегда въ двоякомъ смыслѣ: во-первыхъ, для обозначенія рѣшенія всякаго алгебраическаго уравненія и, во-вторыхъ, для обозначенія рѣшенія именно двучленнаго уравненія. Этотъ usus ведетъ начало, конечно, съ тѣхъ временъ, когда занимались исключительно двучленными уравненіями. Въ настоящее время онъ является, если и не прямо-таки вреднымъ, то, во всякомъ случаѣ, довольно неудобнымъ. Въ гораздо большей степени даетъ поводъ къ недоразумѣніямъ

другое обозначеніе, сохранившееся изъ элементовъ алгебры, согласно которому алгебраическое уравненіе, которое неразрѣшимо въ радикалахъ, т. е. которое не сводится къ двучленнымъ уравненіямъ, называютъ „неразрѣшимымъ алгебрически". Это стоитъ въ самомъ рѣзкомъ противорѣчіи съ современнымъ значеніемъ слова „алгебраическій". Въ настоящее время алгебраически разрѣшимымъ называютъ такое уравненіе, которое оказывается возможнымъ свести къ цѣпи такихъ возможно простыхъ уравненій, для которыхъ зависимость рѣшеній отъ параметровъ, взаимная связь различныхъ значеній корней и т. д. извѣстна съ такою же полнотой, какъ это имѣло мѣсто съ давнихъ поръ для двучленнаго уравненія; но это отнюдь не должны быть непремѣнно двучленныя уравненія. Въ этомъ смыслѣ мы можемъ отнести уравненіе икосаэдра къ числу тѣхъ, которыя вполнѣ разрѣшаются алгебраически, ибо всѣ наши разсужденія показали, что мы можемъ построить ихъ теорію, удовлетворяя всѣмъ указаннымъ требованіямъ. То обстоятельство, что оно неразрѣшимо въ радикалахъ, дѣлаетъ его, скорѣе, особенно интереснымъ, такъ какъ вслѣдствіе этого оно является подходящимъ нормальнымъ уравненіемъ, къ которому можно пытаться свести другія уравненія, тоже неразрѣшимыя алгебраически въ старинномъ смыслѣ слова, чтобы вполнѣ овладѣть и ихъ рѣшеніемъ.

Это послѣднее замѣчаніе приводитъ насъ къ послѣднему параграфу настоящей главы.

8. Сведеніе общихъ уравненій къ нашимъ нормальнымъ уравненіямъ.

Можно показать, что самое общее уравненіе

3-ей степени сводится къ уравненію діэдра при $n=3$,

4-ой степени сводится къ уравненію тетраэдра или октаэдра,

5-ой степени сводится къ уравненію икосаэдра. Этотъ результатъ представляетъ самый послѣд-

ній тріумфъ правильныхъ тѣлъ, которымъ съ самаго начала исторіи математики все снова и снова приходилось играть важную роль.

Чтобы сдѣлать для васъ понятнѣе смыслъ моего общаго утвержденія, я проведу его нѣсколько подробнѣе для простѣйшаго случая — для уравненія третьей степени, — впрочемъ, безъ полнаго доказательства формулъ. Представимъ себѣ кубическое уравненіе снова въ приведенной формѣ:

$$x^3 + px - q = 0. \tag{1}$$

Пусть x_1, x_2, x_3 обозначаютъ его рѣшенія; станемъ искать такую раціональную функцію z этихъ рѣшеній, которая при 6 перестановкахъ этихъ трехъ величинъ испытываетъ какъ разъ 6 линейныхъ подстановокъ діэдра для $n = 3$, т. е. принимаетъ значенія:

$$z,\ \varepsilon . z, \varepsilon^2 . z, \frac{1}{z}, \frac{\varepsilon}{z}, \frac{\varepsilon^2}{z} \left(\text{гдѣ } \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right).$$

Легко видѣть, что функція

$$z = \frac{x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3}{x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3} \tag{2}$$

удовлетворяетъ этимъ условіямъ. Принадлежащая діэдру функція $z^3 + \frac{1}{z^3}$ этой величины должна, такимъ образомъ, оставаться неизмѣнной при всѣхъ перестановкахъ x_k, такъ какъ она остается безъ измѣненій при 6 линейныхъ подстановкахъ z; слѣдовательно, ее можно, на основаніи извѣстной теоремы алгебры, представить въ видѣ раціональной функціи коэффиціентовъ уравненія (1), а именно вычисленіе даетъ:

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = -27\frac{q^2}{p^3} - 2. \tag{3}$$

Если же, наоборотъ, извѣстно рѣшеніе этого уравненія діэдра и если z есть одинъ изъ его корней, то можно по выраженію (2) съ помощью извѣстныхъ соотношеній:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p, \quad x_1 . x_2 . x_3 = q$$

выразить раціонально 3 значенія x_1, x_2, x_3 черезъ z, p, q, а именно оказывается, что

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= -\frac{3q}{p}\cdot\frac{z(1+z)}{1+z^3}, \\ x_2 &= -\frac{3q}{p}\cdot\frac{\varepsilon z(1+\varepsilon z)}{1+z^3}, \\ x_3 &= -\frac{3q}{p}\cdot\frac{\varepsilon^2 z(1+\varepsilon^2 z)}{1+z^3}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Такимъ образомъ, если разрѣшено уравненіе діэдра (3), то эти формулы даютъ непосредственно рѣшеніе кубическаго уравненія (1).

Совершенно аналогично получается сведеніе наиболѣе общаго уравненія 4-ой и 5-ой степени. Уравненія оказываются, конечно, нѣсколько длиннѣе, но въ сущности не болѣе трудными; новымъ является то, что параметръ w нормальнаго уравненія, который прежде выражался раціонально черезъ коэффиціенты уравненія $\left(2w = -27\frac{q^2}{p^3} - 2\right)$, теперь содержитъ еще и квадратные корни. Вы можете найти очень подробное изложеніе этой теоріи для уравненія 5-ой степени и, соотвѣтственно, для икосаэдра во второй части моихъ лекцій объ икосаэдрѣ и при томъ въ такомъ видѣ, что не только приводится выводъ формулъ, но, кромѣ того, всегда указываются внутреннія основанія, приводящія къ этимъ уравненіямъ.

Позвольте мнѣ сказать еще нѣсколько словъ о томъ положеніи, которыя эти построенія занимаютъ по отношенію къ обыкновенно излагаемой теоріи уравненій 3-ей, 4-ой и 5-ой степени. Прежде всего, обычныя рѣшенія уравненій 3-ей и 4-ой степени можно, конечно, получить изъ нашихъ формулъ съ помощью соотвѣтствующихъ вычисленій, пользуясь рѣшеніемъ въ радикалахъ уравненій діэдра, октаэдра и тетраэдра.

Что же касается уравненій 5-ой степени, то, къ сожалѣнію, въ учебникахъ обыкновенно ограничиваются констатированіемъ того отрицательнаго результата, что такое уравненіе

невозможно рѣшить съ помощью ряда радикаловъ, присоединяя къ этому еще туманное указаніе на то, что рѣшеніе становится возможнымъ посредствомъ эллиптическихъ функцій, — точнѣе слѣдовало бы сказать: эллиптическихъ модуль-функцій. Я отношусь отрицательно къ такому изложенію, такъ какъ оно даетъ совершенно неправильное противоположеніе и служитъ скорѣе помѣхой правильному пониманію положенія вещей, чѣмъ способствуетъ ему. Въ дѣйствительности, резюмируя все, къ чему мы пришли, мы должны сказать такъ, — отдѣляя алгебраическую часть отъ аналитической:

1) Хотя и невозможно свести уравненіе 5-ой степени, данное въ общемъ видѣ, къ двучленнымъ уравненіямъ, но зато удается — и въ этомъ именно и заключается собственно задача алгебраическаго рѣшенія — свести его къ уравненію икосаэдра, какъ къ простѣйшему нормальному уравненію.

2) Уравненіе икосаэдра, въ свою очередь, можно разрѣшить посредствомъ эллиптическихъ модуль-функцій; это является пригоднымъ для численнаго вычисленія полнымъ аналогомъ рѣшенія двучленныхъ уравненій посредствомъ логариѳмовъ.

Это составляетъ полное рѣшеніе проблемы уравненія пятой степени. Въ самомъ дѣлѣ, когда что-либо не удается на обычномъ пути, то не должно сразу отказываться отъ дальнѣйшихъ попытокъ и удовлетворяться констатированіемъ невозможности, но надо стараться подойти къ вопросу съ такой стороны, чтобы можно было его разрабатывать дальше. Математическая мысль, какъ таковая, никогда не имѣетъ конца, и если вамъ кто-нибудь скажетъ, что въ нѣкоторомъ пунктѣ прекращается математическое пониманіе, то будьте увѣрены, что тамъ какъ разъ должна найти свое мѣсто наиболѣе интересная постановка вопроса.

Въ заключеніе я хочу указать на то, что эти теоріи отнюдь не прекращаются съ уравненіемъ пятой степени; напротивъ того, можно и для уравненій шестой и высшихъ степеней развить вполнѣ аналогичныя теоріи, прибѣгая къ помощи правильныхъ тѣлъ въ простран-

ствѣ многихъ измѣренiй. Если вы желаете ближе ознакомиться съ этими теорiями, то обратитесь къ моей статьѣ „О рѣшенiи общаго уравненiя 5-ой и 6-ой степени" („Ueber die Auflösung der allgemeiner Gleichung 5. und 6. Grades". Journ. f. reine u. angew. Math., 129 (1905), pag. 151 ff; Math. Ann., 61, pag. 50 ff. — 1905).

АНАЛИЗЪ



ВВЕДЕНІЕ.

Теперь, во второй половинѣ семестра, мы займемся тѣмъ, что подвергнемъ отдѣльныя, наиболѣе важныя, съ нашей точки зрѣнія, главы Анализа такому же обсужденію, какому раньше мы подвергли Ариѳметику и Алгебру. Рѣчь пойдетъ, главнымъ образомъ, объ элементарныхъ трансцендентныхъ функціяхъ, которыя дѣйствительно играютъ большую роль въ школьномъ преподаваніи: это — показательная функція (соотвѣтственно логариѳмъ) и тригонометрическія функціи.

I. Логариѳмъ и показательная функція.

Прежде всего я хочу напомнить извѣстный всѣмъ вамъ ходъ изложенія этого вопроса въ школѣ и его продолженіе, примыкающее къ такъ называемой систематикѣ алгебраическаго анализа.

1. Систематика алгебраическаго анализа.

Исходятъ отъ степени $a = b^c$ и затѣмъ послѣдовательно переходятъ отъ цѣлыхъ положительныхъ показателей c къ цѣлымъ отрицательнымъ и, наконецъ, къ дробнымъ значеніемъ c; этимъ самымъ понятіе корня включается въ обобщенное понятіе о степени. Не входя въ подробности свойствъ степеней, отмѣчу только правило умноженія:

$$b^c . b^{c'} = b^{c+c'},$$

которое сводитъ перемноженіе двухъ чиселъ къ сложенію ихъ показателей. Возможность такого сведенія, которое, какъ извѣстно, лежитъ въ основаніи вычисленій съ помощью логариѳмовъ, формально обусловливается тѣмъ, что основные законы умноженія и сложенія во многомъ совпадаютъ, а именно оба дѣйствія коммутативны и ассоціативны.

Обращеніе дѣйствія возведенія въ степень приводитъ къ логариѳму: c называютъ логариѳмомъ a при основаніи b:

$$c = \log_b a$$

Но уже здѣсь появляется рядъ затрудненій существеннаго характера, мимо которыхъ въ большинствѣ случаевъ проходятъ молча, не разъясняя ихъ какъ слѣдуетъ, и которыя мы

именно поэтому постараемся вполнѣ себѣ выяснить. При этомъ оказывается удобнѣе ввести вмѣсто a и c, взаимную зависимость которыхъ мы намѣрены изучать, обычныя обозначенія перемѣнныхъ x, y, такъ что наши основныя равенства принимаютъ такой видъ:

$$x = b^y, y = \log_b x.$$

Начнемъ съ того, что основаніе b всегда предполагается положительнымъ; при отрицательномъ b перемѣнная x принимала бы для цѣлыхъ значеній y то положительныя, то отрицательныя значенія, а при раціональныхъ y она принимала бы множество разъ даже мнимыя значенія, и совокупность этихъ паръ значеній x, y не могла бы образовать непрерывной кривой. Но и при $b > 0$ невозможно обойтись безъ, повидимому, совершенно произвольныхъ соглашеній. Въ самомъ дѣлѣ, при раціональномъ $y = \frac{m}{n}$ (гдѣ m, n взаимно простыя числа), какъ извѣстно, значеніе $x = b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ опредѣлено; но этотъ корень имѣетъ n значеній и, если даже ограничиться вещественными числами, то все же при четномъ n онъ имѣетъ 2 значенія. Первое соглашеніе и состоитъ въ томъ, что мы подъ x всегда будемъ разумѣть положительное значеніе корня, или такъ называемое главное значеніе. Значеніе этого условія мы изслѣдуемъ съ помощью общеизвѣстнаго изображенія логариѳмической кривой $y = \log x$, которымъ я хочу воспользоваться уже здѣсь ради большей ясности (рис. 38).

Если y пробѣгаетъ сгущенный комплексъ раціональныхъ чиселъ, то положительныя, главныя значенія $x = b^y$ образуютъ на нашей кривой сгущенный комплексъ *). Если бы мы стали отмѣ-

*) Комплексъ (многообразіе, ансамбль) точекъ называется сгущеннымъ (überall dicht, partout dense), если во всякой части отрѣзка, въ которомъ комплексъ заключенъ, имѣются точки комплекса; т. е. если на этомъ отрѣзкѣ нельзя выдѣлить меньшаго отрѣзка, въ которомъ нѣтъ точекъ комплекса; еще иначе, если сколь угодно близко къ любой точкѣ отрѣзка имѣются точки комлекса.

чать при четномъ знаменателѣ n (у показателя y) каждый разъ и соотвѣтствующія отрицательныя значенія x, то получился бы, можно сказать, „*вдвое менѣе плотный*“, но все же сгущенный комплексъ точекъ на зеркальномъ изображеніи нашей кривой по отношенію къ оси y ($y = \log(-x)$). Представляется далеко не очевиднымъ, *почему* въ томъ случаѣ, если давать y всевозможныя вещественныя, въ томъ числѣ и ирраціональныя, значенія, *можно именно главныя значенія справа соединять въ одну непрерывную правильно идущую кривую*, и нельзя ли — и почему именно нельзя — дополнить такимъ же образомъ и отрицательныя значенія слѣва. Мы увидимъ, что вполнѣ понять все это мы сможемъ лишь съ

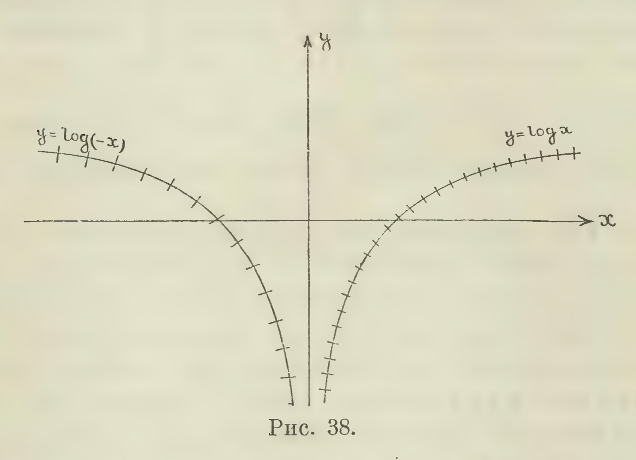


Рис. 38.

помощью болѣе глубокихъ средствъ теоріи функцій, какими не можетъ располагать школа. Вслѣдствіе этого въ школѣ отказываются отъ болѣе глубокаго пониманія положенія вещей и, большей частью, довольствуются тѣмъ, конечно, весьма убѣдительнымъ для ученика, *авторитетнымъ утвержденіемъ*, что *должно брать* $b > 0$ *и положительныя, главныя значенія корней и что все иное неправильно*. На этомъ основано то утвержденіе, что *логариѳмъ есть однозначная функція, опредѣленная только для положительныхъ значеній аргумента*.

Когда теорія логариѳма доведена до этого пункта, ученикъ получаетъ въ руки *таблицы логариѳмовъ* и долженъ на-

учиться пользоваться ими для практическихъ вычисленій. При этомъ возможны конечно и такія школы, — въ мои школьные годы это было общимъ явленіемъ, — въ которыхъ не особенно распространяются о томъ, какъ именно вычислены такія таблицы. Само собой разумѣется, что мы должны самымъ рѣзкимъ образомъ осудить такой грубый утилитаризмъ, игнорирующій высшіе принципы обученія. Но, теперь, большей частью, уже говорятъ о вычисленіи логариѳмовъ и во многихъ школахъ вводятъ съ этой цѣлью также ученіе о натуральныхъ логариѳмахъ и о разложеніи въ ряды.

Что касается перваго вопроса, то, какъ извѣстно, основаніемъ натуральной системы логариѳмовъ служитъ

$$e = \lim_{n = \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818\ldots$$

Это опредѣленіе e и его употребленіе въ качествѣ основанія системы логариѳмовъ, большей частью, помѣщаютъ непосредственно въ самомъ началѣ, въ особенности — въ подражаніе французамъ — въ большихъ учебникахъ анализа, при чемъ, конечно, отсутствуетъ собственно наиболѣе цѣнный элементъ, способствующій пониманію: объясненіе того, почему принимаютъ за основаніе какъ разъ этотъ замѣчательный предѣлъ и почему получаемые при этомъ логариѳмы называютъ натуральными. Точно такъ же и разложеніе въ рядъ появляется часто совершенно неожиданно; полагаютъ попросту формально:

$$\log(1 + x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

вычисляютъ коэффиціенты $a_0, a_1, \ldots$ на основаніи извѣстныхъ свойствъ логариѳма и доказываютъ, сверхъ того, еще сходимость ряда при $|x| < 1$. Но при этомъ опять-таки оставляютъ въ сторонѣ вопросъ о томъ, какъ вообще приходятъ хотя бы къ тому, что подозрѣваютъ возможность разложенія въ рядъ функціи и при томъ еще столь произвольно составленной, какой является логариѳмъ по школьному опредѣленію.

2. Историческое развитіе ученія о логариѳмѣ.

Если мы хотимъ найти всѣ тѣ внутреннія соотношенія, о которыхъ шла рѣчь, и узнать глубже лежащія основанія того, почему такія, повидимому, произвольныя допущенія все же приводятъ къ разумнымъ результатамъ, — короче говоря, если мы хотимъ дѣйствительно достичь полнаго пониманія теоріи логариѳма, то будетъ лучше всего прослѣдить въ общихъ чертахъ ходъ историческаго развитія этой теоріи. Вы увидите, что онъ нисколько не соотвѣтствовалъ изложенной выше школьной практикѣ, но что послѣдняя стоитъ къ нему, какъ бы въ положеніи проекціи, построенной изъ очень неблагопріятной точки.

Прежде всего приходится назвать одного нѣмецкаго математика XVI-го столѣтія — шваба Михаэля Штифеля (Michael Stifel), который выпустилъ въ Нюрнбергѣ свою „Arithmetica integra“ въ 1544 году, т. е. въ самомъ началѣ развитія современной алгебры, за одинъ годъ передъ тѣмъ, какъ появилось, тоже въ Нюрнбергѣ, уже упомянутое выше сочиненіе Кардана. Эта книга, какъ и большинство книгъ, упомянутыхъ ниже, имѣется въ нашей весьма богатой университетской библіотекѣ. Въ этой книгѣ Штифеля вы встрѣчаете впервые дѣйствія надъ степенями съ любыми раціональными показателями, при чемъ особенно подчеркивается правило умноженія. Штифель даетъ даже (стр. 250), пожалуй, первую таблицу логариѳмовъ, какая только существуетъ, но, конечно, весьма рудиментарную: она содержитъ всего лишь цѣлыя числа отъ — 3 до 6 въ качествѣ показателей и рядомъ съ ними соотвѣтствующія степени числа 2: $\frac{1}{8}, \ldots, 64$. Повидимому, Штифель имѣлъ представленіе о значеніи дальнѣйшаго развитія этихъ идей, такъ какъ онъ замѣчаетъ, что объ этихъ замѣчательныхъ числовыхъ соотношеніяхъ можно было бы написать цѣлую книгу.

Для того, чтобы имѣть возможность сдѣлать логариѳмы пригодными для практическихъ вычисленій, Штифелю недоставало еще одного важнаго вспомогательнаго средства, а именно десятичныхъ дробей, такъ что лишь со времени

изобрѣтенія послѣднихъ — послѣ 1600 года — стало возможнымъ построеніе настоящихъ логариѳмическихъ таблицъ. Первыя таблицы принадлежатъ шотландцу Джону Неперу (John Napier или Neper), жившему отъ 1550 г. до 1617 г., истинному изобрѣтателю логариѳмовъ, придумавшему самое ихъ названіе; эти таблицы появились въ 1614 году въ Эдинбургѣ подъ заглавіемъ: „Mirifici logarithmorum canonis descriptio“ („Описаніе чудеснаго канона логариѳмовъ“). О воодушевленіи, вызванномъ этими замѣчательными таблицами, вы можете судить по тѣмъ забавнымъ стихамъ, которыя напечатаны въ началѣ таблицъ и въ которыхъ различные авторы воспѣваютъ отмѣнныя качества логариѳмовъ. Впрочемъ, самый способъ Непера для вычисленія логариѳмовъ былъ опубликованъ лишь послѣ его смерти подъ названіемъ „Mirifici logarithmorum canonis constructio“ (Lugduni 1620; перепечатано въ Парижѣ въ 1895 г.).

Независимо отъ Непера швейцарецъ Бюрги (Jobst Bürgi, 1552 — 1632) построилъ таблицы, которыя онъ опубликовалъ, впрочемъ, лишь въ 1620 году въ Прагѣ подъ заглавіемъ „Progresstabuln“. Для насъ, гёттингенцевъ, Бюрги представляетъ особый интересъ, какъ землякъ, такъ какъ онъ долгое время жилъ въ Касселѣ*). Вообще, Кассель и въ особенности его старая обсерваторія играли весьма важную роль въ исторіи развитія ариѳметики, астрономіи, оптики передъ изобрѣтеніемъ исчисленія безконечно-малыхъ — подобно тому, какъ впослѣдствіи имѣлъ значеніе Ганноверъ, какъ мѣстожительство Лейбница. Такимъ образомъ, вблизи отъ насъ находится почва, представлявшая историческое значеніе для нашей науки еще задолго до того, какъ былъ основанъ нашъ университетъ.

Представляется весьма поучительнымъ присмотрѣться ближе къ ходу идей у Непера и Бюрги. Оба исходятъ изъ значеній $x = b^y$ для цѣлыхъ y и хотятъ устроить такъ, чтобы числа x лежали по возможности гуще, чтобы подойти, такимъ образомъ, возможно ближе къ конечной цѣли — найти для каждаго числа его логариѳмъ. Теперь въ школѣ достигаютъ этого съ помощью перехода къ дробному показателю y, о которомъ шла

---

*) Ближайшій къ Гёттингену большой городъ (въ 50 км.). Ганноверъ—центръ провинціи, къ которой принадлежитъ Гёттингенъ.

рѣчь выше. Но Неперъ и Бюрги избѣгаютъ всѣхъ тѣхъ затрудненій, которыя встрѣчаются на этомъ пути, благодаря тому, что съ помощью геніальной интуиціи подходятъ къ вопросу сразу же съ вѣрной стороны. А именно, имъ приходитъ въ голову простая, но счастливая мысль взять за основаніе b число, очень близкое къ единицѣ, ибо при этомъ дѣйствительно даже послѣдовательныя цѣлыя степени b лежатъ очень близко другъ къ другу. Бюрги принимаетъ

$$b = 1,0001,$$

между тѣмъ какъ Неперъ пользуется числомъ, меньшимъ 1:

$$b = 1 - 0,0000001 = 0,9999999,$$

подходя, такимъ образомъ, еще ближе къ 1. Причина этого отклоненія Непера отъ теперешняго обычая заключается въ томъ, что онъ напередъ имѣлъ въ виду примѣненіе къ тригонометрическимъ вычисленіямъ; дѣйствительно, тамъ вѣдь прежде всего имѣютъ дѣло съ логариѳмами правильныхъ дробей (синуса и косинуса), которые при $b > 1$ отрицательны, а при $b < 1$ положительны. Но для обоихъ изслѣдователей является общимъ тотъ главный фактъ, что они пользуются только цѣлыми степенями этого числа b и благодаря этому совершенно избавляются отъ многозначности, которая стѣсняла насъ выше. Вычислимъ по системѣ Бюрги степени для двухъ сосѣднихъ показателей y и $y+1$:

$$x = (1,0001)^y, \quad x + \Delta x = (1,0001)^{y+1}.$$

Вычитаніе даетъ:

$$\Delta x = (1,0001)^y\,(1,0001 - 1) = x \cdot \frac{1}{10^4},$$

или, если вмѣсто разностей показателей 1, писать вообще Δy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10^4}{x}. \qquad (1^a)$$

Получается такимъ образомъ уравненіе въ конечныхъ разностяхъ для логариѳмовъ Бюрги, которое самъ Бюрги непосредственно примѣняетъ при вычисленіи своихъ

таблицъ; опредѣливши, какое значеніе x соотвѣтствуетъ нѣкоторому y, Бюрги находитъ слѣдующее значеніе, соотвѣтствующее $(y+1)$, посредствомъ прибавленія $\frac{x}{10^4}$. Точно такъ же оказывается, что логариѳмы Непера удовлетворяютъ разностному уравненію:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{10^7}{x}. \qquad (1^b)$$

Чтобы убѣдиться въ близкомъ родствѣ обѣихъ системъ, стоитъ только разсматривать вмѣсто y то числа $\frac{y}{10^4}$, то числа $-\frac{y}{10^7}$ (другими словами, переставить десятичную запятую въ логариѳ-

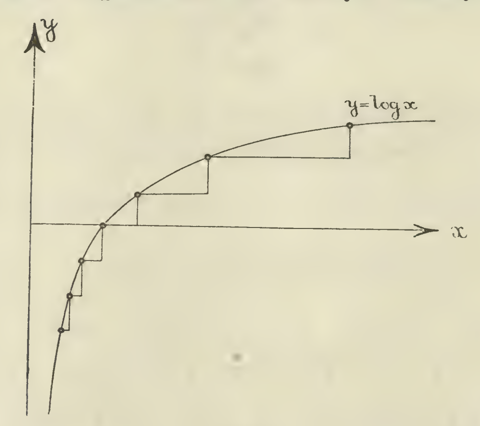


Рис. 39.

махъ); обозначая опять новыя числа просто черезъ y, получаемъ каждый разъ числовой рядъ, удовлетворяющій одному и тому же разностному уравненію:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}, \qquad (2)$$

въ которомъ y измѣняется скачками, въ одномъ случаѣ въ 0,0001, а въ другомъ случаѣ въ — 0,0000001.

Если мы позволимъ себѣ ради удобства воспользоваться изображеніемъ непрерывной показательной кривой, — собственно говоря, къ этой кривой мы должны были бы придти въ результатѣ нашихъ разсужденій, — то мы сможемъ дать въ нѣсколь-

кихъ словахъ наглядное описаніе расположенія точекъ $(x|y)$, соотвѣтствующихъ числовому ряду Непера или Бюрги: это — вершины лѣстницы съ постоянной высотой ступени $\Delta y = 0,0001$ и соотвѣтственно $\Delta y = 0,0000001$, вписанной въ показательную кривую:

$$x = (1,0001)^{10000y} \text{ и соотвѣтственно } x = (0,9999999)^{10000000y}, \qquad (3)$$

какъ схематически изображено на рис. 39.

Другое геометрическое толкованіе, которое не предполагаетъ знанія показательной кривой и тѣмъ не менѣе лучше покажетъ намъ естественный путь къ ея построенію, получается, если замѣнить разностное уравненіе (2) слѣдующимъ суммованіемъ (какъ бы „проинтегрировать“ его)

$$y = \sum_{1}^{x} \frac{\Delta\xi}{\xi}; \qquad (4)$$

суммированіе здѣсь надо понимать въ томъ смыслѣ, что ξ измѣняется отъ 1 до x скачками такой величины, что соотвѣтствующее $\Delta\eta = \frac{\Delta\xi}{\xi}$ постоянно равно 10^{-4} или, соотвѣтственно, -10^{-7}, что даетъ $\Delta\xi = \frac{\xi}{10^4}$ или, соотвѣтственно, $\Delta\xi = -\frac{\xi}{10^7}$. Этотъ процессъ нетрудно описать геометрически: надо начертить въ плоскости $\xi\eta$ гиперболу $\eta = \frac{1}{\xi}$ и отмѣтить на оси ξ, начиная отъ точки $\xi = 1$, всѣ тѣ точки, которыя получаются, если послѣдовательно прибавлять по $\Delta\xi = \frac{\xi}{10^4}$ (для логариѳмовъ Бюрги). Надъ каждымъ такимъ отрѣзкомъ (между двумя сосѣдними точками) построимъ прямоугольникъ съ высотой $\frac{1}{\xi}$, одной изъ вершинъ котораго служитъ точка гиперболы, имѣющая абсциссу ξ; всѣ такіе прямоугольники имѣютъ одну и ту же площадь $\Delta\xi \cdot \frac{1}{\xi} = \frac{1}{10^4}$ (рис. 40). Въ такомъ случаѣ равенство (4) показываетъ, что логариѳмъ Бюрги равенъ какъ разъ суммѣ всѣхъ этихъ вписан-

ныхъ въ гиперболу прямоугольниковъ, лежащихъ между 1 и x. То же имѣетъ мѣсто и для логариѳмовъ Непера.

Послѣднее истолкованіе приводитъ насъ непосредственно къ натуральнымъ логариѳмамъ, если вмѣсто суммы прямоугольниковъ разсматривать площадь, ограниченную самою гиперболою между ординатами $\xi = 1, \xi = x$ (заштрихованную на чертежѣ); это выражается, какъ извѣстно, слѣдующей формулой:

$$\log \operatorname{nat} x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi}.$$

Таковъ же былъ и дѣйствительный историческій путь: а именно, рѣшительный шагъ былъ сдѣланъ около 1650 года,

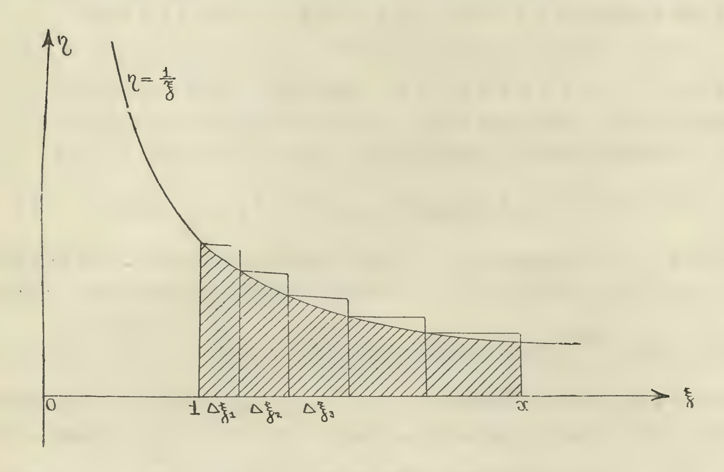


Рис. 40.

когда аналитическая геометрія составляла уже общее достояніе математиковъ и нарождающееся исчисленіе безконечно-малыхъ приводило къ квадратурамъ извѣстныхъ кривыхъ.

Если мы принимаемъ это опредѣленіе натуральнаго логариѳма, то мы должны, конечно, прежде всего убѣдиться въ томъ, что онъ дѣйствительно обладаетъ тѣмъ основнымъ свойствомъ, что умноженіе чиселъ (numeri) замѣняется сложеніемъ логариѳмовъ, — или, выража-

ясь современнымъ языкомъ, мы должны показать, что опредѣляемая площадью гиперболы функція

$$f(x) = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi}$$

подчиняется простой теоремѣ сложенія:

$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 . x_2).$$

Въ самомъ дѣлѣ, при варіаціи перемѣнныхъ x_1, x_2 обѣ части получаютъ, по самому опредѣленію интеграла, приращенія $\frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2}$ и, соотвѣтственно $\frac{d(x_1 x_2)}{x_1 x_2}$, которыя, такимъ образомъ, равны между собой; поэтому $f(x_1) + f(x_2)$ и $f(x_1 . x_2)$ могутъ отличаться только на постоянную C; но послѣдняя оказывается равной 0, такъ какъ при $x_1 = 1$ имѣемъ: $f(1) + f(x_2) = f(x_2)$, ибо $f(1) = 0$.

Чтобы найти „основаніе" полученныхъ такимъ образомъ логариѳмовъ, обратимъ наше вниманіе на то обстоятельство, что переходъ отъ ряда прямоугольниковъ къ площади, ограниченной гиперболой, можно получить, если подвигаться по оси абсциссъ каждый разъ на $\Delta\xi = \frac{\xi}{n}$ вмѣсто $\Delta\xi = \frac{\xi}{10^4}$ и давать n неограниченно возрастающія значенія. Но это означаетъ, что мы замѣняемъ послѣдовательность значеній Бюрги $x = (1,0001)^{10000y}$ послѣдовательностью $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{ny}$, гдѣ n пробѣгаетъ рядъ всѣхъ цѣлыхъ чиселъ. Согласно общему опредѣленію степени это можно выразить такъ: x есть y-ая степень числа $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, а это дѣлаетъ весьма вѣроятнымъ, что по выполненіи предѣльнаго перехода $\lim\limits_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ станетъ основаніемъ; это дѣйствительно какъ разъ тотъ предѣлъ, который обыкновенно помѣщаютъ въ самомъ началѣ, какъ опредѣленіе числа e. Любопытно, что основаніе Бюрги $(1,0001)^{10000} = 2,718146\ldots$ совпадаетъ съ e до третьяго десятичнаго знака.

Посмотримъ теперь, какъ развивалась исторически теорія логариѳма послѣ Непера и Бюрги. Здѣсь прежде всего я долженъ указать слѣдующее:

1) Упомянутый уже выше Меркаторъ одинъ изъ первыхъ сталъ пользоваться опредѣленіемъ натуральнаго логариѳма посредствомъ площади гиперболы; въ своей книгѣ „Logarithmotechnica“, а также въ нѣкоторыхъ статьяхъ, помѣщенныхъ въ „Philosophical Transactions“ Лондонской Академіи за 1667 и 1668 годы, онъ показываетъ, исходя, собственно говоря, изъ тѣхъ же соображеній, которыя я только-что изложилъ на современномъ языкѣ, что $f(x)=\int\limits_1^x \frac{d\xi}{\xi}$ отличается отъ обыкновеннаго логариѳма съ основаніемъ 10 — этимъ основаніемъ уже тогда пользовались при вычисленіяхъ — лишь постояннымъ множителемъ, такъ называемымъ модулемъ системы логариѳмовъ. Кромѣ того, онъ же ввелъ названіе „натуральный логариѳмъ“ или также „гиперболическій логариѳмъ“ *). Но самой крупной заслугой Меркатора является то, что онъ нашелъ степенной рядъ для логариѳма, который онъ получаетъ — по существу, — выполняя въ его интегральномъ изображеніи дѣленіе и интегрируя затѣмъ по частямъ. Я уже отмѣтилъ это выше (стр. 130), какъ шагъ, проложившій въ математикѣ новый путь.

2) Тамъ же я сообщилъ, что Ньютонъ воспользовался этими идеями Меркатора и обогатилъ ихъ двумя новыми, весьма цѣнными открытіями: обобщенной теоремой бинома и методомъ обращенія рядовъ. Эти открытія находятся уже въ одной юношеской работѣ Ньютона: „De analysi per aequationes numero terminorum infinitas“ **), которая была напечатана много позднѣе, но уже съ 1669 года была распространена въ рукописи. Въ этой работѣ ***) Ньютонъ выводитъ впервые изъ ряда Меркатора для $y = \log \operatorname{nat} x$ посредствомъ его обращенія рядъ для показательной функціи:

$$x = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots$$

*) Phil. Trans, III (1668), pag. 761.

**) I. Newton, Opuscula, Tom. I. (Lausannae 1744), op. 1. — Впервые появилась въ 1711 г.

***) Loco cit., pag. 20.

Такимъ образомъ, число, натуральный логариѳмъ котораго равенъ 1, получается отсюда въ такомъ видѣ:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots,$$

и съ помощью функціональнаго уравненія для логариѳма нетрудно вполнѣ строго придти къ выводу, что для каждаго раціональнаго y, въ смыслѣ обыкновеннаго опредѣленія степени, x равенъ одному изъ значеній e^y, а именно положительному, какъ мы еще увидимъ ниже. Такимъ образомъ, функція $y = \log \operatorname{nat} x$ дѣйствительно представляетъ то, что, согласно обычному опредѣленію, слѣдовало бы назвать „логариѳмомъ x при основаніи e“, при чемъ e здѣсь опредѣлено посредствомъ ряда, а не какъ $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

3) Болѣе удобный способъ полученія показательнаго ряда имѣлъ возможность дать Брукъ Тэйлоръ (Brook Taylor), установивъ въ своемъ „Методѣ приращеній“ *) общій принципъ разложенія въ рядъ, названный его именемъ; объ этомъ рядѣ намъ еще придется много говорить въ послѣдующемъ. Ему надо было только изъ соотношенія, содержащагося въ опредѣленіи логариѳма съ помощью интеграла:

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x},$$

вывести для обратной функціи равенство:

$$\frac{de^y}{dy} = e^y;$$

послѣ этого онъ имѣлъ возможность сразу написать рядъ для показательной функціи, какъ частный случай его общаго ряда (т. е. такъ называемаго ряда Тэйлора).

Мы уже видѣли выше (стр 132), что за этой продуктивной эпохой послѣдовала эпоха критики, которую можно назвать чуть ли не періодомъ моральнаго угнетенія; въ теченіе этого періода математики стремились, главнымъ образомъ, къ тому, чтобы надежно обосновать вновь пріобрѣтенные результаты

*) „Methodus incrementorum“, Londini, 1715.

и отдѣлить то, что могло оказаться невѣрнымъ. Мы должны теперь ближе присмотрѣться къ тому, какъ относились къ показательной функціи и къ логариѳму главные представители этого направленія — Эйлеръ и Лагранжъ.

Начнемъ съ „Введенія въ анализъ безконечно-малыхъ“ Эйлера*). Позвольте мнѣ, прежде всего, отмѣтить необычайный, поразительный анализъ Эйлера, проявляемый имъ во всѣхъ его разсужденіяхъ, хотя я долженъ замѣтить, что у Эйлера нѣтъ и слѣда той строгости, какая теперь, обыкновенно, требуется.

Эйлеръ начинаетъ свои разсужденія съ теоремы о биномѣ:

$$(1+k)^l = 1 + \frac{l}{1}k + \frac{l(l-1)}{1.2}k^2 + \frac{l(l-1)(l-2)}{1.2.3}k^3 + \cdots$$

для цѣлаго показателя l; при нецѣломъ показателѣ Эйлеръ вообще не разсматриваетъ бинома во „Введеніи“. Это разложеніе Эйлеръ примѣняетъ къ выраженію:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{ny},$$

гдѣ n и y суть цѣлыя числа; заставляя n — при сохраненіи этого условія — возрастать до безконечности и выполняя справа этотъ же процессъ въ каждомъ членѣ ряда отдѣльно Эйлеръ получаетъ показательный рядъ:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots,$$

гдѣ e опредѣлено, какъ $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Могутъ ли быть строго оправданы, въ современномъ значеніи слова, отдѣльные шаги этого пріема, — напримѣръ, дѣйствительно ли сумма предѣловъ членовъ ряда равна предѣлу суммы ряда, — обо всемъ этомъ Эйлеръ нисколько не заботится. Идея этого вывода ряда для показательной функціи является, какъ вамъ извѣстно, образцомъ для весьма многихъ курсовъ анализа, при чемъ, во всякомъ случаѣ, чѣмъ дальше, тѣмъ больше разрабатываются отдѣльные

*) „Introductio in analisin infinitorum“, Lausannae, 1748. Cap. VII, pag. 85 и слѣд.

шаги сами по себѣ и особенное значеніе придается доказательству ихъ правильности. О томъ, какое опредѣляющее значеніе имѣла книга Эйлера для всего дальнѣйшаго развитія этихъ вещей, вы можете судить уже по одному тому, что отъ Эйлера ведетъ начало употребленіе буквы e для обозначенія этого замѣчательнаго числа: „Ponamus autem brevitatis gratia pro numero hoc 2,71828.... constanter litteram e..." читаемъ мы на страницѣ 90.

Быть можетъ, будетъ кстати здѣсь же упомянуть, что Эйлеръ даетъ непосредственно вслѣдъ за этимъ совершенно аналогичный выводъ ряда для синуса и косинуса. При этомъ онъ исходитъ изъ разложенія въ рядъ $\sin\varphi$ по степенямъ $\sin\frac{\varphi}{n}$ и заставляетъ n возрастать до ∞. Если построить это разложеніе на основаніи „формулы Моавра":

$$\cos\varphi+i\sin\varphi=\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)^n=\left(\cos\frac{\varphi}{n}\right)^n\cdot\left(1+i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{n}\right)^n,$$

то нетрудно понять, что примѣняемый Эйлеромъ процессъ представляетъ собой предѣльный переходъ для бинома. Съ другой стороны, въ этомъ же мѣстѣ *) Эйлеръ впервые употребляетъ букву π для обозначенія того числа, для котораго она съ тѣхъ поръ всегда употребляется.

Обратимся теперь къ замѣчательному сочиненію Лагранжа—къ „Теоріи аналитическихъ функцій" **). И въ этомъ случаѣ приходится прежде всего отмѣтить, что вопросами о сходимости Лагранжъ, если и занимается, то совершенно случайно и мимоходомъ. Мы уже знаемъ, что Лагранжъ разсматриваетъ лишь такія функціи, которыя даны въ видѣ степенныхъ рядовъ, и опредѣляетъ ихъ производныя вполнѣ формально посредствомъ степенныхъ рядовъ, получаемыхъ по опредѣленнымъ правиламъ изъ даннаго ряда. Поэтому рядъ Тэйлора

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots$$

*) Loco. cit., pag. 93.

**) „Théorie des fonctions analytiques". Paris 1797.—Перепечатано въ изданіи Lagrange, Oeuvres, T. IX (Paris, 1881); ср. въ особенности Chap. III, pag. 34 и слѣд.

представляетъ для него только лишь результатъ формальной перегруппировки ряда для $f(x+h)$, расположеннаго первоначально по степенямъ $(x+h)$. Если онъ желаетъ примѣнить этотъ рядъ къ какой-нибудь опредѣленной функціи, то, конечно, онъ долженъ сперва, строго говоря, показать, что взятая функція принадлежитъ къ числу „аналитическихъ", т. е. что она вообще можетъ быть разложена въ степенной рядъ.

Лагранжъ начинаетъ съ разсмотрѣнія функціи $f(x)=x^n$ при раціональномъ n и опредѣляетъ $f'(x)$, какъ коэффиціентъ при h^1 въ разложеніи $(x+h)^n$, представляя себѣ, что дѣйствительно вычислены первые два члена этого разложенія; по тому же самому закону онъ сразу получаетъ и $f''(x), f'''(x), \ldots$, и биноміальное разложеніе $(x+h)^n$ получается, какъ частный случай Тэйлорова ряда для $f(x+h)$. При этомъ я особенно подчеркиваю, что Лагранжъ не разбираетъ отдѣльно случая ирраціональныхъ показателей n, но считаетъ очевиднымъ, что этотъ случай исчерпанъ, если приняты во вниманіе всѣ раціональныя значенія n; представляется интереснымъ отмѣтить это въ виду того, что въ настоящее время придаютъ очень большое значеніе точной разработкѣ подобныхъ переходовъ.

Эти результаты Лагранжъ примѣняетъ къ вполнѣ аналогичному изученію функціи $f(x)=(1+b)^x$; а именн преобразуя биноміальный рядъ для $(1+b)^{x+h}$, онъ находитъ $f'(x)$, какъ коэффиціентъ при h, затѣмъ опредѣляетъ по тому же закону $f''(x), f'''(x), \ldots$, и, наконецъ, пишетъ рядъ Тэйлора для $f(x+h)=(1+b)^{x+h}$: полагая $x=0$, онъ получаетъ искомый рядъ для показательной функціи.

Этотъ историческій обзоръ, въ которомъ я, разумѣется, могъ назвать имена только первоклассныхъ математиковъ, я хотѣлъ бы, господа, закончить тѣмъ, что вкратцѣ отмѣчу тѣ существенно новыя теченія, которыя выступили въ XIX-мъ столѣтіи. Здѣсь я долженъ, прежде всего, указать на

1) выработку точныхъ понятій о сходимости безконечныхъ рядовъ и другихъ безконечныхъ процессовъ. Первое мѣсто здѣсь занимаетъ Гауссъ съ его

статьей 1812 года о гипергеометрическихъ рядахъ*); затѣмъ слѣдуетъ работа Абеля 1824 года о биноміальномъ рядѣ**), между тѣмъ какъ Коши въ двадцатыхъ годахъ впервые публикуетъ въ своемъ „Курсѣ анализа“***) изслѣдованія общаго характера о сходимости рядовъ. Результатъ всѣхъ этихъ работъ по отношенію къ разсматриваемымъ здѣсь рядамъ состоитъ въ томъ, что всѣ прежнія разложенія — поскольку они относились къ области сходимости — были правильны, при чемъ точныя доказательства оказываются, конечно, очень сложными. Относительно подробностей этихъ доказательствъ въ ихъ современномъ видѣ я снова отсылаю интересующихся къ „Алгебраическому анализу“ Буркгардта или къ книгѣ Вебера-Вельштейна.

2) Здѣсь же я долженъ упомянуть о точномъ обоснованіи анализа безконечно-малыхъ въ работахъ Коши, хотя подробно говорить объ этомъ намъ придется позже. Это обоснованіе сообщило тому изложенію теоріи логариѳмовъ, какое выработалось въ XVII столѣтіи, полную математическую точность.

3) Наконецъ, я долженъ упомянуть о той теоріи, которая одна только могла привести къ полному пониманію логариѳма и показательной функціи,—о теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго, кратко называемой теперь „теоріей функцій“. Первымъ, кто ясно представлялъ себѣ основныя черты этой теоріи, былъ опять-таки Гауссъ, хотя онъ опубликовалъ объ этомъ очень мало или даже почти ничего. Для насъ интересно прежде всего письмо Гаусса къ Бесселю отъ 18 декабря 1811 года, которое было опубликовано,

*) Gauss, „Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1+\frac{a.b}{1.c}x+\cdots$“. Comment. Societ. reg. Gotting. recent. Vol. II, 1813 или Werke, Bd. III, pag. 125.

**) Crelles Journal f. d. r. u. a. Mathem., Bd. I, pag. 311.

***) Cauchy, „Cours d'analyse“, P. 1: Analyse algèbrique. Paris 1821 или „Oeuvres“, Ser. II, Term. III (Paris 1897).

конечно, лишь много позднѣе (Werke, Bd. III, pag. 90). Въ этомъ письмѣ съ поразительной ясностью опредѣлено значеніе интеграла $\int_1^x \frac{dz}{z}$ въ комплексной плоскости и объяснено, почему онъ представляетъ безконечно-многозначную функцію.— Впрочемъ, слава самостоятельнаго созданія и перваго опубликованія теоріи комплексныхъ функцій и въ этомъ отношеніи принадлежитъ Коши.

Результатъ этихъ изслѣдованій начала XIX столѣтія въ приложеніи къ нашему спеціальному вопросу можно выразить приблизительно такъ: опредѣленіе натуральнаго логариѳма на основаніи квадратуры гиперболы обладаетъ такою же строгостью, какъ и всякое другое опредѣленіе, и даже болѣе того: оно, какъ мы видѣли, превосходитъ другія опредѣленія простотой и наглядностью.

3. Нѣкоторыя замѣчанія о школьномъ преподаваніи.

Несомнѣнно,— хотя и удивительно,— что это современное развитіе идей, по существу, прошло совершенно безслѣдно для характера школьнаго преподаванія, на что я уже неоднократно указывалъ. Тамъ — въ школѣ — и по сей день обходятся съ помощью алгебраическаго анализа, несмотря на всѣ трудности и несовершенство послѣдняго, избѣгая всякаго примѣненія исчисленія безконечно-малыхъ, хотя страхъ XVIII-го столѣтія передъ послѣднимъ давно уже потерялъ всякій смыслъ. Причину указаннаго явленія приходится искать въ томъ обстоятельствѣ, что съ самаго начала XIX-го столѣтія преподаваніе математики въ школѣ и идущее впередъ научное изслѣдованіе потеряли всякое соприкосновеніе между собой; и этотъ фактъ представляется тѣмъ болѣе удивительнымъ, что какъ разъ въ первыя десятилѣтія этого же столѣтія начинается впервые вообще спеціальная подготовка кандидатовъ въ преподаватели математики. Я указывалъ уже во „Введеніи" на этотъ разрывъ, который

долгое время имѣлъ здѣсь мѣсто и препятствовалъ какой-либо реформѣ школьной традиціи. Средняя школа всегда очень мало заботилась о томъ, какъ высшая школа будетъ строить свое зданіе на основахъ, даваемыхъ ею, средней школой, и часто довольствовалась такими опредѣленіями, которыя, быть можетъ, и были достаточны для ея цѣлей, но оказывались несостоятельными передъ лицомъ болѣе серьезныхъ требованій. Съ другой же стороны, и высшая школа часто совершенно на даетъ себѣ труда точно примыкать къ тому, что дано въ средней школѣ; вмѣсто этого она строитъ свою собственную систему, лишь изрѣдка сокращая свой трудъ не всегда даже подходящимъ указаніемъ: „это вы уже имѣли въ школѣ“.

Въ противоположность этому, интересно замѣтить, что тѣ преподаватели высшей школы, которымъ приходится читать лекціи для болѣе широкихъ круговъ — для естественниковъ и для техниковъ, сами собой пришли въ своей практикѣ къ способу введенія логариѳмовъ, совершенно подобному тому, который я здѣсь рекомендую. Въ этомъ отношеніи я особенно рекомендую вашему вниманію „Учебникъ математики для студентовъ-естественниковъ и для техниковъ“ Шефферса*). Тамъ вы найдете на стр. 232-350 очень подробную теорію логариѳма и показательной функціи, которая вполнѣ совпадаетъ съ нашимъ построеніемъ и къ которой примыкаетъ (стр. 351—407) подобная же теорія тригонометрическихъ функцій. Я настойчиво рекомендую вамъ познакомиться съ этой книгой: она написана мастерски и легко читается, такъ что вполнѣ доступна и для менѣе способныхъ. Весьма поучительно обратить вниманіе на тотъ педагогическій тактъ, который обнаруживаетъ Шефферсъ; посмотрите, скажемъ, — чтобы ограничиться однимъ примѣромъ, — какъ часто и настойчиво онъ указываетъ, что во всей теоріи логариѳма лишь очень мало новыхъ формулъ необходимо запомнить, между тѣмъ какъ всѣ другія, если вы ихъ хоть одинъ разъ поняли, каждый разъ можно отыскать въ книгѣ; этимъ онъ постоянно поддерживаетъ въ читателѣ терпѣніе даже среди громад-

*) Scheffers, „Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und Technik“. Leipzig 1905.

наго, повидимому, обилія новаго матеріала. Въ одномъ только Шефферсъ отклоняется отъ моей тенденціи: онъ, хотя и принимаетъ школьное изложеніе, какъ напередъ данное, но строитъ свои разсужденія, не заботясь о томъ, что́ дала школа, полагая, что большинство изъ этого матеріала уже забыто. Но онъ очень далекъ отъ того, чтобы дѣлать предложенія по вопросу о реформѣ самого школьнаго преподаванія, какъ это дѣлаю я.

Я хочу теперь еще разъ въ нѣсколькихъ словахъ резюмировать, какъ мнѣ представляется введеніе логариѳма въ школѣ по этому простому и естественному способу. Основнымъ принципомъ должно быть признаніе квадратуры уже извѣстныхъ кривыхъ правильнымъ источникомъ для введенія новыхъ функцій. Это, какъ я показалъ, соотвѣтствуетъ, съ одной стороны, историческому положенію вещей, а, съ другой, методу, примѣняемому въ высшихъ частяхъ математики (сравните, напримѣръ, эллиптическія функціи). Слѣдуя этому общему принципу, надо исходить изъ гиперболы $\eta=\frac{1}{\xi}$ и назвать логариѳмомъ отъ x число, измѣряющее площадь, которая содержится между кривой и осью абсциссъ, а съ боковъ ограничена ординатами $\xi=1$ и $\xi=x$ (рис. 41). Передвигая вторую ординату, можно легко на основаніи геометрической интуиціи составить себѣ качественное представленіе объ измѣненіи этой площади при измѣненіи x и, слѣдовательно, приблизительно построить кривую $y=\log x$. Чтобы возможно просто получить функціональное уравненіе логариѳма, можно, напримѣръ, исходить изъ равенства

Рис. 41.

$$\int_1^x \frac{d\xi}{\xi}=\int_c^{cx}\frac{d\xi}{\xi},$$

которое получается при преобразованіи $c\xi = \xi'$ перемѣнныхъ интегрированія; это равенство говоритъ, что площадь, заключенная между ординатами 1 и x, равна площади, заключенной между ординатами, въ c разъ болѣе удаленными отъ начала: c и cx. Этотъ фактъ легко сдѣлать весьма наглядным геометрически, если обратить вниманіе на то, что величина площади должна оставаться неизмѣнной, если передвигать ее подъ гиперболой и въ то же время растягивать въ такой же мѣрѣ, въ какой уменьшается высота. Но изъ этой теоремы вытекаетъ непосредственно теорема сложенія:

$$\int_1^{x_1} \frac{d\xi}{\xi} + \int_1^{x_2} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^{x_1} \frac{d\xi}{\xi} + \int_{x_1}^{x_1 . x_2} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^{x_1 . x_2} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Мнѣ бы очень хотѣлось, чтобы возможно скорѣе попробовали примѣнить этотъ путь въ школьной практикѣ; рѣшеніе вопроса о томъ, какъ должны быть построены детали этого изложенія, слѣдуетъ, конечно, предоставить опытному преподавателю. Впрочемъ, въ меранской программѣ мы еще не рѣшались предложить этотъ путь въ видѣ нормы.

Теперь, наконецъ, мы должны еще оріентироваться относительно того, какъ складывается наша теорія, если мы становимся на точку зрѣнія теоріи функцій; это дастъ намъ также полное освѣщеніе всѣхъ трудностей, затронутыхъ ранѣе.

4. Точка зрѣнія современной теоріи функцій.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы замѣнимъ y и x комплексными перемѣнными

$$w = u + iv \text{ и } z = x + iy.$$

1) Логариѳмъ опредѣляется посредствомъ интеграла:

$$w = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \qquad (1)$$

при чемъ путемъ интегрированія можетъ служить любая кривая въ комплексной плоскости ζ, идущая отъ точки $\zeta = 1$ къ точкѣ $\zeta = z$ (рис. 42).

2) Смотря по тому, обходитъ ли путь интегрированія вокругъ точки $\xi = 0$ одинъ разъ, два раза, ..., или же не обходитъ вовсе, интегралъ принимаетъ безконечно-много различныхъ значеній, такъ что $\log z$ представляетъ безконечно-многозначную функцію. Опредѣленное значеніе — такъ называемое главное значеніе $[\log z]$ — получится, если взрѣзать плоскость, напримѣръ, вдоль оси отрицательныхъ вещественныхъ чиселъ и установить, что путь интегрированія не долженъ переходить черезъ этотъ разрѣзъ. Произвольнымъ остается при этомъ только то, желаемъ ли мы получать отрицательныя вещественныя значенія,

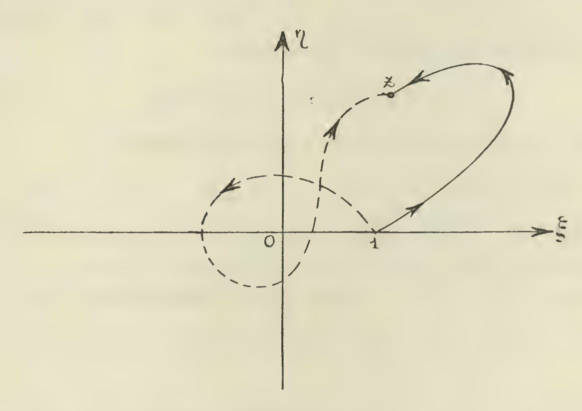


Рис. 42.

подходя къ линіи разрѣза сверху или снизу; соотвѣтственно этому и логариѳмъ получаетъ чисто-мнимую часть $+i\pi$ или $-i\pi$. Изъ главнаго значенія общее значеніе логариѳма получается прибавленіемъ произвольнаго кратнаго $2i\pi$:

$$\log z = [\log z] + 2\,ki\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (2)$$

3) Изъ опредѣленія логариѳма съ помощью интеграла слѣдуетъ, что обратная ему функція $z = f(w)$ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію:

$$\frac{df}{dw} = f,$$

на основаніи котораго можно сразу составить разложеніе f въ степенной рядъ:

$$z = f(w) = 1 + \frac{w}{1!} + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \cdots$$

Такъ какъ этотъ рядъ сходится для всякаго конечнаго w, то отсюда можно заключить, что эта обратная функція однозначна и имѣетъ только одну особенную точку $w = \infty$, представляя собою такимъ образомъ „цѣлую“ трансцендентную функцію.

4) Совершенно такъ же, какъ и при вещественномъ перемѣнномъ, можно вывести изъ опредѣленія при помощи интеграла теорему сложенія для логариѳма, изъ которой для обратной функціи вытекаетъ уравненіе:

$$f(w_1) \cdot f(w_2) = f(w_1 + w_2). \qquad (3)$$

Точно такъ же изъ соотношенія (2) получаемъ:

$$f(w + 2ki\pi) = f(w) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots); \qquad (4)$$

другими словами, $f(w)$ представляетъ простую періодическую функцію съ періодомъ $2\pi i$.

5) Пусть $f(1) = e$. Тогда изъ соотношенія (3) слѣдуетъ, что для каждаго раціональнаго значенія $w = \frac{m}{n}$ число $f(w)$ равно одному*) изъ n значеній $\sqrt[n]{e^m}$, опредѣленныхъ обычнымъ образомъ:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{c^m} = e^{\frac{m}{n}}.$$

Принято — и мы тоже примкнемъ къ этому обычаю — обозначать черезъ $e^w = e^{\frac{m}{n}}$ всегда именно это значеніе $f(w)$, такъ что e^w обозначаетъ вполнѣ опредѣленную однозначную функцію, а именно ту, которая опредѣлена въ пунктѣ 3).

6) Какую же функцію надо понимать въ наиболѣе общемъ смыслѣ подъ степенью b^w при произвольномъ основаніи b? Опредѣленія должны быть даны такимъ обра-

*) И именно вещественному и положительному. *Ред.*

зомъ, чтобы сохранились формальныя правила возведенія въ степень. Если, такимъ образомъ, чтобы свести b^w къ только-что опредѣленной функціи e^w, мы положимъ b равнымъ $e^{\log b}$, гдѣ $\log b$ имѣетъ безконечно много значеній:

$$\log b = [\log b] + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

то получается необходимымъ образомъ:

$$b^w = (e^{\log b})^w = e^{w \cdot \log b} = e^{w \cdot [\log b]}\, e^{2ki\pi w} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

а это представляетъ при различныхъ значеніяхъ k безконечно-много функцій, среди которыхъ совершенно нѣтъ равныхъ. Такимъ образомъ мы приходимъ къ тому замѣчательному результату, что значенія показательнаго выраженія общаго вида b^w, получаемыя посредствомъ процессовъ возведенія въ степень и извлеченія корня, принадлежатъ отнюдь не одной и той же функціи, а безконечно-многимъ различнымъ функціямъ отъ w, каждая изъ которыхъ однозначна.

Значенія этихъ функцій стоятъ, конечно, въ различныхъ соотношеніяхъ между собою. Въ частности всѣ они равны между собой, если w есть цѣлое число; если же w есть раціональная дробь вида $\frac{m}{n}$, гдѣ m, n взаимно простыя числа, то среди нихъ существуетъ только конечное число, а именно n различныхъ значеній; это суть значенія $e^{\frac{m}{n}[\log b]} \cdot e^{2ki\pi\frac{m}{n}}$ для $k = 0, 1, \ldots, n-1$; такимъ образомъ, это, какъ оно и должно было быть, суть n значеній корня $\sqrt[n]{b^m}$.

7) Теперь лишь мы можемъ вполнѣ понять, до какой степени нецѣлесообразна обычная систематика, которая хочетъ, исходя изъ возведенія въ степень и извлеченія корней, подойти къ однозначной показательной функціи; этимъ она попадаетъ въ лабиринтъ, изъ котораго она не можетъ найти выхода съ помощью однихъ своихъ такъ называемыхъ „элементарныхъ“ средствъ, обязывая себя къ тому же не выходить за предѣлы области вещественныхъ величинъ. Вамъ станетъ

это вполнѣ ясно, если вы теперь на основаніи пріобрѣтеннаго общаго взгляда сообразите, какъ обстоитъ дѣло при отрицательномъ b. Я долженъ еще указать здѣсь на то, что теперь мы дѣйствительно можемъ понять цѣлесообразность того опредѣленія главныхъ значеній, которое раньше казалось намъ произвольнымъ ($b > 0$ и $b^{\frac{m}{n}} > 0$; см. стр. 237): оно доставляетъ исключительно значенія одной изъ нашихъ безчисленныхъ функцій, а именно значенія функціи

$$[b^w] = e^{w\,[\log b]}.$$

Въ противоположность этому отрицательныя вещественныя значенія величины $b^{\frac{m}{n}}$, при четномъ n, которыя тоже образуютъ сгущенный комплексъ, принадлежатъ, совершенно разнымъ изъ нашихъ безчисленныхъ функцій, и поэтому они не могутъ, вмѣстѣ взятыя, составить одну непрерывную аналитическую кривую.

Теперь я хочу добавить еще нѣсколько болѣе глубокихъ замѣчаній относительно природы логариѳма съ точки зрѣнія теоріи функцій. Такъ какъ функція $w = \log z$ при каждомъ обходѣ около точки $z = 0$ испытываетъ приращеніе въ $2\pi i$, то соотвѣтствующая ей Риманова поверхность съ безконечнымъ числомъ листовъ должна имѣть въ этомъ мѣстѣ точку развѣтвленія безконечно-высокаго порядка, а именно такого рода, что при каждомъ обходѣ около нея переходятъ отъ одного листа къ слѣдующему; замѣняя плоскость сферой, нетрудно убѣдиться въ томъ, что точка $z = \infty$ представляетъ вторую точку развѣтвленія поверхности такого же самаго рода,—другихъ точекъ развѣтвленія не имѣется. Теперь мы можемъ наглядно представить себѣ то, что называютъ униформизирующей силой логариѳма, о которой мы уже упоминали по поводу рѣшенія извѣстныхъ алгебраическихъ уравненій (стр. 216). Если имѣется, напримѣръ, раціональная степень $z^{\frac{m}{n}}$, то въ силу тождества

$$z^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}\log z}$$

она является однозначной функціей отъ $w = \log z$, или,

какъ говорятъ, она униформизируется логариѳмомъ. Чтобы понять это, представимъ себѣ на плоскости, кромѣ Римановой поверхности логариѳма, еще и Риманову поверхность функціи $z^{\frac{m}{n}}$: это n-листная поверхность, точки развѣтвленія которой лежатъ тоже въ точкахъ $z=0$ и $z=\infty$, въ каждой изъ которыхъ сходятся циклически всѣ n листовъ. Если представить себѣ въ плоскости z такой замкнутый путь, что на немъ логариѳмъ возвращается къ своему первоначальному значенію,— такъ что этотъ путь является замкнутымъ и на безконечно-многолистной поверхности логариѳма,— то легко видѣть, что онъ долженъ оставаться замкнутымъ и въ томъ случаѣ, если перенести его на n-листную поверхность $z^{\frac{m}{n}}$ (рис. 43). Изъ этихъ геометрическихъ соображеній мы заключаемъ, что $z^{\frac{m}{n}}$ возвращается къ своему начальному значенію всякій разъ, какъ возвращается къ своему значенію $\log z$, и что поэтому функція $z^{\frac{m}{n}}$ дѣйствительно униформизируется логариѳмомъ. Я тѣмъ охотнѣе дѣлаю эти краткія указанія, что здѣсь мы имѣемъ простѣйшій случай проблемы униформизированія, играющей столь большую роль въ современной теоріи функцій.

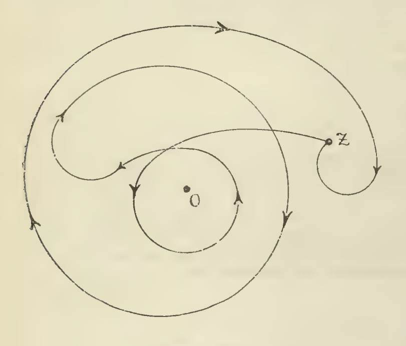


Рис. 43

Теперь постараемся еще лучше представить себѣ природу функціональной зависимости $w=\log z$, а именно при помощи разсмотрѣнія конформнаго отображенія плоскости z (или соотвѣтственно Римановой поверхности) на плоскость w. Чтобы не удаляться слишкомъ въ сторону, мы откажемся отъ разсмотрѣнія соотвѣтствующихъ сферъ, что само по себѣ являлось бы, конечно, предпочтительнымъ. Раздѣлимъ, какъ мы это дѣлали выше, плоскость z осью вещественныхъ чиселъ на заштрихованную (верхнюю) и незаштрихованную полуплоскости; каждая

изъ нихъ должна отображаться на плоскости w безконечное множество разъ, такъ какъ $\log z$ имѣетъ безконечное число значеній, и всѣ эти изображенія должны располагаться рядомъ другъ подлѣ друга*), ибо обратная функція $z = e^w$ однозначна. Въ частности здѣсь получается подраздѣленіе плоскости w на параллельныя полосы шириною въ π, образуемыя параллелями къ оси вещественныхъ чиселъ; эти полосы слѣдуетъ попеременно заштриховать и оставить чистыми (первая полоса кверху отъ вещественной оси [w] заштрихована); соотвѣт-



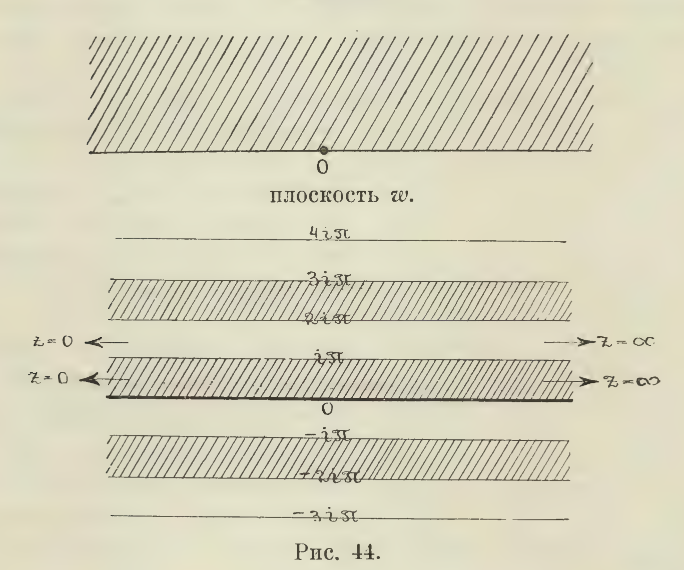


Рис. 44.

ственно этому онѣ представляютъ собой попеременно конформныя отображенія верхней и нижней полуплоскостей, въ то время какъ пограничныя параллели соотвѣтствуютъ частямъ вещественной оси z (рис. 44). Что же касается подробностей этого соотвѣтствія, то замѣчу здѣсь только, что z всегда направляется къ 0, когда w удаляется въ безконечность влѣво,

*) Въ томѣ смыслѣ, что образы заштрихованной полуплоскости не должны нигдѣ покрывать другихъ образовъ, ибо иначе одной и той же точкѣ w соотвѣтствовали бы двѣ точки z — одна выше, другая ниже вещественной оси.

Ред.

оставаясь внутри одной и той же полосы; между тѣмъ z удаляется въ ∞, если w уходитъ въ безконечность вправо; $w = \infty$ представляетъ существенно особенную точку обратной функціи e^w.

Я бы хотѣлъ указать еще на связь этого съ теоремой Пикара (Picard) — одной изъ самыхъ интересныхъ въ новѣйшей теоріи функцій. Пусть $z(w)$ означаетъ цѣлую трансцендентную функцію, т. е. такую функцію, которая имѣетъ только одну существенно особенную точку, а именно въ точкѣ $w = \infty$ (напримѣръ, e^w). Вопросъ заключается въ томъ, имѣются ли и въ какомъ именно числѣ такія значенія z, которыхъ $z(w)$ не принимаетъ ни при одномъ конечномъ (т. е. расположенномъ на конечномъ разстояніи) значеніи w, но къ которымъ $z(w)$ только приближается, если w надлежащимъ образомъ удаляется въ безконечность. Теорема Пикара и состоитъ въ томъ, что для каждой функціи можетъ быть, самое большее, два такихъ различныхъ значенія, которыхъ она не можетъ принимать въ окрестности существенно особеннаго мѣста, и что, слѣдовательно, цѣлая трансцендентная функція, кромѣ значенія $z = \infty$, котораго она никогда не можетъ достигнуть, не принимаетъ еще, самое большее, одного значенія. e^w представляетъ примѣръ функціи, которая дѣйствительно, кромѣ ∞, не принимаетъ еще одного значенія, а именно $z = 0$, ибо, хотя e^w въ каждой изъ параллельныхъ полосъ нашего дѣленія и приближается при указанныхъ предѣльныхъ переходахъ къ обоимъ этимъ значеніямъ, но ни въ одномъ конечномъ мѣстѣ не становится равной имъ. Примѣръ функціи, которая не принимаетъ только одного значенія ($z = \infty$), представляетъ $\sin w$.

Въ заключеніе я хочу съ помощью этихъ геометрическихъ средствъ выяснить еще одинъ пунктъ, котораго я уже нѣсколько разъ касался, это — предѣльный переходъ отъ степени къ показательной функціи, который примыкаетъ къ формулѣ:

$$e^w = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \cdot w},$$

или, полагая $n \cdot w = \nu$:

$$e^w = \lim_{\nu = \infty} \left(1 + \frac{w}{\nu}\right)^\nu.$$

Разсмотримъ съ этой цѣлью функцію въ томъ видѣ, какъ она является до предѣльнаго перехода:

$$f_\nu(w) = \left(1 + \frac{w}{\nu}\right)^\nu;$$

функціонально-теоретическія свойства ея, — какъ степени, — намъ хорошо извѣстны. Для нея „замѣчательными точками“ служатъ точки $w = -\nu$ и $w = \infty$, въ которыхъ основаніе

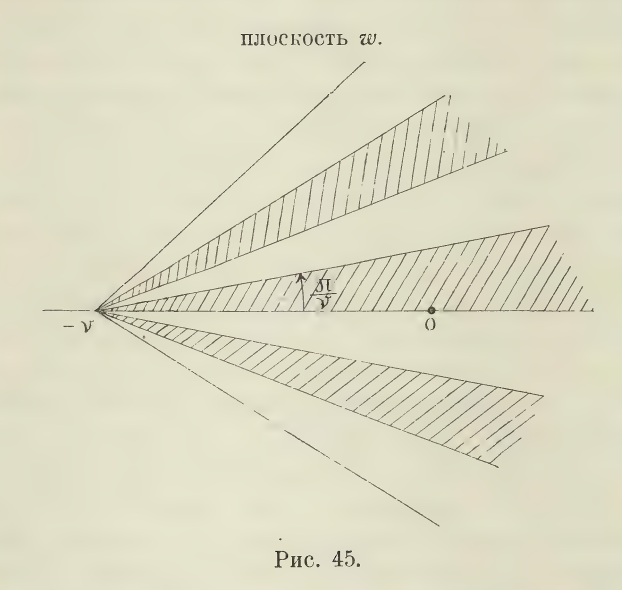


Рис. 45.

становится равнымъ 0 и, соотвѣтственно, ∞. Эта функція отображаетъ конформнымъ образомъ полуплоскости f_ν на секторахъ плоскости w, имѣющіе каждый общую вершину въ точкѣ $w = -\nu$ и угловое отверстіе въ $\frac{\pi}{\nu}$ (рис. 45); если ν не равно цѣлому числу, то послѣдовательность этихъ секторовъ можетъ покрывать поверхность w конечное или безконечное число разъ, соотвѣтственно той многозначности, которою обладаетъ въ этомъ случаѣ f_ν. Если ν становится безконечно большимъ, то вершина секторовъ

отодвигается влѣво до безконечности, и вполнѣ понятно, что секторы, расположенные справа отъ $-\nu$, переходятъ при этомъ въ параллельныя полосы плоскости w, соотвѣтствующія предѣльной функціи e^w; это даетъ геометрическое разъясненіе указаннаго опредѣленія e^w посредствомъ предѣла; съ помощью несложнаго вычисленія можно убѣдиться въ томъ, что ширина секторовъ у точки $w=0$ переходитъ при этомъ въ ширину π полосъ параллельнаго подраздѣленія.

Но тутъ сейчасъ же является сомнѣніе слѣдующаго рода: если давать ν возрастать до ∞, то оно получаетъ при этомъ не только цѣлыя, но также раціональныя и ирраціональныя значенія, для которыхъ функція f_ν становится многозначной и которымъ соотвѣтствуютъ многолистныя поверхности; какъ же могутъ послѣднія перейти въ простую плоскость, принадлежащую однозначной функціи e^w? Если, напримѣръ, ν переходитъ въ ∞, принимая одни только дробныя значенія со знаменателемъ n, то каждая функція $f_\nu(w)$ имѣетъ Риманову поверхность съ n листами. Чтобы прослѣдить за этимъ процессомъ, обратимся на одну минуту къ сферѣ w; для каждой функціи $f_\nu(w)$ она покрыта n листами, которые встрѣчаются въ точкахъ развѣтвленія $-\nu$ и ∞; предположимъ, что сѣченіе развѣтвленія проходитъ вдоль меньшей дуги меридіана, соединяющаго эти точки (рис. 46). Когда ν уходитъ въ ∞, то точки развѣтвленія сближаются и сѣченіе развѣтвленія исчезаетъ; этимъ уничтожается тотъ мостъ, вдоль котораго n листовъ переходили другъ въ друга, и получаются n отдѣльныхъ листовъ и соотвѣтственно имъ n различныхъ однозначныхъ функцій; наша функція e^w представляетъ только одну изъ нихъ.— Если же предоставить ν пробѣгать всѣ вещественныя значенія, то получаются вообще поверхности съ безконечнымъ числомъ листовъ, связь которыхъ прекращается въ предѣльномъ положеніи; на одномъ изъ листовъ каждой такой поверхности значенія стремятся въ предѣлѣ къ совпаденію со значеніями однозначной функціи e^w, которая расположена на простой сферѣ, между тѣмъ какъ послѣдовательности значеній на другихъ листахъ, вообще

говоря, не стремятся ни къ какимъ предѣльнымъ значеніямъ. Этимъ вполнѣ выясняется довольно-таки сложный и замѣчательный предѣльный переходъ отъ многозначной степени къ однозначной показательной функціи.

Общую мораль всѣхъ этихъ разсужденій можно, пожалуй, видѣть въ томъ, что полное пониманіе сущности подобныхъ проблемъ возможно только при переходѣ въ комплексную область. Не является ли это достаточнымъ основаніемъ для того, чтобы и въ школѣ изучать комплексную теорію функцій? Максъ Симонъ (Max Simon), напримѣръ, дѣйствительно выставляетъ подобныя требованія. Но я не думаю, чтобы возможно было дойти до этого со средними учениками даже въ послѣднемъ классѣ, и уже по одному этому я полагаю, что слѣдуетъ отказаться въ преподаваніи отъ появляющейся здѣсь методики алгебраическаго анализа въ пользу развитаго выше простого и естественнаго пути. Конечно, мнѣ представляется тѣмъ болѣе желательнымъ, чтобы учитель вполнѣ владѣлъ всѣми играющими здѣсь роль свѣдѣніями изъ теоріи функцій, ибо онъ долженъ стоять достаточно высоко надъ тѣмъ матеріаломъ, который ему приходится излагать, и долженъ въ точности знать всѣ тѣ подводныя скалы и мели, среди которыхъ онъ проводитъ своихъ учениковъ.

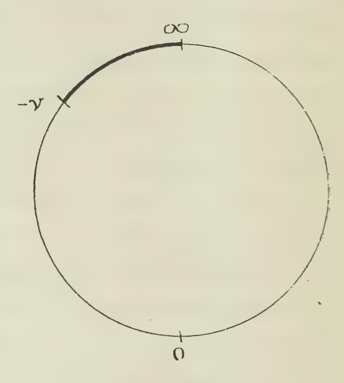


Рис. 46.

Послѣ этихъ подробныхъ разсужденій мы сможемъ быть гораздо кратче въ изложеніи ученія о гоніометрическихъ функціяхъ.

II. О гоніометрическихъ функціяхъ.

Замѣтимъ прежде всего, что мы предпочитаемъ это названіе наименованію „тригонометрическія функціи" по той причинѣ, что ученіе о треугольникахъ представляетъ только частное примѣненіе этихъ функцій, играющихъ въ высшей степени важную роль во всѣхъ отрасляхъ математики. Обратныя имъ функціи, вполнѣ соотвѣтствующія логариѳму (между тѣмъ какъ сами гоніометрическія функціи представляютъ аналогію съ показательной функціей), мы будемъ называть циклометрическими функціями.

1. Теорія гоніометрическихъ функцій.

Разсмотрѣніе этой теоріи мы поставимъ въ связь съ вопросомъ о томъ, какой способъ изложенія ея въ школѣ представляется наиболѣе естественнымъ? Я полагаю, что и въ этомъ случаѣ будетъ лучше всего примѣнить нашъ общій принципъ, согласно которому надо исходить отъ квадратуры плоскихъ кривыхъ. Обычный способъ изложенія, который начинается съ измѣренія дугъ, кажется мнѣ не въ такой степени непосредственно нагляднымъ; и прежде всего онъ не даетъ возможности одинаково просто и съ одной и той же точки зрѣнія охватить какъ высшія, такъ и низшія области. Позвольте мнѣ снова воспользоваться аналитической геометріей: за исходный пунктъ я беру

1) кругъ съ радіусомъ 1:

$$x^2 + y^2 = 1$$

(рис. 47) и разсматриваю секторъ, образуемый радіусами-векторами точекъ $A(x = 1 \,|\, y = 0)$ и $P(x \,|\, y)$. Чтобы оказаться въ согласіи съ обычными обозначеніями, я буду обозначать площадь этого сектора черезъ $\frac{\varphi}{2}$ (ибо тогда дуга $AP = \varphi$).

2) Подъ гоніометрическими функціями „косинусъ“ и „синусъ“ аргумента φ мы будемъ понимать длины координатъ x и y конечной точки P нашего сектора $\frac{\varphi}{2}$:

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi.$$

Происхожденіе этого обозначенія остается при этомъ, конечно, неяснымъ; но вѣдь оно и вообще хорошо неизвѣстно; по всей вѣроятности, слово „sinus“ возникло вслѣдствіе какого-нибудь недоразумѣнія при переводѣ арабскаго слова на латинскій языкъ *). Такъ какъ мы исходили не отъ измѣренія дуги, то не представляется удобнымъ обозначить обратныя функціи, — т. е. двойной секторъ, какъ функцію координатъ, — обычнымъ названіемъ „arcus“; весьма цѣлесообразнымъ является принятый въ Англіи способъ обозначенія:

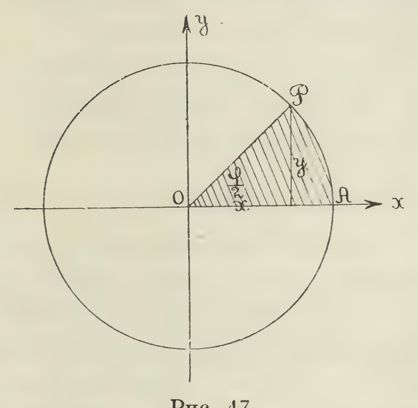


Рис. 47.

$$\varphi = \cos^{-1}x, \quad \varphi = \sin^{-1}y.$$

3) Прочія гоніометрическія функціи:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \quad \operatorname{cotang}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

а въ старой тригонометріи еще и $\sec\varphi$ и $\operatorname{cosec}\varphi$, опредѣляемъ, какъ простыя сочетанія обѣихъ основныхъ функцій. Ихъ вводятъ исключительно ради сокращенія формулъ, которыя приходится примѣнять на практикѣ; теоретическаго значенія онѣ для насъ не имѣютъ.

4) Если мы станемъ слѣдить за измѣненіемъ координатъ точки P при возрастаніи φ, то легко сможемъ составить себѣ качественное представленіе о видѣ кривыхъ синуса и косинуса въ прямоугольной системѣ координатъ **). Получаемъ извѣстныя волнообразныя

*) Ср. Tropfke, Bd. II, pag. 212.

**) Другими словами, строимъ кривыя $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, считая φ абсциссой, а x или y ординатой прямоугольной системы координатъ. Когда φ измѣняется отъ 0 до 2π, радіусъ OP обѣгаетъ весь кругъ, и функціи x и y возвращаются къ первоначальнымъ значеніямъ, повторяя при дальнѣйшемъ увеличеніи φ прежній циклъ измѣненій. *Ред.*

линіи, имѣющія періодъ 2π (рис. 48); при этомъ число π опредѣляемъ, какъ площадь полнаго круга радіуса 1 (а не какъ длину полуокружности).

Сравнимъ теперь подробно съ этими опредѣленіями изложенный выше способъ опредѣленія логариөма и показательной функціи. Тамъ мы исходили отъ

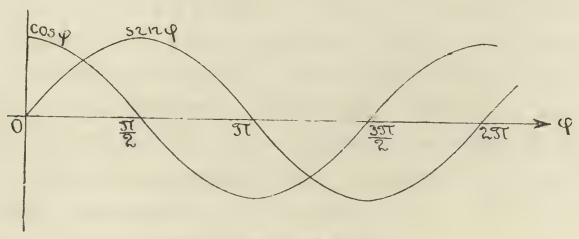


Рис 48.

1) равносторонней гиперболы, отнесенной къ ея асимптотамъ:

$$\xi \cdot \eta = 1;$$

полуось этой гиперболы $OA = \sqrt{2}$, тогда какъ здѣсь радіусъ круга равнялся 1 (рис. 49). Мы разсматривали далѣе площадь полосы между неподвижной ординатой AA' ($\xi = 1$) и подвижной PP'; обозначая её черезъ Φ, мы полагали $\Phi = \log \xi$, такъ что координаты P оказывались равными

$$\xi = e^{\Phi}, \quad \eta = e^{-\Phi}.$$

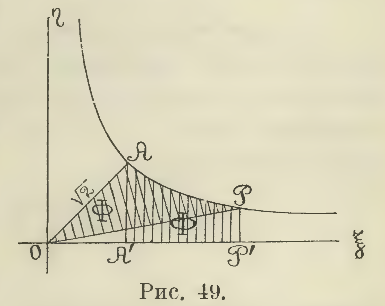


Рис. 49.

Вы замѣчаете извѣстную аналогію съ предыдущимъ, которая, впрочемъ, уже здѣсь нарушается въ двухъ отношеніяхъ: въ-первыхъ, Φ теперь не выражаетъ сектора, какъ выше въ случаѣ круга; во-вторыхъ, здѣсь обѣ координаты выражаются раціонально черезъ одну функцію e^{Φ}, между тѣмъ какъ въ случаѣ круга мы должны были ввести двѣ функціи: $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$. Но мы сейчасъ увидимъ, что оба уклоненія можно легко устранить.

2) Прежде всего замѣтимъ, что площадь треугольника $OP'P$ не зависитъ отъ положенія точки P на кривой, а именно всегда равна $\frac{1}{2} OP' \cdot P'P = \frac{1}{2} \xi \cdot \eta = \frac{1}{2} \cdot$ Въ частности, она равна площади треугольника $OA'A$, такъ что, присоединяя этотъ треугольникъ къ Φ и отнимая равный треугольникъ $OP'P$, находимъ, что Φ можно опредѣлить какъ площадь гиперболическаго сектора OAP, заключеннаго между радіусами-векторами вершины A и подвижной точки гиперболы, — вполнѣ аналогично случаю круга (рис. 50). Остающееся различіе въ знакахъ — для наблюдателя, находящагося въ O, дуга AP прежде была направлена влѣво, а теперь вправо — мы устранимъ тѣмъ, что замѣнимъ гиперболу ея зеркальнымъ отображеніемъ относительно радіуса-вектора OA, — другими словами, переставимъ между собою ξ и η; тогда координаты точки P будутъ:

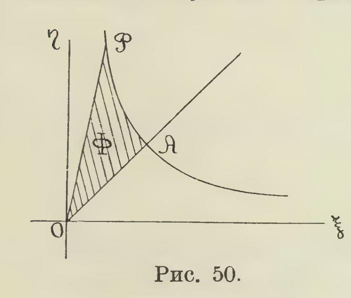


Рис. 50.

$$\xi = e^{-\Phi}, \quad \eta = e^{\Phi} \text{ *)}.$$

3) Наконецъ, примемъ за оси координатъ вмѣсто асимптотъ главныя оси гиперболы, повернувъ для этого весь чертежъ на 45^0 (рис. 51). Если обозначить новыя координаты черезъ X, Y, то уравненія преобразованія будутъ имѣть такой видъ:

$$X = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{-\xi + \eta}{\sqrt{2}};$$

поэтому уравненіе гиперболы переходитъ въ:

$$X^2 - Y^2 = 2,$$

и секторъ Φ принимаетъ такое же положеніе, какое онъ раньше

---

*) Иначе говоря, Φ опредѣляется, какъ $\log \eta$, а не какъ $\log \xi$, такъ что $\eta = e^{\varphi}$, $\xi = e^{-\varphi}$ и $\varphi > 0$ влѣво отъ луча OA (ибо тогда $\eta > 1$, $\log \eta > 0$).
Ред.

занималъ въ кругѣ. Новыя координаты точки P представляютъ слѣдующія функціи аргумента Φ:

$$X = \frac{e^{\Phi} + e^{-\Phi}}{\sqrt{2}}; \quad Y = \frac{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}{\sqrt{2}}.$$

4) Остается только уменьшить весь чертежъ въ отношеніи $1 : \sqrt{2}$, чтобы полуось гиперболы стала равна 1 вмѣсто $\sqrt{2}$, подобно тому какъ раньше радіусъ круга равнялся 1. Теперь, вполнѣ соотвѣтственно тому, что мы имѣли выше, площадь сектора, о которомъ идетъ рѣчь, равна $\frac{1}{2}\Phi$; обозначая новыя координаты

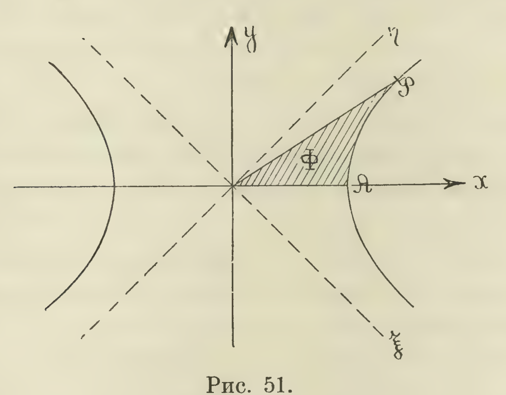


Рис. 51.

снова черезъ x, y, находимъ, что онѣ равны слѣдующимъ функціямъ аргумента Φ:

$$x = \frac{e^{\Phi} + e^{-\Phi}}{2}, \quad y = \frac{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}{2},$$

которыя удовлетворяютъ такому соотношенію (уравненію гиперболы):

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Этимъ функціямъ дано названіе гиперболическаго косинуса и синуса; ихъ обозначаютъ черезъ

$$x = \mathfrak{Cos}\,\Phi = \frac{e^{\Phi} + e^{-\Phi}}{2}; \quad y = \mathfrak{Sin}\,\Phi = \frac{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}{2}.$$

Результатъ, къ которому мы пришли, сводится къ слѣдующему. Если поступать съ кругомъ радіуса 1 и съ равносторонней гиперболой, полуось которой равна 1, совершенно одинаково, то въ первомъ случаѣ мы придемъ къ обыкновеннымъ гоніометрическимъ функціямъ, а во второмъ — къ гиперболическимъ функціямъ, которыя вполнѣ соотвѣтствуютъ однѣ другимъ.

Какъ вамъ извѣстно, примѣненіе этихъ функцій $\mathfrak{Cos}$ и $\mathfrak{Sin}$ часто бываетъ полезно. Но тѣмъ не менѣе въ данномъ случаѣ, въ примѣненіи къ изслѣдованію гиперболы, мы, въ сущности, сдѣлали шагъ назадъ: между тѣмъ какъ раньше мы могли раціонально представить координаты ξ, η съ помощью одной только функціи e^{Φ}, теперь намъ необходимы для этого двѣ функціи, связанныя между собой алгебраическимъ соотношеніемъ (уравненіемъ гиперболы). Поэтому представляется естественнымъ поступить обратно, именно развить ученіе о гоніометрическихъ функціяхъ совершенно аналогично тому, какъ мы раньше опредѣлили логариѳмъ, исходя отъ гиперболы. Сдѣлать это очень легко, если только не бояться перехода черезъ комплексныя величины; приходится ввести только одну основную функцію, посредствомъ которой $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ выражаются раціональнымъ образомъ, подобно тому какъ $\mathfrak{Cos}\,\Phi$ и $\mathfrak{Sin}\,\Phi$ выражаются черезъ e^{Φ}; она призвана поэтому играть въ теоріи гоніометрическихъ функцій центральную роль.

1) Для этого мы прежде всего вводимъ въ уравненіе круга $x^2+y^2=1$ (гдѣ $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$) новыя координаты

$$x-iy=\xi, \quad x+iy=\eta,$$

послѣ чего уравненіе принимаетъ видъ

$$\xi.\eta=1.$$

2) Искомой центральной функціей является — подобно тому, какъ было въ случаѣ гиперболы (см. пунктъ 2 на стр. 270), — вторая координата; обозначая ее черезъ $f(\varphi)$, находимъ на основаніи уравненій преобразованія:

$$\eta=f(\varphi)=\cos\varphi+i\sin\varphi, \quad \xi=\frac{1}{f(\varphi)}=\cos\varphi-i\sin\varphi.$$

3) На основанiи послѣднихъ равенствъ находимъ, что

$$\cos\varphi = \frac{\xi+\eta}{2} = \frac{f(\varphi)+(f(\varphi))^{-1}}{2}, \sin\varphi = \frac{-\xi+\eta}{2i} = \frac{f(\varphi)-(f(\varphi))^{-1}}{2i}$$

чѣмъ достигается полная аналогiя съ прежними соотношенiями между $\mathfrak{Cos}\,\Phi$, $\mathfrak{Sin}\,\Phi$, e^{Φ}. Если такимъ образомъ заранѣе вскрыть аналогiю между круговыми и гиперболическими функцiями, то великое открытiе Эйлера, выражаемое формулой $f(\varphi) = e^{i\varphi}$, теряетъ характеръ поразительной неожиданности.

Не является ли возможнымъ подобное сведенiе функцiй $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ къ одной основной функцiи и въ томъ случаѣ, если оставаться въ вещественной области? Къ этому, дѣйствительно, можно придти, если взглянуть на наши фигуры съ точки зрѣнiя проективной геометрiи. А именно, можно въ случаѣ гиперболы ту координату η, которая доставила намъ основную функцiю, опредѣлить, какъ параметръ въ пучкѣ параллелей $\eta = \text{const.}$, который, будучи разсматриваемъ съ проективной точки зрѣнiя въ его отношенiи къ гиперболѣ, представляетъ не что иное, какъ пучекъ лучей съ вершиной въ одной изъ точекъ гиперболы (здѣсь — какъ разъ въ одной изъ безконечно удаленныхъ точекъ). Разсматривая въ случаѣ круга или гиперболы, вообще, параметръ какого-нибудь такого пучка, какъ функцiю площади, мы придемъ къ другой основной функцiи,— тоже оставаясь въ вещественной области.

Разсмотримъ для этого въ случаѣ круга пучекъ, проходящiй черезъ точку $S(-1\,|\,0)$:

$$y = \lambda(x+1),$$

гдѣ λ означаетъ параметръ (рис. 52); выше (стр. 70 и 71) мы уже вычислили координаты точки пересѣченiя P луча, принадлежащаго параметру λ, съ окружностью, а именно мы нашли, что

$$x = \cos\varphi = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \quad y = \sin\varphi = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2},$$

такъ что

$$\lambda = \lambda(\varphi) = \frac{y}{x+1}$$

дѣйствительно представляетъ собой нужную намъ вещественную основную функцію. А такъ какъ, съ другой стороны, уголъ $PSO = \frac{1}{2} POA$ и $POA = \varphi$, то отсюда непосредственно вытекаетъ, что $\lambda = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$; этимъ однозначнымъ выраженіемъ функцій $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ черезъ $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ очень часто пользуются при тригонометрическихъ вычисленіяхъ. Соотношеніе функціи λ съ прежней основной функціей $f(\varphi)$ получается изъ послѣдней формулы въ такомъ видѣ:

$$\lambda = \frac{y}{x+1} = \frac{1}{i} \cdot \frac{f - f^{-1}}{f + f^{-1} + 2} = \frac{1}{i} \frac{f^2 - 1}{f^2 + 1 + 2f} = \frac{1}{i} \frac{f(\varphi) - 1}{f(\varphi) + 1}$$

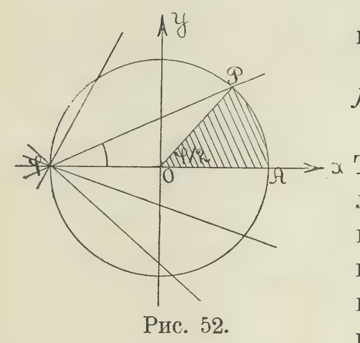


Рис. 52.

или наоборотъ:

$$f(\varphi) = x + iy = \frac{1 - \lambda^2 + 2i\lambda}{1 + \lambda^2} = \frac{1 + i\lambda}{1 - i\lambda}.$$

Такимъ образомъ введеніе величины λ сводится въ конечномъ счетѣ попросту къ установленію нѣкоторой дробно-линейной функціи отъ $f(\varphi)$, которая имѣетъ вещественное значеніе вдоль вещественной окружности круга; хотя благодаря этому формулы становятся вещественными, но зато онѣ не столь простыя, какъ при непосредственномъ примѣненіи функціи $f(\varphi)$.

Стоитъ ли покупать преимущество вещественности цѣной такого недостатка, — это зависитъ, конечно, отъ того, насколько то или иное лицо умѣетъ обращаться съ комплексными величинами. По этому поводу я замѣчу только, что физики давно уже перешли къ употребленію мнимыхъ величинъ, въ особенности же въ оптикѣ, когда приходится имѣть дѣло съ уравненіями коле-

бательныхъ движеній. Съ другой стороны, техники — и прежде всего электротехники съ ихъ векторъ-діаграммами — тоже начинаютъ въ послѣднее время съ успѣхомъ пользоваться комплексными величинами. Такимъ образомъ, можно утверждать, что примѣненіе комплексныхъ величинъ начинаетъ, наконецъ, завоевывать права гражданства въ болѣе широкихъ кругахъ, хотя, конечно, въ настоящее время значительное большинство все еще крѣпко держится вещественной области.

Имѣя въ виду обозрѣть въ общихъ чертахъ дальнѣйшее развитіе теоріи гоніометрическихъ функцій, мы должны прежде всего упомянуть о теоремѣ сложенія.

1) Теорема сложенія выражается формулой:

$$\sin(\varphi+\psi)=\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi$$

и аналогичной формулой для $\cos(\varphi+\psi)$. Причина того обстоятельства, что эти формулы выглядятъ сравнительно сложнѣе, чѣмъ въ случаѣ показательной функціи, заключается, конечно, въ томъ, что здѣсь мы имѣемъ дѣло не съ основной элементарной функціей; для этой послѣдней функціи: $f(\varphi)=\cos\varphi+i\sin\varphi$ получается совершенно такая же крайне простая формула, какъ и для e^{φ}:

$$f(\varphi+\psi)=f(\varphi)\cdot f(\psi).$$

2) Отъ формулы сложенія мы приходимъ къ выраженіямъ функцій для кратныхъ угловъ и для частей угла, изъ числа которыхъ я отмѣчу только двѣ слѣдующія формулы, игравшія большую роль при вычисленіи первыхъ тригонометрическихъ таблицъ:

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}},\quad \cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}.$$

Изящное выраженіе всѣхъ соотношеній, имѣющихъ здѣсь мѣсто, даетъ такъ называемая „формула Моавра“:

$$f(n\,.\,\varphi)=(f(\varphi))^n,\ \text{гдѣ}\ f(\varphi)=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Моавръ (Moivre) былъ французъ, но жилъ въ Лондонѣ въ кругу Ньютона; свою формулу онъ опубликовалъ въ 1730 году въ книгѣ „Miscellanea analytica“.

3) Исходя изъ нашего первоначальнаго опредѣленія $y = \sin\varphi$, можно, разумѣется, легко получить выраженіе обратной функціи: $\varphi = \sin^{-1} y$ въ видѣ интеграла. Секторъ $\frac{\varphi}{2}$ (AOP) круга радіуса 1, вмѣстѣ съ горизонтально заштрихованнымъ треугольникомъ $OP'P$, ограниченъ параллелями къ оси абсциссъ $y=0$ и y и кривой $x = \sqrt{1-y^2}$ и имѣетъ поэтому площадь, равную $\int\limits_0^y \sqrt{1-y^2}\,dy$ (рис. 53); а такъ какъ упомянутый треугольникъ имѣетъ площадь $\frac{1}{2} OP' \cdot PP' = \frac{1}{2} y \sqrt{1-y^2}$, то

$$\int\limits_0^y \sqrt{1-y^2}\,dy = \frac{1}{2} y \sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}\varphi.$$

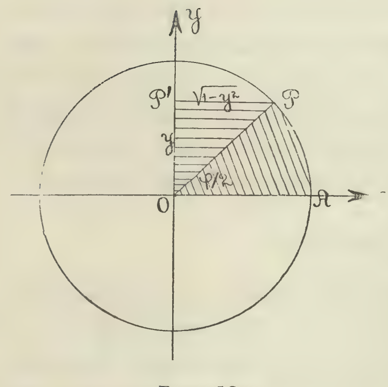


Рис. 53.

Отсюда находимъ посредствомъ простого преобразованія:

$$\varphi = \sin^{-1} y = \int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Поступая теперь совершенно такъ же, какъ мы поступали въ случаѣ логариѳма, а именно разлагая подъинтегральное выраженіе въ рядъ по теоремѣ бинома и примѣняя затѣмъ, по идеѣ Меркатора, почленное интегрированіе, можно найти разложеніе $\sin^{-1} y$ въ степенной рядъ, а изъ него вывести, пользуясь методомъ обращенія рядовъ, рядъ для самого синуса; такъ именно, — я уже говорилъ объ этомъ выше, — поступилъ самъ Ньютонъ.

4) Я больше склоненъ воспользоваться здѣсь болѣе краткимъ путемъ, который сталъ возможенъ благодаря великому открытію, сдѣланному Тейлоромъ. Для этого изъ упомянутаго интегральнаго выраженія выводимъ сперва величину производной для самого синуса:

$$\frac{d\sin\varphi}{d\varphi} = \frac{dy}{d\varphi} = \sqrt{1-y^2} = \cos\varphi;$$

совершенно аналогично находимъ:

$$\frac{d\cos\varphi}{d\varphi} = -\sin\varphi.$$

Отсюда на основанiи теоремы Тейлора получаемъ разложенiя:

$$\sin\varphi = \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \cdots;$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \cdots$$

Нетрудно видѣть, что эти ряды сходятся для всякаго конечнаго, даже комплекснаго, значенiя x, такъ что $\sin x$ и $\cos x$ опредѣляются ими, какъ однозначныя цѣлыя трансцендентныя функцiи во всей комплексной плоскости.

5) Сравнивая эти ряды съ рядомъ для e^{φ}, находимъ, что основная функцiя

$$f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

Такой выводъ безъ оговорки становится возможнымъ только послѣ того, какъ мы убѣдились, что $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ такъ же, какъ и e^{φ}, представляютъ собой однозначныя цѣлыя функцiи.

6) Остается описать ходъ измѣненiя *комплексныхъ* функцiй $\sin w$, $\cos w$. Съ этой цѣлью я прежде всего замѣчу, что каждая изъ обратныхъ функцiй $w = \sin^{-1} z$ и $w = \cos^{-1} z$ даетъ поверхность Римана съ безконечнымъ числомъ листовъ и съ мѣстами развѣтвленiя $-1, +1, \infty$, а именно надъ точками $z = \pm 1$ лежитъ по безконечному числу точекъ развѣтвленiя перваго порядка, а надъ точкой $z = \infty$ находятся двѣ точки развѣтвленiя безконечно высокаго порядка. Чтобы лучше выяснить расположенiе листовъ, разсмотримъ снова подраздѣленiе плоскости w на области, соотвѣтствующiя верхней (заштрихованной) и нижней (незаштрихованной) полуплоскости z (рис. 54). Для $z = \cos w$ это подраздѣленiе получается съ помощью вещественной оси и параллелей къ мнимой оси, проходящихъ черезъ точки $w = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$; при этомъ, какъ видно изъ чертежа, получаются треугольныя обла-

сти, которыя всѣ простираются до безконечности; ихъ приходится попеременно заштриховывать и оставлять чистыми. Въ точкахъ $w = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, соотвѣтствующихъ $y = +1$, и въ точкахъ $w = \pm \pi, \pm 3\pi, \ldots$, соотвѣтствующихъ $y = -1$, встрѣчается по 4 треугольника, соотвѣтственно четыремъ полулистамъ поверхности Римана, которые сходятся въ каждой изъ точекъ развѣтвленія, лежащихъ надъ мѣстами $z = \pm 1$. Къ значенію $z = \infty$ функція $\cos w$ приближается сколь угодно близко всякій



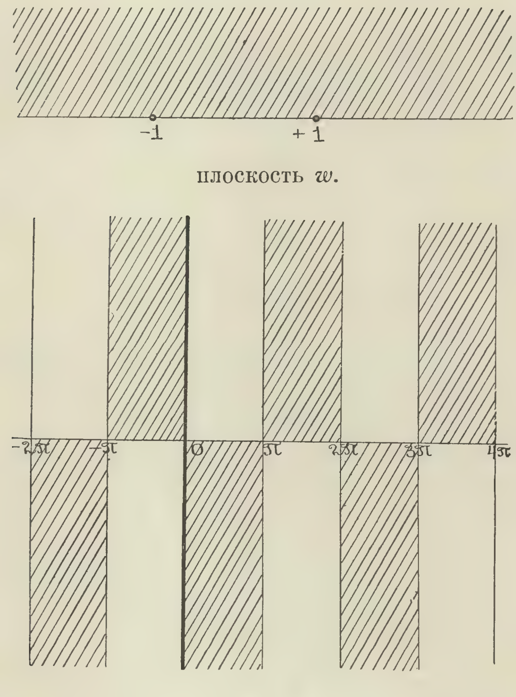


Рис. 54.

разъ, какъ мы удаляемся внутри одного какого-нибудь треугольника вверхъ или внизъ до безконечности. Дѣйствительно, двѣ отдѣльныя системы, состоящія каждая изъ безконечнаго числа треугольниковъ, простираются въ безконечность въ соотвѣтствіи съ тѣмъ обстоятельствомъ, что на Римановой поверхности въ точкѣ ∞ сходятся двѣ отдѣльныя системы изъ безконечнаго числа листовъ каждая. Въ случаѣ $z = \sin w$ дѣло обстоитъ совершенно анало-

гично, съ тою только разницей, что чертежъ въ плоскости w слѣдуетъ представить себѣ передвинутымъ на $\frac{\pi}{2}$ вправо. На этихъ чертежахъ находятъ подтвержденіе сдѣланныя нами выше (по поводу теоремы Пикара) указанія относительно природы существенно особенной точки $w = \infty$ (стр. 263).

2. Тригонометрическія таблицы.

На этомъ я закончу краткій обзоръ теоріи гоніометрическихъ функцій и перейду къ разсмотрѣнію того, что наиболѣе важно на практикѣ, а именно тригонометрическихъ таблицъ. Одновременно съ этимъ я буду говорить о таблицахъ логариѳмовъ, разсмотрѣніе которыхъ я до сихъ поръ откладывалъ въ виду того, что составленіе этихъ послѣднихъ съ самаго начала и до нашихъ дней идетъ рука объ руку съ составленіемъ тригонометрическихъ таблицъ. Вопросъ о томъ, какимъ образомъ таблицы логариѳмовъ получили свой теперешній видъ, представляется, конечно, весьма важнымъ и интереснымъ и для школьнаго преподавателя математики. Разумѣется, я не могу здѣсь подробно изложить всю крайне продолжительную исторію развитія таблицъ; я хочу только отмѣтить нѣкоторые наиболѣе замѣчательные моменты, чтобы дать вамъ приблизительное понятіе объ этомъ развитіи. Относительно другихъ, тоже часто весьма важныхъ произведеній, которыя дополняютъ общую картину, вы сможете оріентироваться съ помощью сочиненія Тропфке*) или весьма подробныхъ указаній въ рефератѣ Мемке (Mehmke)*) о числовыхъ вычисленіяхъ (Encykl., I., F.).

A. Чисто тригонометрическія таблицы.

Подъ этимъ названіемъ мы разумѣемъ таблицы, которыя были построены до изобрѣтенія логариѳмовъ. Такія таблицы существовали уже въ древности, а именно — первой дошедшей до насъ является таблица Птолемея.

1) Это такъ называемая таблица хордъ Птолемея, которую послѣдній составилъ ради астрономическихъ цѣлей около 150-го года послѣ Р. Хр. Она помѣщена въ его сочиненіи „Megale Syntaxis“, въ которомъ Птолемей разви-

*) См. примѣчанія на стр. 24 и 41. *Ред.*

ваетъ названную его именемъ систему міра; эту книгу вы видите здѣсь въ новомъ изданіи *). Это сочиненіе дошло до насъ окольнымъ путемъ черезъ руки арабовъ подъ часто употребляемымъ названіемъ „Almagest", которое, быть можетъ, получилось изъ соединенія арабскаго члена „al" съ извращеннымъ греческимъ названіемъ. Эта таблица Птолемея даетъ для угловъ съ интервалами въ 30 минутъ не самый синусъ угла a, а соотвѣтствующую этому углу хорду $\left(\text{т. е. } 2 . \sin\frac{a}{2}\right)$. Значенія хордъ даны здѣсь въ трехзначныхъ шестидесятиричныхъ дробяхъ, другими словами въ видѣ $\frac{a}{60}+\frac{b}{3600}+\frac{c}{216000}$, гдѣ a, b, c представляютъ цѣлыя числа отъ нуля до 59. Для насъ самымъ труднымъ является то обстоятельство, что эти числа a, b, c написаны, разумѣется, греческими числовыми знаками, т. е. посредствомъ сочетаній греческихъ буквъ. Далѣе мы находимъ здѣсь еще значенія разностей, которыя позволяютъ производить интерполяцію отъ минуты до минуты. Впрочемъ, Тропфке даетъ для примѣра (Bd. II, S. 296) переводъ отрывка изъ этой таблицы на современный способъ обозначеній, въ которомъ вы сможете ближе оріентироваться. Что же касается до вычисленія этой таблицы, то Птолемей, во всякомъ случаѣ, пользовался приведенной выше формулой для $\sin\frac{a}{2}$ (слѣдовательно, онъ примѣнялъ извлеченіе корня) и интерполяціей.

2) Перенесемся теперь на тысячу лѣтъ далѣе — къ тому времени, когда тригонометрическія таблицы были вычислены впервые на Западѣ. Здѣсь прежде всего приходится назвать Регіомонтана (Regiomontanus, 1436 — 1476), который собственно назывался Іоганномъ Мюллеромъ, а свое латинское имя получилъ по названію города Кёнигсберга (у Гильдбургаузена), въ которомъ онъ родился. Онъ вычислилъ различныя тригонометрическія таблицы, въ которыхъ ясно виденъ переходъ отъ остатковъ 60-тиричной системы къ чистой десятиричной системѣ. Въ то время тригонометри-

*) Ed. Heiberg. Leipzig 1898/1903.

ческихъ линій не изображали, какъ теперь, въ видѣ дробей, принимая радіусъ за 1, но вычисляли ихъ для окружностей очень большого радіуса, такъ что можно было — съ не меньшей точностью — ограничиваться выраженіемъ ихъ въ цѣлыхъ числахъ. Эти большія числа уже тогда писали по десятиричной системѣ, но въ выборѣ радіуса еще долгое время слышались отзвуки 60-тиричной системы. Такъ, въ одной таблицѣ Регіомонтана радіусъ считается равнымъ 6000000; но въ другой таблицѣ впервые радіусъ равенъ чистому десятичному числу 10000000, благодаря чему все вычисленіе оказалось построеннымъ по чистой десятиричной системѣ. Достаточно вставить запятую, чтобы число этой таблицы превратилось въ нашу десятичную дробь. Эти таблицы Регіомонтана были напечатаны лишь много спустя послѣ его смерти, а именно въ сочиненіи его учителя Пейрбаха „Трактатъ о предложеніяхъ Птолемея относительно синусовъ и хордъ“ *). Обратите вниманіе на то, что и это сочиненіе, какъ и многія другія капитальныя математическія изданія — изъ нихъ намъ уже извѣстны произведенія Кардана и Штифеля, а дальше мы познакомимся и съ другими — были отпечатаны въ сороковыхъ годахъ XVI-го столѣтія въ Нюрнбергѣ. Самъ Регіомонтанъ провелъ большую часть жизни въ Нюрнбергѣ.

3) Теперь я предложу вашему вниманію книгу, имѣвшую огромное значеніе вообще, а именно сочиненіе Николая Коперника „De revolutionibus orbium coelestium“ **), въ которомъ развита „Коперникова система міра“. Коперникъ (Koppernikus) жилъ отъ 1473 г. до 1543 г. въ Торнѣ; но упомянутое сочиненіе появляется снова въ Нюрнбергѣ, всего лишь черезъ два года послѣ появленія таблицъ Регіомонтана, съ которыми Коперникъ тогда еще не былъ знакомъ; поэтому для осуществленія своей теоріи онъ долженъ былъ самъ вычислить небольшую таблицу синусовъ.

4) Но эти таблицы ни въ коемъ случаѣ не могли удовлетворить потребности астрономовъ, и вотъ мы видимъ, что одинъ ученикъ и другъ Коперника вскорѣ приступаетъ къ осуще-

*) G. Peurbach, „Tractatus super propositiones Ptolemaei de sinubus et chordis“. Norimbergae, ap. Jo. Petreium. 1541.

**) Norimbergae, ap. Jo. Petreium. 1543.

ствленію гораздо шире задуманнаго дѣла. Это — Рэтикусъ (Rhaeticus), что тоже представляетъ искусно латинизированное указаніе на этотъ разъ его родной страны (Voralberg). Онъ жилъ съ 1514 г. по 1596 г. и былъ профессоромъ въ Виттенбергѣ. Во всемъ этомъ обзорѣ вы всегда должны принимать во вниманіе общеисторическую обстановку; такъ, въ данномъ случаѣ мы находимся въ эпоху реформаціи, во время которой, какъ извѣстно, Виттенбергъ, а также свободный имперскій городъ Нюрнбергъ стали главными центрами умственной жизни. Но постепенно въ теченіе реформаціонныхъ войнъ центръ тяжести политической и духовной жизни передвигается все болѣе отъ городовъ къ княжескимъ дворамъ, и вотъ въ то время, какъ до сихъ поръ все печаталось въ Нюрнбергѣ, обширныя таблицы Рэтикуса появляются на свѣтъ въ Гейдельбергѣ при денежной поддержкѣ пфальцскаго курфюрста; соотвѣтственно этому они получаютъ названіе „Opus palatinum“ (Heidelbergae 1596). Онѣ появились лишь вскорѣ послѣ смерти Рэтикуса. Эти таблицы гораздо полнѣе предыдущихъ; въ нихъ содержатся значенія тригонометрическихъ линій для каждыхъ 10″ въ десятизначныхъ дробяхъ; правда, въ нихъ встрѣчается еще довольно много ошибокъ.

5) Въ весьма усовершенствованномъ видѣ переиздалъ эти таблицы Питискусъ (Pitiscus) изъ Грюнберга въ Шлезіи (1561 — 1613), капланъ пфальцскаго курфюрста. Снова отпечатанныя на средства князя подъ названіемъ „Thesaurus mathematicus“ *), эти таблицы содержатъ тригонометрическія числа для интерваловъ въ 10″ съ 15 десятичными знаками. Онѣ въ гораздо большей степени свободны отъ ошибокъ и изданы лучше, чѣмъ таблицы Рэтикуса.

Мы должны имѣть въ виду, что всѣ эти таблицы вычислены съ помощью одной только формулы для половины дуги и интерполяціи, такъ какъ тогда еще не были извѣстны безконечные ряды для синуса и косинуса. Только принимая это во вниманіе, мы сможемъ въ надлежащей мѣрѣ оцѣнить то невѣроятное усердіе и ту работу, которыя вложены въ эти почтенныя произведенія.

---

*) Francofurtii 1613.

Къ этимъ таблицамъ уже непосредственно примыкаютъ новыя таблицы, соединяющія тригонометрическія данныя съ логариѳмическими.

В. Логариѳмо-тригонометрическія таблицы.

Здѣсь мы наблюдаемъ удивительное совпаденіе,—въ извѣстной степени какъ бы иронію исторіи: всего лишь годъ спустя послѣ того, какъ въ рукахъ Питискуса таблицы тригонометрическихъ линій достигли извѣстнаго совершенства,—появляются впервые таблицы логариѳмовъ, дѣлающія первыя, собственно говоря, излишними, такъ какъ теперь уже нужны не самые синусы и косинусы, а ихъ логариѳмы. Прежде всего приходится назвать уже упомянутыя мною первыя таблицы логариѳмовъ:

1) „Mirifici logarithmorum canonis descriptio" Непера (1614). При этомъ Неперъ до такой степени имѣлъ въ виду прежде всего облегченіе тригонометрическихъ вычисленій, что сперва далъ даже не логариѳмы натуральныхъ чиселъ, а семизначные логариѳмы тригонометрическихъ линій для каждой минуты.

2) Впервые придалъ таблицамъ логариѳмовъ ихъ обычную теперь форму англичанинъ Генри Бриггъ*) (Henry Briggs, 1556—1630), находившійся въ личныхъ отношеніяхъ съ Неперомъ. Онъ понялъ, какое громадное преимущество имѣютъ для практическихъ вычисленій логариѳмы съ основаніемъ 10, болѣе родственные нашему десятиричному письменному счисленію, и ввелъ поэтому это основаніе вмѣсто Неперова. Такимъ образомъ получились „искусственные логариѳмы", называемые также „бригговыми". Кромѣ того, Бриггъ даетъ и логариѳмы натуральныхъ чиселъ, (а не только логариѳмы гоніометрическихъ функцій). Эти нововведенія находятся въ его „Aritmetica logarithmica" (Londini 1624). Правда, Бриггъ не успѣлъ закончить всѣхъ вычисленій и даетъ только логариѳмы цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 20000 и отъ 90000 до 100000, но зато съ 14 знаками. Замѣчательно, что именно въ наиболѣе старыхъ таблицахъ содержится наибольшее число десятичныхъ знаковъ, между тѣмъ какъ въ новое

*) Установившаяся русская транскрипція Бриггъ. а не Бриггсъ, происходитъ отъ латинской транскрипціи Briggius. *Ред.*

время въ большинствѣ случаевъ довольствуются весьма малымъ числомъ знаковъ; къ этому я еще вернусь. Бриггъ вычислилъ также искусственные логариѳмы тригонометрическихъ линій для промежутковъ въ 10″ съ 10 знаками и опубликовалъ въ своей „Trigonometria britannica“ (Gondae 1633).

3) Пропускъ въ таблицахъ Бригга заполнилъ впервые голландецъ Адріанъ Влаккъ (Adrian Vlacq), жившій въ Гудѣ близъ Лейдена — математикъ, типографъ и книгопродавецъ. Онъ отпечаталъ второе изданіе таблицъ Бригга *), заключавшее на этотъ разъ логариѳмы всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 100000, но только съ 10 десятичными знаками. Это изданіе является основой всѣхъ нашихъ теперешнихъ таблицъ.

Что же касается дальнѣйшаго развитія таблицъ, то я могу дать только самыя общія указанія относительно того, въ чемъ заключалось дальнѣйшее развитіе ихъ по сравненію съ указанными первыми шагами.

a) Прежде всего существенное значеніе имѣлъ прогрессъ теоріи, а именно логариѳмическіе ряды дали новое, крайне практичное, средство для вычисленія логариѳмовъ. Объ этомъ вычислители первыхъ таблицъ не знали ничего. Неперъ, какъ мы видѣли, вычислялъ свои логариѳмы съ помощью разностнаго уравненія, — другими словами, посредствомъ послѣдовательнаго прибавленія $\frac{\Delta x}{x}$, пользуясь при этомъ въ большой степени интерполяціей. У Бригга самую важную роль играло извлеченіе квадратныхъ корней; онъ пользуется тѣмъ, что, зная $\log a$ и $\log b$, можно найти $\log \sqrt{a\,.\,b}$ по формулѣ

$$\log \sqrt{a\,.\,b} = \frac{1}{2}\left(\log a + \log b\right)$$

Этимъ же самымъ пріемомъ пользовался и Влаккъ (Vlacq).

b) Значительные успѣхи были достигнуты путемъ болѣе цѣлесообразнаго расположенія таблицъ, которое

*) Henr. Briggii Arithmetica logarithmica. Ed. sec. aucta per Adr. Vlacq. Gondae 1628.

дало возможность помѣстить больше матеріала на меньшемъ пространствѣ и въ формѣ, болѣе доступной обозрѣнію.

c) Но, что важнѣе всего, значительно возросла правильность таблицъ благодаря тому, что ошибки, которыя еще часто попадались въ старинныхъ таблицахъ, особенно въ послѣднихъ десятичныхъ знакахъ, были устранены при помощи внимательной провѣрки.

Изъ большого числа возникшихъ такимъ образомъ таблицъ я назову только самыя извѣстныя.

4) „Thesaurus logarithmorum completus“ („Полное собраніе большихъ логариѳмо-тригонометрическихъ таблицъ“), изданныя австрійскимъ артиллерійскимъ офицеромъ Вега (Vega) въ 1794 году въ Лейпцигѣ. Оригинальное изданіе стало библіографической рѣдкостью, но въ 1896 году во Флоренціи появился фототипный перепечатокъ. Эти таблицы содержатъ 10-значные логариѳмы натуральныхъ чиселъ и тригонометрическихъ линій, расположенные по способу, ставшему съ тѣхъ поръ типичнымъ; такъ, вы видите, напримѣръ, здѣсь уже маленькія таблички разностей, предназначенныя для облегченія интерполированія.

Переходя къ XIX столѣтію, мы замѣчаемъ широкое популяризированіе логариѳмовъ, стоящее въ связи, во-первыхъ, съ тѣмъ, что въ двадцатыхъ годахъ логариѳмы были введены въ школу, а во-вторыхъ—съ тѣмъ, что логариѳмы находятъ все больше и больше примѣненій въ практикѣ физиковъ и техниковъ. При этомъ пришлось, конечно, согласиться на значительное сокращеніе числа знаковъ, такъ какъ и школа и практика нуждались въ таблицахъ, не слишкомъ объемистыхъ; къ тому же 3 или 4 десятичныхъ знака представляютъ точность, вполнѣ достаточную въ большинствѣ случаевъ. Правда, въ мое школьное время мы пользовались еще семизначными таблицами; въ то время въ защиту употребленія такого числа знаковъ приводили то соображеніе, что ученики должны благодаря этому проникнуться „величіемъ чиселъ“. Теперь всѣ настроены утилитарно и всюду пользуются трехзначными, четырехзначными или, самое большее, пятизначными таблицами. Здѣсь вы

видите три взятыхъ наудачу современныхъ изданія таблицъ. Одна изъ нихъ — небольшія таблицы Шуберта*) съ 4 знаками; въ нихъ вы находите примѣненіе всевозможныхъ вспомогательныхъ средствъ, какъ, напримѣръ, печатаніе въ двѣ краски, повтореніе надписей вверху и внизу каждой страницы и тому подобное, — все это для того, чтобы по возможности устранить недоразумѣнія при пользованіи таблицами. Еще остроумнѣе устроены новыя американскія таблицы Гёнтингтона**), въ которыхъ, напримѣръ, страницы снабжены различными придатками и вырѣзами, позволяющими сразу открывать книгу на нужной страницѣ и т. д. Наконецъ, вы видите здѣсь счетную линейку, которая, какъ извѣстно, представляетъ не что иное, какъ трехзначную таблицу логариѳмовъ въ самой удобной формѣ механическаго счетнаго аппарата; вамъ всѣмъ, конечно, извѣстенъ этотъ инструментъ, который теперь всякій инженеръ всегда имѣетъ при себѣ для своихъ разсчетовъ.

Но мы еще не дошли, конечно, въ этомъ направленіи до конца и можемъ даже довольно ясно представить себѣ, въ чемъ будетъ состоять дальнѣйшее развитіе. А именно, въ послѣднее время все больше и больше распространяется счетная машина, о которой мы уже говорили; она дѣлаетъ излишними таблицы логариѳмовъ, такъ какъ она позволяетъ производить непосредственное умноженіе гораздо быстрѣе и увѣреннѣе. Правда, теперь еще счетныя машины настолько дороги, что ихъ могутъ пріобрѣтать только крупныя учрежденія; но когда онѣ станутъ значительно дешевле, тогда начнется новая фаза въ дѣлѣ вычисленій. Что же касается геніометріи, то только тогда будетъ отдано должное стариннымъ таблицамъ Питискуса, которыя тотчасъ послѣ своего появленія оказались устарѣлыми. Онѣ даютъ прямо тригонометрическія величины, съ которыми счетная машина позволитъ удобно обходиться, минуя окольный путь, ведущій черезъ логариѳмы.

Остается еще разсмотрѣть примѣненія гоніометрическихъ функцій.

---

*) Schubert, „Vierstellige Tafeln und Gegentafeln.“. (Samml. Goeschen. Leipzig 1898).

**) C. V. Huntington, „Four place tables“, abrigd. edit. (Cambridge Mass. 1907).

3. Примѣненія гоніометрическихъ функцій.

Здѣсь насъ интересуютъ:

A) Тригонометрія, которая вообще послужила поводомъ къ изобрѣтенію гоніометрическихъ функцій.

B) Механика, въ которой ученіе о небольшихъ колебаніяхъ представляетъ особенно обширную область ихъ примѣненія.

C) Изображеніе періодическихъ функцій посредствомъ тригонометрическихъ рядовъ, которое, какъ извѣстно, играетъ весьма важную роль въ самыхъ разнообразныхъ вопросахъ.

A. Тригонометрія, въ особенности сферическая тригонометрія.

Тригонометрія является весьма древней наукой; уже въ Египтѣ она достигла высокой степени развитія подъ вліяніемъ запросовъ двухъ важныхъ наукъ: геодезіи, нуждающейся въ ученіи о плоскихъ треугольникахъ, и астрономіи, нуждающейся въ ученіи о сферическихъ треугольникахъ. Существуетъ весьма обстоятельная монографія по исторіи тригонометріи, это — „Лекціи по исторіи тригонометріи“ Браунмюля*). Наилучшимъ справочнымъ изданіемъ относительно практической стороны тригонометріи служитъ „Учебникъ плоской и сферической тригонометріи“ Гаммера**), а относительно теоретической стороны — второй томъ „Энциклопедіи элементарной математики“ Вебера и Вельштейна***).

Характеръ настоящихъ лекцій не позволяетъ, конечно, дать систематическое изложеніе всей тригонометріи; это должно составить предметъ спеціальнаго курса; къ тому

*) A. v. Braunmühl: „Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie“, 2 B-de. Leipzig 1900 - 1903.

**) E. Hammer: „Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie“, Stuttgart 1906.

***) „Encyklopedie der element. Geometrie“, bearb. von H. Weber, J. Wellstein, W. Jacobsthal, 2 Aufl. Leipzig 1907. (Въ русскомъ переводѣ: „Энциклопедія элементарной математики“, томъ II, книга II).

же, вѣдь, здѣсь, въ Гёттингенѣ, практической тригонометріи удѣляется вполнѣ достаточно вниманія на обычныхъ лекціяхъ по геодезіи и сферической астрономіи. Я же хотѣлъ бы поговорить съ вами объ одной очень интересной главѣ теоретической тригонометріи, которая, несмотря на свою весьма глубокую древность, все еще не можетъ считаться вполнѣ законченной, такъ какъ она до сихъ поръ еще содержитъ много невыясненныхъ вопросовъ и проблемъ, сравнительно элементарнаго характера, обработка которыхъ не кажется мнѣ неблагодарнымъ трудомъ: я имѣю въ виду сферическую тригонометрію. Этотъ отдѣлъ какъ разъ разработанъ весьма обстоятельно въ книгѣ Вебера-Вельштейна, а именно — тамъ приняты во вниманіе тѣ идеи, которыя развилъ Студи (Study) въ своемъ фундаментальномъ сочиненіи: „Сферическая тригонометрія, ортогональныя подстановки и эллиптическія функціи“ *). Я попытаюсь представить вамъ обзоръ всѣхъ относящихся сюда теорій и, въ особенности, указать на вопросы, остающіеся доселѣ открытыми.

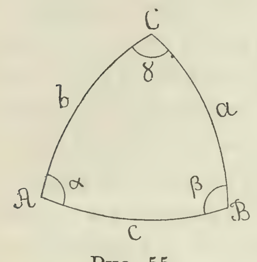


Рис. 55.

Элементарное понятіе о сферическомъ треугольникѣ врядъ ли нуждается съ подробныхъ разъясненіяхъ: три точки на сферѣ вполнѣ опредѣляютъ (если только никакія двѣ изъ нихъ не лежатъ на концахъ одного діаметра) треугольникъ, въ которомъ каждый изъ трехъ угловъ и каждая сторона заключается между 0 и π (рис. 55). Но при дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ оказывается цѣлесообразнымъ считать стороны и углы неограниченно перемѣнными величинами, которыя могутъ становиться даже больше π или 2π или кратныхъ 2π; тогда приходится говорить о сторонахъ, налагающихся на самихъ себя, и объ углахъ, дѣлающихъ по нѣ-

*) „Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen“, Abhandl. der math.-phys. Klasse der K. Sächsischen Gesellschaft d. Wissenschaften, Bd. XX, Nr. II (Leipzig 1893).

сколько оборотовъ около вершины. При этомъ приходится условиться относительно знака этихъ величинъ, т. е. относительно того направленія, въ которомъ ихъ надо измѣрять. Заслуга послѣдовательнаго проведенія принципа знаковъ, какъ вообще въ геометріи, такъ и въ сферической тригонометріи въ частности, принадлежитъ великому геометру Мöбіусу (Möbius). Благодаря этому принципу былъ впервые проложенъ путь для изслѣдованій наиболѣе общаго характера надъ величинами, неограниченно измѣняющимися. Особенное значеніе въ данномъ отношеніи имѣетъ статья Мöбіуса: „Выводъ основныхъ формулъ сферической тригонометріи въ возможно болѣе общей формѣ“ *).

Эти условія относительно знака начинаются съ того, что устанавливаютъ одно опредѣленное направленіе вращенія, при которомъ углы около всякой точки A на сферѣ считаются положительными; если это направленіе указано для одной какой-нибудь точки сферы, то это же самое направленіе переносятъ по принципу непрерывнаго измѣненія на всякую другую точку сферы (рис 56). Можно, напримѣръ, какъ обыкновенно дѣлаютъ, считать за положительное направленіе вращенія то, которое при наблюденіи съ внѣшней стороны представляется обратнымъ движенію часовой стрѣлки. Во-вторыхъ, необходимо установить для всякаго большого круга на сферѣ опредѣленное направленіе обхода, но здѣсь невозможно ограничиться установленіемъ опредѣленнаго направленія для одного какого-нибудь круга и затѣмъ непрерывно переходить ко всѣмъ другимъ кругамъ, такъ какъ каждый кругъ можно привести двумя существенно различными способами

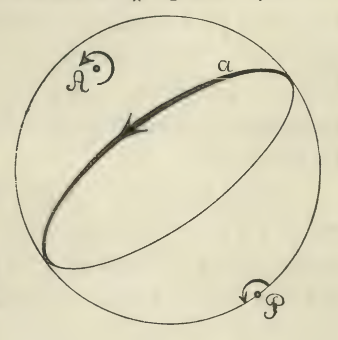


Рис. 56.

*) „Entwicklung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in grösstmöglicher Allgemeinheit“, Berichte über die Verhandl. der K. Sächs. Ges. d. Wiss., Math.-phys. Klasse. 1860. Bd. 12. = Ges. Werke II (Leipzig, 1886), pag. 71.

къ совмѣщенію со всякимъ другимъ кругомъ. Поэтому каждому кругу въ отдѣльности, съ которымъ намъ придется имѣть дѣло, мы будемъ приписывать опредѣленное направленіе обхода и будемъ разсматривать одинъ и тотъ же кругъ, какъ два различныхъ образа, смотря по тому, какое направленіе для него мы примемъ за положительное. Установивъ такія опредѣленія, мы можемъ каждому большому кругу a однозначно отнести опредѣленный полюсъ P, а именно тотъ изъ его двухъ полюсовъ въ обычномъ смыслѣ слова, изъ котораго его направленіе представляется положительнымъ; точно такъ же и обратно—каждому полюсу соотвѣтствуетъ однозначно опредѣленный „полярный кругъ" съ опредѣленнымъ направленіемъ обхода. Этимъ вполнѣ однозначно устанавливается столь важный въ тригонометріи „процессъ полярнаго преобразованія".

Если даны три какія-нибудь точки A, B, C на сферѣ, то (рис. 57) для однозначнаго опредѣленія сферическаго треугольника, имѣющаго вершины въ этихъ точкахъ, недостаетъ еще нѣкоторыхъ данныхъ; прежде всего необходимо присвоить каждому изъ трехъ большихъ круговъ, проходящихъ черезъ точки A, B, C, опредѣленное направленіе, а также нужно указать, сколько разъ слѣдуетъ каждый изъ нихъ обойти въ указанномъ для него направленіи, прежде, чѣмъ придти отъ B къ C, отъ C къ A, отъ A къ B. Опредѣленныя такимъ образомъ длины a, b, c, которыя могутъ имѣть любыя вещественныя значенія, называются сторонами сферическаго треугольника; мы, конечно, будемъ принимать, что онѣ отнесены къ сферѣ съ радіусомъ 1. При этомъ углы получаютъ такое опредѣленіе: уголъ α получается при такомъ вращеніи въ положительномъ направленіи, при которомъ положительное направленіе дуги CA, кончающейся въ A, переходитъ въ положительное направленіе дуги AB, начинающейся въ A; къ этому углу еще можно добавить въ видѣ слагаемаго любое кратное 2π; аналогично опре-

дѣляются и прочіе углы. Разсмотримъ обыкновенный элементарный треугольникъ, какъ указано на рис. 57, и установимъ направленія сторонъ такъ, чтобы величины сторонъ a, b, c были меньше π; тогда углы α, β, γ оказываются, согласно нашему новому опредѣленію, какъ это легко видѣть, внѣшними углами треугольника, а не его внутренними углами, какъ при обычномъ элементарномъ опредѣленіи.

Тотъ фактъ, что при такой замѣнѣ обычно принимаемыхъ угловъ ихъ дополненіями до π формулы сферической тригонометріи получаютъ болѣе симметричный и болѣе наглядный видъ, представляетъ давно извѣстное явленіе. Болѣе глубокую причину этого можно видѣть въ слѣдующемъ: указанный выше процессъ полярнаго преобразованія относитъ каждому треугольнику, опредѣленному согласно правиламъ Мёбіуса, вполнѣ однозначно другой треугольникъ, „полярный“ по отношенію къ первому, и нетрудно видѣть, что послѣдній при нашихъ новыхъ опредѣленіяхъ попросту имѣетъ углами стороны первоначальнаго треугольника, а сторонами его углы. Поэтому всякая формула, написанная въ этихъ обозначеніяхъ, должна имѣть мѣсто и въ томъ случаѣ, если мы въ ней обмѣняемъ мѣстами a, b, c съ α, β, γ, такъ что всегда должна имѣть мѣсто простая симметрія. При обычномъ элементарномъ измѣреніи угловъ и сторонъ эта простая симметричность не имѣетъ мѣста, такъ какъ соотношенія между даннымъ треугольникомъ и его полярнымъ треугольникомъ зависятъ отъ того, что́ считаютъ въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ за углы и стороны, и отъ выбора того или другого изъ двухъ полюсовъ круга, заданнаго безъ опредѣленнаго направленія обхода.

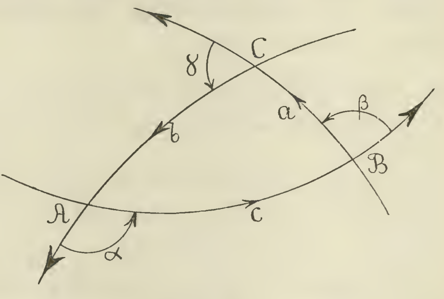


Рис. 57.

Ясно поэтому, что изъ 6 опредѣленныхъ такимъ образомъ элементовъ сферическаго треугольника только три можно измѣнять непрерывнымъ обра-

зомъ независимо одинъ отъ другого,—напримѣръ, двѣ стороны и заключенный между ними уголъ. Формулы сферической тригонометріи представляютъ собой извѣстное число соотношеній между этими 6 элементами или, вѣрнѣе, алгебраическихъ соотношеній между ихъ 12 косинусами и синусами; эти соотношенія позволяютъ произвольно измѣнять только три изъ этихъ 12 величинъ, тогда какъ другія 9 находятся въ алгебраической зависимости отъ первыхъ трехъ. При переходѣ къ косинусу и синусу мы перестаемъ, разумѣется, обращать вниманіе на то, какое именно кратное 2π служитъ дополнительнымъ слагаемымъ. Представляя себѣ вообще тригонометрію, какъ собраніе всевозможныхъ алгебраическихъ соотношеній такого рода; мы можемъ опредѣлить слѣдующимъ образомъ ея задачу въ соотвѣтствіи съ современными взглядами: станемъ разсматривать величины

$$x_1 = \cos a,\ x_2 = \cos b,\ x_3 = \cos c;\ x_4 = \cos \alpha,\ x_5 = \cos \beta,\ x_6 = \cos \gamma,$$
$$y_1 = \sin a,\ y_2 = \sin b,\ y_3 = \sin c;\ y_4 = \sin \alpha,\ y_5 = \sin \beta,\ y_6 = \sin \gamma,$$

какъ координаты точки въ пространствѣ 12-ти измѣреній R_{12}; совокупность всѣхъ тѣхъ точекъ этого пространства, которыя соотвѣтствуютъ дѣйствительно возможнымъ сферическимъ треугольникамъ $a, \ldots, \gamma$, составляетъ трехмѣрное алгебраическое многообразіе M_3 этого пространства R_{12}, и вотъ это именно многообразіе M_3 въ R_{12} и подлежитъ изученію. Этимъ сферическая тригонометрія включается въ общую аналитическую геометрію многомѣрныхъ пространствъ.

Это многообразіе M_3 должно обладать различными простыми симметріями. Такъ, напримѣръ, процессъ полярнаго преобразованія показалъ, что замѣна величинъ a, b, c величинами α, β, γ и обратно всегда даетъ новый сферическій треугольникъ; по отношенію къ нашимъ новымъ обозначеніямъ это значитъ, что изъ всякой точки въ M_3 можно получить другую точку, принадлежащую тоже M_3, если замѣнить x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 величинами x_4, x_5, x_6, y_4, y_5, y_6 и наоборотъ. Далѣе, всякому треугольнику соотвѣтствуетъ 7 смежныхъ треугольниковъ,

соотвѣтственно дѣленію всего пространства на 8 октантовъ плоскостями трехъ большихъ круговъ; элементы этихъ треугольниковъ получаются изъ элементовъ первоначальнаго треугольника посредствомъ перемѣны знака и прибавленія π; это даетъ для каждой точки комплекса M_3 7 новыхъ точекъ, координаты которыхъ $x_1, \ldots, y_6$ получаются посредствомъ перемѣны знака въ координатахъ исходной точки. Совокупность этихъ симметрій приводитъ, въ концѣ концовъ, къ нѣкоторой группѣ перестановокъ и перемѣнъ знака у координатъ точекъ R_{12}, которая преобразуетъ комплексъ M_3 въ самого себя*).

Наиболѣе важнымъ является вопросъ о тѣхъ алгебраическихъ уравненіяхъ, которымъ удовлетворяютъ координаты точекъ M_3 и которыя образуютъ совокупность тригонометрическихъ формулъ. Такъ какъ всегда $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, то это даетъ намъ прежде всего 6 квадратныхъ соотношеній:

$$x_i^2 + y_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, 6), \tag{1}$$

которыя, выражаясь геометрически, изображаютъ 6 цилиндрическихъ поверхностей втораго порядка $F^{(2)}$ въ многообразіи M_3.

Другія 6 формулъ даетъ теорема косинусовъ сферической тригонометріи, которая въ нашихъ обозначеніяхъ выражается такъ:

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c - \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos \alpha,$$

что̀ при полярномъ преобразованіи даетъ:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a.$$

*) Если нѣкоторая такая перестановка преобразовываетъ точку A многообразія M_3 въ точку B того же многообразія, а другая перестановка переводитъ точку B въ точку C того же многообразія, то послѣдовательное производство этихъ двухъ перестановокъ приводитъ точку A въ точку C того же многообразія M_3; это значитъ что совокупность этихъ перестановокъ такова, что послѣдовательное производство двухъ такихъ перестановокъ представляетъ собой также одну изъ этихъ перестановокъ; это и означаетъ, что перестановки образуютъ группу; то же относится къ надлежащимъ перемѣнамъ знаковъ и комбинаціямъ перестановокъ съ перемѣнами знаковъ. *Ред.*

Эти формулы вмѣстѣ съ тѣми четырьмя, которыя получаются при циклической перестановкѣ a, b, c и α, β, γ, опредѣляютъ въ общемъ 6 поверхностей третьяго порядка $F^{(3)}$ въ многообразіи M_3:

$$x_1 = x_2 x_3 - y_2 y_3 x_4; \quad x_2 = x_3 x_1 - y_3 y_1 x_5; \quad x_3 = x_1 x_2 - y_1 y_2 x_6; \quad (2)$$

$$x_4 = x_5 x_6 - y_5 y_6 x_1; \quad x_5 = x_6 x_4 - y_6 y_4 x_2; \quad x_6 = x_4 x_5 - y_4 y_5 x_3. \quad (3)$$

Наконецъ, можно еще использовать теорему синусовъ, которая получается, если приравнять нулю миноры слѣдующей матрицы:

$$\left| \begin{matrix} \sin a, & \sin b, & \sin c \\ \sin \alpha, & \sin \beta, & \sin \gamma \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} y_1, & y_2, & y_3 \\ y_4, & y_5, & y_6 \end{matrix} \right| .$$

Иначе говоря, эта теорема выражается равенствами:

$$y_2 y_6 - y_3 y_5 = y_3 y_4 - y_1 y_6 = y_1 y_5 - y_2 y_4 = 0. \quad (4)$$

Это даетъ 3 поверхности 2-го порядка $F^{(2)}$, изъ которыхъ, во всякомъ случаѣ, только 2 линейно независимы.—Такимъ образомъ, въ общемъ мы получили 15 уравненій для точекъ нашего многообразія M_3 въ пространствѣ R_{12}.

Для выдѣленія изъ R_{12} трехмѣрнаго пространства оказывается, вообще говоря, недостаточно имѣть $12 - 3 = 9$ уравненій, такъ какъ уже въ обыкновенной геометріи пространства R_3, какъ извѣстно, отнюдь не всякая кривая въ пространствѣ можетъ быть представлена, какъ полное пересѣченіе двухъ поверхностей; простѣйшимъ примѣромъ служитъ пространственная кривая третьяго порядка, для опредѣленія которой необходимы, по меньшей мѣрѣ, три уравненія. Такъ и въ нашемъ случаѣ легко видѣть, что 9 уравненій (1) и (2) еще не опредѣляютъ M_3; какъ извѣстно, изъ теоремы косинусовъ можно вывести теорему синусовъ, не считая одного знака, вопросъ о которомъ разрѣшаютъ затѣмъ при помощи геометрическихъ соображеній. Представляется желательнымъ знать, какія именно уравненія и въ какомъ числѣ опредѣляютъ вполнѣ наше многообразіе M_3. Вообще, я желалъ бы формулировать здѣсь 4 опредѣленныхъ вопроса, на которые, повидимому, въ литературѣ до сихъ поръ еще нѣтъ точнаго отвѣта; они заслуживаютъ, я думаю, подробнаго

изученія, которое къ тому же и не должно представить особеннаго труда, если только пріобрѣтена извѣстная сноровка въ обращеніи съ формулами сферической тригонометріи.

Вотъ эти вопросы:

1) Что надо понимать подъ „*порядкомъ*“ *многообразія* M_3?

2) *Каковы уравненія самой низкой степени, посредствомъ которыхъ можно представить многообразіе* M_3 *въ чистомъ видѣ?*

3) Какова *полная система независимыхъ уравненій, содержащихъ* M_3, т. е. такихъ уравненій $f_1 = 0, \ldots, f_n = 0$, изъ которыхъ всякое другое уравненіе, изображающее поверхность, проходящую черезъ M_3, можетъ быть составлено линейнымъ образомъ посредствомъ цѣлыхъ раціональныхъ множителей $m_1, \ldots, m_n$ въ видѣ: $m_1 f_1 + \cdots + m_n f_n = 0$. Для этого можетъ понадобиться больше уравненій, чѣмъ сколько требуетъ пунктъ 2).

4) Какія *алгебраическія тождества* (такъ *называемыя сизигіи* (Syzygieen)) имѣютъ мѣсто между этими n формами $f_1, \ldots, f_n$?

Во всѣхъ этихъ вещахъ можно оріентироваться съ помощью уже произведенныхъ изслѣдованій, которыя преслѣдуютъ ту же самую цѣль, хотя исходятъ изъ нѣсколько иной постановки вопроса. Эти изслѣдованія содержатся въ геттингенской диссертаціи госпожи *Chisholm* (теперь г-жи *Joung*), написанной въ 1894 году: „Algebraisch gruppentheoretische Untersuchungen zur sphärischen Trigonometrie“, Göttingen 1895. Это — первая диссертація въ Пруссіи, написанная женщиной. Среди различныхъ пріемовъ, примѣняемыхъ г-жей *Chisholm*, наиболѣе замѣчательный состоитъ въ томъ, что за *независимыя координаты она принимаетъ котангенсы половинъ угловъ и дугъ*; дѣйствительно, въ виду того, что основной функціей является $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, а, слѣдовательно, и $\operatorname{ctg}\frac{a}{2}$, и что черезъ нее однозначно выражаются $\cos a$ и $\sin a$, оказывается возможнымъ *записать всякое тригонометрическое равенство въ видѣ алгебраическаго соотношенія между*

$\operatorname{ctg}\frac{a}{2}, \cdots, \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$. *Поэтому сферическіе треугольники представляютъ теперь трехмѣрное алгебраическое многообразіе* M_3 *въ шестимѣрномъ пространствѣ* R_6, которое имѣетъ координатами $\operatorname{ctg}\frac{a}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{c}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$. Г-жа *Chisholm* показала, что это многообразіе M_3 имѣетъ *порядокъ*, равный 8, и что оно можетъ быть представлено, какъ *полное пересѣченіе трехъ поверхностей второго порядка* (квадратныхъ уравненій) въ пространствѣ R_6. Авторъ изслѣдуетъ еще дальнѣйшіе вопросы, которые примыкаютъ сюда же въ смыслѣ выше формулированной точки зрѣнія.

Тѣ формулы сферической тригонометріи, о которыхъ я до сихъ поръ говорилъ и которыя связываютъ синусы и косинусы сторонъ и угловъ, называютъ *формулами первой ступени*; имъ противопоставляютъ группу существенно другихъ формулъ подъ именемъ *формулъ второй ступени*. Эти формулы представляютъ собой *алгебраическія уравненія, которымъ подчинены тригонометрическія функціи половинъ угловъ и сторонъ*; поэтому при изученіи послѣднихъ представляется наиболѣе удобнымъ разсматривать 12 величинъ:

$$\cos\frac{a}{2},\ \sin\frac{a}{2}, \cdots,\ \cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\alpha}{2}, \cdots,$$

какъ координаты новаго *двѣнадцатимѣрнаго пространства* R'_{12}, въ которомъ сферическіе треугольники снова образуютъ трехмѣрное алгебраическое многообразіе M'_3. На первомъ мѣстѣ здѣсь стоятъ прежде всего тѣ *изящныя формулы*, которыя были опубликованы въ началѣ прошлаго столѣтія почти одновременно и независимо другъ отъ друга *Деламбромъ* (Delambre, 1807), *Молльвейде* (Mollweide, 1808) и, наконецъ, *Гауссомъ* (Gauss, 1809) въ его сочиненіи: „Theoria motus corporum coelestium“, № 54 (перепечатано въ „Werke“, Bd. VII, Leip-

zig 1906, pag. 67). Это — 12 формулъ, получаемыхъ посредствомъ круговой перестановки изъ формулъ:

$$\frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{a}{2}}=\pm\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}},\quad \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{a}{2}}=\mp\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{a}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\mp\frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}},\quad \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\pm\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Нѣчто существенное и новое по отношенію къ формуламъ первой ступени представляетъ здѣсь двойной знакъ, который надо понимать слѣдующимъ образомъ: для одного и того же треугольника имѣютъ мѣсто одновременно всѣ верхніе или всѣ нижніе знаки во всѣхъ 12 формулахъ; при этомъ оказывается, что существуютъ треугольники какъ того, такъ и другого рода. Такимъ образомъ, комплексъ M_3' сферическихъ треугольниковъ въ опредѣленномъ выше пространствѣ R_{12}' опредѣляется двумя совершенно различными системами, состоящими изъ 12 кубическихъ уравненій каждая, и распадается поэтому на два отдѣльныхъ алгебраическихъ многообразія: $\overline{M}_3$, для котораго имѣетъ мѣсто одинъ знакъ, и $\overline{\overline{M}}_3$, для котораго надо брать другой знакъ. Благодаря этому замѣчательному обстоятельству упомянутыя формулы пріобрѣтаютъ особенно важное значеніе въ теоріи сферическихъ треугольниковъ; онѣ представляютъ нѣчто гораздо большее, чѣмъ простое преобразованіе прежнихъ уравненій, годное — самое большее — для облегченія тригонометрическихъ вычисленій, какъ полагали Деламбръ и Моллькейде. Гауссъ первый взглянулъ на дѣло глубже; дѣйствительно, онъ указываетъ на возможность перемѣны знака, „если придавать идеѣ сферическаго треугольника ея наибольшую общность". Поэтому мнѣ кажется вполнѣ справедливымъ называть эти формулы формулами Гаусса, хотя и не ему принадлежитъ пріоритетъ ихъ опубликованія.

Но впервые Стюди (Study) понялъ все значеніе этого обстоятельства и разъяснилъ его въ своей уже цитированной нами

работѣ 1894 года. Его главный результатъ наиболѣе удобно можно выразить, если исходить изъ пространства шести измѣреній R_6, для котораго координатами служатъ сами значенія $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, разсматриваемыя какъ неограниченно-измѣняющіяся перемѣнныя: мы будемъ называть ихъ трансцендентными опредѣляющими элементами треугольника въ отличіе отъ алгебраическихъ опредѣляющихъ элементовъ $\cos a, \ldots$ или $\cos\frac{a}{2}, \cdots$, такъ какъ первые представляютъ трансцендентныя, а вторые—алгебраическія функціи обыкновенныхъ пространственныхъ координатъ вершинъ треугольника. Въ этомъ пространствѣ R_6 совокупность всѣхъ сферическихъ треугольниковъ представляетъ „трансцендентное многообразіе“ $M_3^{(t)}$, отображеніемъ котораго въ пространствѣ R_{12}' служитъ опредѣленное выше алгебраическое многообразіе M_3'. Но такъ какъ послѣднее распадается на два многообразія, а отображающія функціи $\cos\frac{a}{2}, \cdots$ представляютъ однозначныя и непрерывныя функціи трансцендентныхъ координатъ, то и трансцендентное многообразіе $M_3^{(t)}$ должно распадаться на двѣ отдѣльныя части. Самая теорема Стюди заключается въ слѣдующемъ: трансцендентное многообразіе $M_3^{(t)}$ всѣхъ величинъ $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, какія только могутъ быть элементами сферическаго треугольника самаго общаго рода, распадается, соотвѣтственно двойному знаку въ формулахъ Гаусса, на двѣ отдѣльныя части, которыя, однако, представляютъ каждая сплошной континуумъ. Наиболѣе важнымъ является здѣсь невозможность никакого дальнѣйшаго распаденія; это значитъ, что дальнѣйшій анализъ тригонометрическихъ формулъ не можетъ привести къ подобнымъ и столь же глубокимъ подраздѣленіямъ сферическихъ треугольниковъ. Треугольники первой группы, соотвѣтствующей верхнему знаку въ формулахъ Гаусса, называютъ собственными треугольниками, а треугольники второй группы—несобственными, такъ что теорему Стюди можно выразить такъ: совокупность всѣхъ сферическихъ треугольниковъ распадается на континуумъ собственныхъ

и на континуумъ несобственныхъ треугольниковъ. Относящіяся сюда подробности и доказательство теоремы Стюди вы найдете у Вебера-Вельштейна (томъ II, § 47). Я же сообщаю здѣсь только результаты въ возможно краткомъ обзорѣ.

Теперь я остановлюсь подробнѣе на различеніи обоихъ родовъ треугольниковъ: если имѣется какой-нибудь сферическій треугольникъ, т. е. „допустимая система значеній“ величинъ a, b, c, α, β, γ, косинусы и синусы которыхъ удовлетворяютъ формуламъ первой ступени и которыя поэтому представляютъ нѣкоторую точку въ многообразіи $M_3^{(t)}$, то какимъ образомъ можемъ мы рѣшить вопросъ о томъ, является ли этотъ треугольникъ собственнымъ или несобственнымъ? Съ этой цѣлью образуемъ прежде всего наименьшіе положительные вычеты a_0, b_0, c_0, α_0, β_0, γ_0 данныхъ чиселъ по модулю 2π:

$$0 \leqq a_0 < 2\pi, \ldots, \quad 0 \leqq \alpha_0 < 2\pi, \ldots,$$

$$a_0 \equiv a \, (\text{mod. } 2\pi), \ldots, \quad \alpha_0 \equiv \alpha_0 \, (\text{mod. } 2\pi), \ldots.$$

Косинусы и синусы этихъ вычетовъ равны тѣмъ же тригонометрическимъ величинамъ для $a, \ldots$, $\alpha, \ldots$, такъ что они, въ свою очередь, образуютъ сферическій треугольникъ, который мы назовемъ приведеннымъ или мёбіусовымъ треугольникомъ, соотвѣтствующимъ первому треугольнику, такъ какъ самъ Мёбіусъ не разсматривалъ треугольниковъ съ элементами, превосходящими 2π. Рѣшимъ прежде всего, съ помощью небольшой таблицы, вопросъ о томъ, въ какихъ случаяхъ треугольникъ Мёбіуса является собственнымъ и когда онъ принадлежитъ къ числу несобственныхъ. Такую табличку вы можете найти и у Вебера-Вельштейна, но только въ не столь наглядной формѣ (стр. 53 и 84 русск. изданія 2-го выпуска II-го тома „Энциклопедіи“), гдѣ также (стр. 92—93) помѣщены рисунки различныхъ типовъ собственныхъ и несобственныхъ треугольниковъ. Мы находимъ по 4 типа треугольниковъ каждаго рода:

I. Собственные треугольники Мёбіуса:

1) 0 сторонъ $> \pi$, но $< 2\pi$; 0 угловъ . . . . $> \pi$, но $< 2\pi$
2) 1 сторона „ „ 2 прилежащихъ угла „ „

3) 2 стороны $> \pi$, но $< 2\pi$; 1 заключенный уголъ $> \pi$, но $< 2\pi$
4) 3 стороны „ „ 3 угла . . . . . „ „

2. Несобственные треугольники Мёбіуса:

1) 0 сторонъ $> \pi$, но $< 2\pi$; 3 угла . . . . $> \pi$, но $< 2\pi$
2) 1 сторона „ „ 1 противолежащій уголъ „ „
3) 2 стороны „ „ 2 „ „ „ „
4) 3 стороны „ „ 0 угловъ . . . . „ „

Другихъ случаевъ, кромѣ здѣсь перечисленныхъ, не существуетъ, такъ что съ помощью этой таблички вполнѣ рѣшается вопросъ о томъ, къ которому изъ двухъ видовъ принадлежитъ данный треугольникъ Мёбіуса.

Согласно сказанному выше, переходъ къ треугольнику общаго вида $a, \ldots, \alpha, \ldots$ отъ соотвѣтствующаго треугольника Мёбіуса производится посредствомъ слѣдующаго рода формулъ:

$$a = a_0 + n_1 \cdot 2\pi, \quad b = b_0 + n_2 \cdot 2\pi, \quad c = c_0 + n_3 \cdot 2\pi,$$
$$\alpha = \alpha_0 + \nu_1 \cdot 2\pi, \quad \beta = \beta_0 + \nu_2 \cdot 2\pi, \quad \gamma = \gamma_0 + \nu_3 \cdot 2\pi,$$

при чемъ имѣетъ мѣсто теорема: треугольникъ общаго вида оказывается одноименнымъ съ приведеннымъ треугольникомъ (т. е. одновременно съ нимъ собственнымъ или несобственнымъ), если сумма шести цѣлыхъ чиселъ $n_1 + n_2 + n_3 + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ есть четное число, и разноименнымъ, когда это число нечетное. Такимъ образомъ, характеръ каждаго треугольника оказывается вполнѣ опредѣленнымъ.

Я закончу этотъ отдѣлъ нѣсколькими замѣчаніями о площади сферическихъ треугольниковъ. Объ этомъ совершенно не упоминаютъ ни Стюди въ своихъ изслѣдованіяхъ, ни Веберъ-Вельштейнъ; но это понятіе играетъ большую роль въ моихъ прежнихъ изслѣдованіяхъ въ области теоріи функцій о треугольникахъ, со-

ставленныхъ изъ круговыхъ дугъ. Въ то время, какъ до сихъ поръ треугольникъ представлялъ собою въ нашихъ глазахъ не что иное, какъ соединеніе трехъ угловъ и трехъ сторонъ, удовлетворяющихъ теоремамъ косинусовъ и синусовъ, — здѣсь идетъ рѣчь объ опредѣленной части поверхности, ограниченной этими сторонами и представляющей какъ бы мембрану (перепонку), натянутую между тремя сторонами съ соотвѣтствующими углами.

Конечно, здѣсь не имѣетъ смысла разсматривать „внѣшніе“ углы α, β, γ треугольника, какъ мы дѣлали раньше ради симметріи; теперь рѣчь будетъ идти о тѣхъ углахъ, которые сама мембрана образуетъ у вершинъ; для краткости мы будемъ называть ихъ „внутренними“ углами треугольника. Я привыкъ обозначать ихъ посредствомъ $\lambda.\pi$, $\mu.\pi$, $\nu.\pi$ (рис. 58). И эти углы можно разсматривать, какъ неограниченно измѣняемыя исключительно положительныя величины, такъ какъ мы не хотимъ исключать и того случая, когда вершины мембраны служатъ точками свиванія поверхности. Аналогично этому, обозначимъ абсолютныя длины сторонъ черезъ $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$; это тоже неограниченно измѣняемыя положительныя величины. Но теперь уже углы и стороны не могутъ, какъ раньше, покрывать сами себя неограниченное число разъ независимо другъ отъ друга; иными словами — получать въ видѣ слагаемаго произвольныя кратныя 2π; тотъ фактъ, что должна существовать одна сплошная мембрана съ этими углами и сторонами, находитъ свое выраженіе въ извѣстныхъ соотношеніяхъ между этими множителями при 2π; эти соотношенія я назвалъ въ моей работѣ „О корняхъ гипергеометрическаго ряда“ *) дополнительными соотношеніями

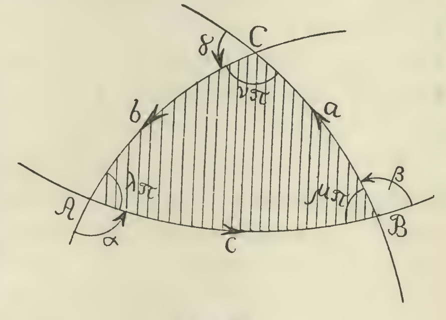


Рис. 58.

*) „Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe“ (Math. Ann., 37,1888).

сферической тригонометріи. Они имѣютъ слѣдующій видъ, если черезъ $E(x)$ обозначить наибольшее цѣлое положительное число, содержащееся въ x $(E(x) \leqq x)$:

$$E\left(\frac{l}{2}\right) = E\left(\frac{\lambda - \mu - \nu + 1}{2}\right),$$

$$E\left(\frac{m}{2}\right) = E\left(\frac{-\lambda + \mu - \nu + 1}{2}\right),$$

$$E\left(\frac{n}{2}\right) = E\left(\frac{-\lambda - \mu + \nu + 1}{2}\right),$$

и такъ какъ, например̂ъ, $E\left(\frac{l}{2}\right)$ обозначаетъ число слагаемыхъ, равныхъ 2π каждое, содержащихся въ сторонѣ $l.\pi$, то эти соотношенія какъ разъ выражаютъ искомыя кратныя 2π, содержащіяся въ сторонахъ $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$, если извѣстны углы $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ съ содержащимися въ нихъ кратными 2π. Въ частности нетрудно видѣть, что при положительныхъ λ, μ, ν можетъ быть положительнымъ, самое большее, одно изъ трехъ чиселъ $\lambda - \mu - \nu$, $-\lambda + \mu - \nu$, $-\lambda - \mu + \nu$, такъ что только одинъ изъ трехъ аргументовъ въ правыхъ частяхъ равенствъ можетъ быть больше 1; а такъ какъ при $x < 1$ всегда $E(x) = 0$, то только одно изъ трехъ упомянутыхъ кратныхъ 2π можетъ быть отлично отъ нуля. Итакъ, у треугольной мембраны только одна сторона можетъ превосходить 2π, а именно сторона, лежащая противъ наибольшаго угла.

Что же касается доказательства этихъ дополнительныхъ соотношеній, то я отсылаю интересующихся къ моимъ литографированнымъ лекціямъ „О гипергеометрической функціи“ *); впрочемъ, въ нихъ, какъ и въ упомянутой выше работѣ, тема разработана гораздо шире, чѣмъ я указалъ здѣсь, а именно я тамъ разсматриваю такіе „сферическіе треугольники“, которые ограничены любыми окружностями, а не только дугами большихъ круговъ. Здѣсь же я хочу только въ нѣсколькихъ словахъ охарактеризовать ходъ мыслей въ этомъ доказательствѣ.

*) Winter-Semester $189^{3}/_{4}$, ausgearb. von E. Ritter. — Neudruck Leipzig 1906, pag. 384 ff.

зательствѣ. Исходятъ отъ элементарнаго треугольника, на который, конечно, всегда можно натянуть мембрану, и изъ нея получаютъ послѣдовательно мембраны самаго общаго вида; а именно, присоединяя по нѣсколько разъ надлежащимъ образомъ мембраны, имѣющія форму круга, съ точками развѣтвленія въ вершинахъ. Рисунокъ 59 показываетъ, въ видѣ примѣра, — въ стереографической проекціи, — треугольникъ ABC, полученный изъ элементарнаго треугольника черезъ присоединеніе полусферы, ограниченной большимъ кру-

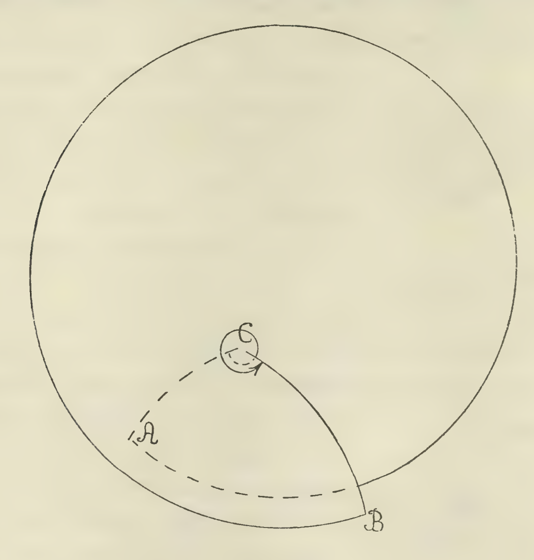


Рис. 59.

гомъ AB, вслѣдствіе чего какъ сторона AB, такъ и уголъ при C по одному разу покрываютъ сами себя. Легко видѣть, что при этомъ процессѣ дополнительныя соотношенія остаются въ силѣ; оказывается, что это имѣетъ мѣсто и для треугольныхъ мембранъ самаго общаго вида, какія только можно построить посредствомъ подобныхъ процессовъ.

Теперь мы должны точнѣе присмотрѣться къ тому, какое мѣсто занимаютъ эти треугольники съ дополнительными соотношеніями въ описанной выше общей теоріи. Очевидно, они представляютъ собой только частные случаи, а именно — въ виду того, что вообще числа,

показывающія, сколько разъ стороны и углы сами себя покрываютъ, вполнѣ произвольны, — *такіе частные случаи, которые характеризуются именно возможностью обтянуть треугольникъ мембраной*. Конечно, на первый взглядъ это вызываетъ недоумѣніе: въ самомъ дѣлѣ, какъ мы видѣли выше, всѣ собственные треугольники, даже и тѣ, которые вовсе не удовлетворяютъ дополнительнымъ соотношеніямъ, образуютъ одинъ континуумъ, такъ что каждый изъ нихъ можетъ быть полученъ посредствомъ непрерывнаго измѣненія изъ элементарнаго треугольника; поэтому казалось бы, что мембрана, натянутая на элементарный треугольникъ, не можетъ при этомъ процессѣ погибнуть. Объясненіе этому затрудненію получимъ, если примѣнимъ *принципъ Мёбіуса опредѣленія знака и къ площадямъ*: а именно, *площадь надо считать положительной или отрицательной, смотря по тому, обходятъ ли её въ положительномъ (противъ движенія стрѣлки часовъ) или въ отрицательномъ направленіи*. Если кривая, пересѣкая самое себя, ограничиваетъ *нѣсколько* частей поверхности, то вся ограничиваемая ею площадь равна *алгебраической суммѣ площадей отдѣльныхъ частей*. На рисункѣ 60 надо брать разность, а на рисункѣ 61 сумму площадей обѣихъ частей. Конечно, эти опредѣленія представляютъ лишь геометрическое выраженіе того, что само собой вытекаетъ изъ аналитическаго опредѣленія площади.

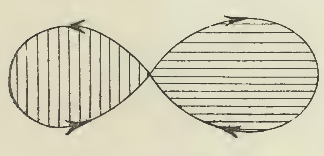


Рис. 60.

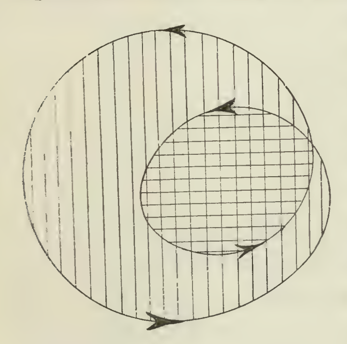


Рис. 61.

Примѣняя эти результаты въ частности къ сферическимъ треугольникамъ, найдемъ, что, дѣйствительно, *каждому собственному треугольнику можно отнести опредѣленную площадь на сферѣ, но только при этомъ при однократномъ обходѣ периферіи треугольника однѣ части этой площади приходится обходить въ положительномъ, другія же въ отрицательномъ направленіи*, и по-

этому при подсчетѣ имъ слѣдуетъ приписывать различные знаки. Тѣ треугольники, для которыхъ имѣетъ мѣсто дополнительное соотношеніе, отличаются только тѣмъ, что они состоятъ изъ одной только мембраны, обѣгаемой въ положительномъ направленіи; этимъ именно свойствомъ и объясняется ихъ большое значеніе для цѣлей теоріи функцій, ради которыхъ я ихъ и приводилъ раньше.

Теперь я хотѣлъ бы пояснить эти вещи на одномъ примѣрѣ. Разсмотримъ треугольникъ ABC, изображенный на рисункѣ 62 въ стереографической проекціи, при чемъ A есть болѣе удаленная отъ дуги BC точка пересѣченія большихъ круговъ BA и CA; вторая точка пересѣченія обозначена буквой A'. Внутренніе углы треугольника $\mu\pi$, $\nu\pi$ измѣряютъ вращеніе стороны AB до совпаденія съ BC и стороны BC до совпаденія съ CA; оба они положительны. Наоборотъ, уголъ $\lambda\pi$, на который надо повернуть сторону CA, чтобы привести ее совпаденіе со стороной AB, надо, согласно правилу Мёбіуса, считать отрицательнымъ; положимъ $\lambda = -\lambda'$. Треугольникъ $A'BC$ представляетъ, очевидно, элементарный треугольникъ съ углами $\lambda'\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, которые всѣ положительны. При обходѣ треугольника ABC въ указанномъ направленіи приходится треугольникъ $A'BC$ обходить въ положительномъ, а сферическій двусторонникъ AA' въ отрицательномъ направленіи, такъ что за площадь треугольника надо считать, согласно условіямъ Мёбіуса, разность этихъ двухъ частей сферы. Это распаденіе треугольной мембраны на положительную и отрицательную часть можно, пожалуй, сообразно направленію обхода периферіи, представить себѣ наглядно, принимая, что мембрана перекручена въ точкѣ A', такъ что нижній двусторонникъ оказывается обращеннымъ своей задней, отрицательной,

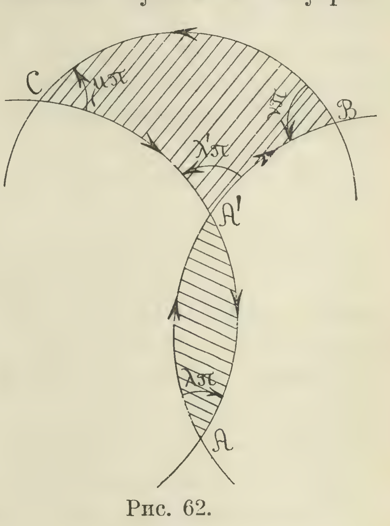


Рис. 62.

стороной кверху. Нетрудно составить и болѣе сложные примѣры въ томъ же родѣ.

Въ заключеніе я хочу показать на этомъ же примѣрѣ, что при этомъ обобщенномъ опредѣленіи площади остается въ силѣ элементарная формула площадей сферической тригонометріи. Какъ извѣстно, площадь сферическаго треугольника съ углами $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ на сферѣ радіуса 1 равна такъ называемому „сферическому избытку" $(\lambda+\mu+\nu-1)\pi$, поскольку λ, μ, $\nu>0$. Убѣдимся же въ томъ, что эта формула справедлива и для нашего треугольника ABC. Дѣйствительно, площадь элементарнаго треугольника $A'BC$ равна $(\lambda'+\mu+\nu-1)\pi$; изъ нея надо вычесть площадь сферическаго двусторонника AA' съ угловымъ отверстіемъ $\lambda'\pi$, равную $2\lambda'\pi$ (ибо площадь двусторонника пропорціональна его углу, и при углѣ въ 2π она равна поверхности всей сферы, т. е. 4π). Получается слѣдующая величина поверхности треугольника ABC:

$$(\lambda'+\mu+\nu-1)\pi-2\lambda'\pi=(-\lambda'+\mu+\nu-1)\pi=(\lambda+\mu+\nu-1)\pi.$$

Аналогично этому, если попробовать натянуть мембрану изъ нѣсколькихъ кусковъ на собственный треугольникъ съ произвольными углами и сторонами и затѣмъ опредѣлить на основаніи правила знаковъ площадь, какъ алгебраическую сумму отдѣльныхъ частей, то представляется вѣроятнымъ, что формула $(\lambda+\mu+\nu-1)\pi$ окажется справедливой, при чемъ, разумѣется, $\lambda\pi, \ldots$ надо разсматривать, какъ дѣйствительные углы мембраны, а не какъ ея внѣшніе углы.

Относящіяся сюда изслѣдованія еще, правда, не выполнены, но навѣрное не представляютъ очень большихъ трудностей, и я считалъ бы весьма желательнымъ, чтобы этимъ вопросомъ занялись. Особенно важно было бы выяснить роль несобственныхъ треугольниковъ.

На этомъ я оставляю область тригонометріи и обращаюсь ко второму важному приложенію теоріи гоніометрическихъ функцій, также относящихся къ области школьнаго преподаванія.

B. Ученіе о небольшихъ колебаніяхъ, въ особенности о колебаніяхъ маятника.

Прежде всего я напомню вамъ вкратцѣ, въ чемъ состоитъ тотъ выводъ закона колебаній маятника, который мы обыкновенно излагаемъ въ университетѣ, пользуясь исчисленіемъ безконечно-малыхъ. Предположимъ, что маятникъ виситъ на нити, длина которой равна l; обозначимъ черезъ φ уголъ, который маятникъ составляетъ съ положеніемъ равновѣсія (рис. 63). Такъ какъ на маятникъ дѣйствуетъ сила тяжести g, направленная вертикально внизъ, то, согласно основнымъ уравненіямъ механики, мы находимъ, что движеніе маятника опредѣляется слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \qquad (1)$$

Для небольшихъ колебаній можно съ достаточнымъ приближеніемъ замѣнить $\sin\varphi$ черезъ φ, что даетъ для такъ называемыхъ безконечно малыхъ колебаній маятника такое уравненіе:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\cdot\varphi \qquad (2)$$

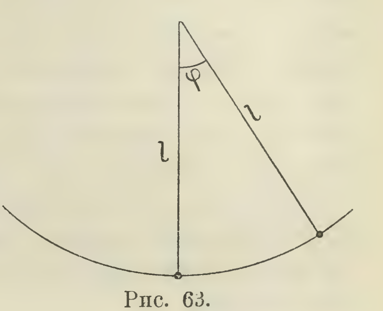


Рис. 63.

Общій интегралъ этого уравненія выражается, какъ извѣстно, посредствомъ круговыхъ функцій, которыя, такимъ образомъ, играютъ здѣсь роль, — какъ мы уже указывали, — именно благодаря ихъ дифференціальнымъ свойствамъ (появленіе тригонометрической величины $\sin\varphi$ въ уравненіи (1) не играетъ здѣсь роли); именно, общій интегралъ имѣетъ такой видъ:

$$\varphi = A\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + B\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

гдѣ A, B обозначаютъ произвольныя постоянныя, или иначе:

$$\varphi = C.\cos\sqrt{\frac{g}{l}}(t - t_0), \qquad (3)$$

гдѣ постоянная C называется *амплитудой*, а t_0 *фазой* колебанія, отсюда получаемъ для *времени полнаго колебанія* величину

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Но совершенно иначе, — по сравненію съ этими простыми и ясными разсужденіями, которые, конечно, становятся еще нагляднѣе при болѣе обстоятельномъ изученіи вопроса, — складывается такъ называемое *„элементарное“ изложеніе закона качаній маятника*, принятое въ школѣ. При этомъ изложеніи хотятъ совершенно избѣгнуть всякаго послѣдовательнаго примѣненія исчисленія безконечно-малыхъ, между тѣмъ какъ физика какъ разъ здѣсь, въ силу внутренней природы ея проблемъ, повелительно требуетъ примѣненія методовъ безконечно-малыхъ; въ результатѣ оказывается, что прибѣгаютъ къ помощи спеціальнаго пріема, изобрѣтеннаго ad hoc и содержащаго идеи анализа безконечно-малыхъ, но только не называютъ ихъ собственнымъ именемъ. Разумѣется, при этомъ получается крайне сложное зданіе, если только отъ него требуется дѣйствительная точность; поэтому на дѣлѣ этотъ пріемъ излагаютъ, большей частью, съ такими пропусками, что, собственно говоря, врядъ ли можно говорить о *доказательствѣ* закона колебаній маятника. Такимъ образомъ получается такое курьезное явленіе: одинъ и тотъ же учитель на одномъ урокѣ — математики — наиболѣе требовательно относится къ логической строгости доказательствъ, которой, по его мнѣнію, унаслѣдованному отъ традицій XVIII-го вѣка, не удовлетворяетъ исчисленіе безконечно-малыхъ, а на слѣдующемъ урокѣ — физики — прибѣгаетъ къ крайне сомнительнымъ заключеніямъ и къ самому смѣлому примѣненію безконечно-малыхъ.

Разрѣшите мнѣ для лучшаго уясненія изложить въ нѣсколькихъ словахъ ходъ мыслей въ этомъ *элементарномъ выводѣ закона колебаній маятника*, который дѣйствительно примѣняется въ учебникахъ и въ школѣ. Въ этомъ доказательствѣ исходятъ изъ *коническаго маятника*; такъ называютъ пространственный маятникъ, который съ равномѣрной скоростью v описываетъ окружность вокругъ вертикальной оси, такъ что нить маятника описываетъ при этомъ поверхность круглаго конуса (рис. 64). Такое движеніе въ механикѣ назы-

ваютъ правильной прецессіей. Возможность такого движенія въ школѣ считаютъ, конечно, установленной опытомъ, и задаются лишь вопросомъ о томъ, какія соотношенія имѣютъ мѣсто между скоростью v и постояннымъ отклоненіемъ маятника отъ вертикали $\varphi = a$ (т. е. угломъ, измѣряющимъ отверстіе конуса, описываемаго нитью). Начинаютъ съ того, что находятъ для радіуса круга, описываемаго маятникомъ, величину $r = l \cdot \sin a$, гдѣ вмѣсто $\sin a$ можно вставить a, если предположить, что уголъ a достаточно малъ. Затѣмъ говорятъ о центробѣжной силѣ и выводятъ формулу, согласно которой наша точка, описывающая окружность со скоростью v, развиваетъ центробѣжную силу, равную

$$\frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l \cdot a}.$$

Чтобы движеніе не нарушилось, ее должна уравновѣшивать равная по величинѣ сила, направленная къ центру окружности, — такъ называемая центростремительная сила. Но послѣдней является слагающая силы тяжести, расположенная въ плоскости окружности и равная $g \cdot \operatorname{tg} a$, что при достаточно маломъ a можно положить равнымъ $g \cdot a$. Такимъ образомъ, получаемъ искомое соотношеніе въ слѣдующемъ видѣ:

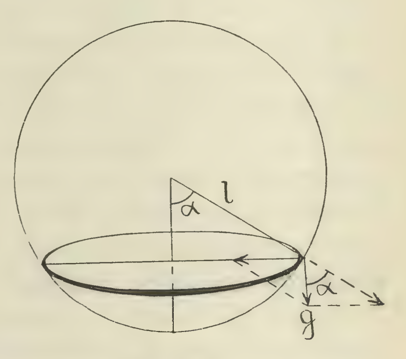


Рис. 64.

$$\frac{v^2}{la} = g \cdot a$$

$$\text{или} \quad v = a\sqrt{g \cdot l}\,.$$

Отсюда находимъ, что время одного колебанія маятника T, т. е. то время, въ теченіе котораго мятникъ описываетъ полную окружность $2\pi r = 2\pi la$, равно

$$T = \frac{2\pi la}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

другими словами, коническій маятникъ совершаетъ — въ случаѣ достаточно малыхъ отклоненій α — правильную прецессію съ опредѣленнымъ періодомъ, величина котораго не зависитъ отъ α.

Если мы хотимъ подвергнуть критикѣ уже эту часть вывода, то, прежде всего, замѣну $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ черезъ α мы можемъ признать допустимой; таковую замѣну мы сами совершали въ нашемъ точномъ выводѣ (стр. 308); дѣйствительно, благодаря ей получается переходъ отъ „конечныхъ" колебаній къ „безконечно-малымъ" колебаніямъ. Въ противоположность этому, формула центробѣжной силы можетъ быть получена „элементарнымъ путемъ" только цѣной различныхъ неточностей, которыя находятъ свое истинное обоснованіе лишь въ дифференціальномъ исчисленіи. А именно, уже опредѣленіе центробѣжной силы нуждается въ сущности даже въ понятіи второй производной, такъ что при элементарномъ выводѣ приходится исказить и послѣднее. Вслѣдствіе этого возникаютъ — за невозможностью ясно выразить то, о чемъ идетъ рѣчь — огромныя затрудненія для пониманія, которыя при примѣненіи дифференціальнаго исчисленія совершенно не имѣли бы мѣста. Мнѣ не приходится входить здѣсь въ детали, тѣмъ болѣе, что я могу указать вамъ на очень легко написанныя программныя статьи покойнаго директора реальной гимназіи въ Гюстровѣ (Güstrow) Зегера (H. Seeger)*), въ которыхъ между прочимъ подвергнуты подробной критикѣ, соотвѣтствующей нашей точкѣ зрѣнія, различные выводы формулы центробѣжной силы.

Но на этомъ еще далеко не кончается выводъ закона колебаній маятника. Мы показали только возможность равномѣрнаго движенія по кругу, которое на языкѣ аналитической механики изображается нижеслѣдующими

---

*) Ueber die Stellung des hiesigen Realgymnasiums zu einem Beschlusse der letzten Berliner Schulconferenz. Güstrow 1891. Schulprogr. № 649. Ueber die Stellung des hiesigen Realgymnasiums zu dem Erlass des preussischen Unterrichtsministeriums von 1892 (1893, № 653). Bemerkungen über Abgrenzung und Verwertung des Unterrichts in den Elementen der Infinitesimalrechnung (1894, № 658).

уравненіями, если возьмемъ оси xy въ плоскости этого круга (т. е., при нашихъ упрощеніяхъ, въ плоскости касательной къ сферѣ) (рис. 65):

$$\begin{cases} x = l\,.\,a\,.\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t-t_0) \\ y = l\,.\,a\,.\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t-t_0) \end{cases} \qquad (4)$$

Но мы желаемъ получить плоскія качанія маятника, другими словами, тяжелая точка маятника должна двигаться по нашей плоскости xy вдоль одной прямой — оси x; а чтобы при отклоненіи $\varphi = \frac{x}{l}$ получилось вѣрное уравненіе (3), его уравненіе движенія должно имѣть такой видъ:

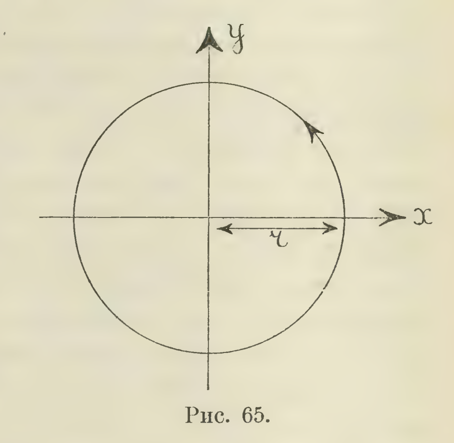


Рис. 65.

$$x = l\,.\,C\,.\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t-t^0), \quad y = 0. \qquad (5)$$

Итакъ, намъ надо отъ уравненій (4) придти къ уравненію (5), при чемъ мы не должны пользоваться дифференціальными уравненіями динамики. Этого достигаютъ, вводя принципъ наложенія небольшихъ колебаній, согласно которому, если возможны два движенія x, y и x_1, y_1, то возможно и движеніе $x + x_1$, $y + y_1$. А именно, мы можемъ комбинировать лѣвовращательное движеніе маятника, выражаемое уравненіями (4), съ правовращательнымъ движеніемъ, опредѣляемымъ такими уравненіями:

$$x_1 = l a \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t-t_0), \quad y = -\,l a \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t-t_0).$$

Въ результатѣ, если взять $a = \frac{c}{2}$, то движеніе $x + x_1, y + y_1$ въ дѣйствительности представляетъ то колебательное движеніе маятника, выражаемое уравненіями (5), которое мы хотѣли вывести.

При критикѣ этихъ разсужденій прежде всего возникаетъ, конечно, вопросъ о томъ, какимъ образомъ можно обосновать или, по крайней мѣрѣ, сдѣлать правдоподобнымъ, не пользуясь дифференціальнымъ счисленіемъ, принципъ наложенія колебаній. Но, главнымъ образомъ, при всѣхъ такихъ элементарныхъ пріемахъ изложенія всегда возникаетъ вопросъ о томъ, не могутъ ли такія послѣдовательно допускаемыя неточности привести въ результатѣ къ замѣтной ошибкѣ, хотя бы въ отдѣльности эти неточности и были допустимы. Подробнѣе останавливаться на этомъ мнѣ не приходится, такъ какъ эти вопросы столь элементарны, что всякій изъ васъ можетъ самостоятельно продумать ихъ до конца, разъ ваше вниманіе на нихъ обращено. Я же хотѣлъ бы еще разъ отмѣтить, что здѣсь рѣчь идетъ о слѣдующемъ центральномъ пунктѣ проблемы преподаванія: съ одной стороны, здѣсь ясно выступаетъ потребность принимать во вниманіе счисленіе безконечно-малыхъ, а съ другой стороны, обнаруживается необходимость введенія гоніометрическихъ функцій въ общемъ видѣ, независимо отъ ихъ спеціальнаго примѣненія къ геометріи треугольника.

Теперь я перейду къ послѣднему изъ тѣхъ примѣненій гоніометрическихъ функцій, о которыхъ я имѣлъ въ виду говорить.

C. Изображеніе періодическихъ функцій посредствомъ рядовъ изъ гоніометрическихъ функцій (тригонометрическіе ряды).

Какъ извѣстно, въ астрономіи и въ математической физикѣ во множествѣ случаевъ приходится разсматривать и вычислять періодическія функціи, и вотъ здѣсь то упомянутое въ заглавіи изображеніе и представляетъ самое главное и постоянно примѣняемое средство изслѣдованія.

Представимъ себѣ, ради большаго удобства, что единица мѣры выбрана такъ, что періодъ данной періодической функціи $y = f(x)$ равенъ 2π (рис. 66). Вопросъ заключается въ томъ, нельзя ли такую функцію $f(x)$ приближенно изобразить посредствомъ аггрегата косинусовъ и синусовъ цѣлочисленныхъ кратныхъ 2π, вплоть до первой, второй,..., вообще n-ой кратности, въ соединеніи съ подходяще выбранными постоянными множителями; другими словами, нельзя ли замѣнить $f(x)$ съ достаточно малой ошибкой выраженіемъ такого вида:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx. \quad (1)$$

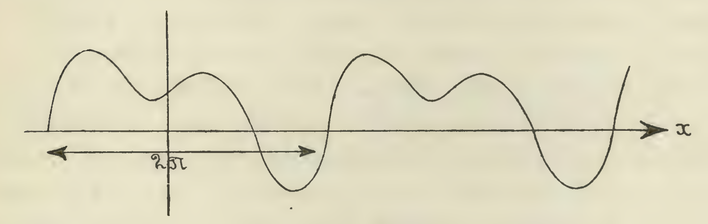


Рис. 66.

Въ постоянный членъ вводятъ множитель $^1/_2$ съ тѣмъ, чтобы приводимое ниже выраженіе для коэффиціентовъ было дѣйствительно вполнѣ общимъ.

Прежде всего, я долженъ снова пожаловаться на изложеніе, принятое въ учебникахъ. А именно, вмѣсто того, чтобы поставить на первый планъ только что указанную элементарную проблему, авторы учебниковъ считаютъ единственнымъ заслуживающимъ вниманія примыкающій сюда теоретическій вопросъ о томъ, нельзя ли изобразить $f(x)$ *точно* посредствомъ *безконечнаго* ряда; такъ смотритъ на дѣло даже Шефферсъ (Scheffers), который, какъ я недавно говорилъ, отлично понимаетъ духъ элементарнаго изложенія. Похвальное исключеніе представляетъ Рунге (Runge) въ своей книгѣ „Теорія и практика рядовъ“ *). — Но сама по себѣ такая

*) „Theorie und Praxis der Reihen“. Sammlung Schubert 32, Leipzig, 1904.

постановка вопроса для практическихъ цѣлей совершенно лишена интереса, ибо на практикѣ можно суммировать только конечное и то только не слишкомъ большое число членовъ; рѣшеніе указаннаго теоретическаго вопроса совершенно не позволяетъ само по себѣ судить о практической пригодности ряда: дѣйствительно, изъ сходимости ряда никоимъ образомъ нельзя заключать, что его первые члены выражають сумму ряда хотя бы съ самымъ грубымъ приближеніемъ; точно такъ же, какъ и, обратно, нѣсколько первыхъ членовъ расходящагося ряда могутъ быть весьма пригодными для практическаго выраженія функціи. Я нахожу нужнымъ особенно подчеркнуть это, такъ какъ тотъ, кто знакомъ только съ такимъ обычнымъ изложеніемъ и затѣмъ, продѣлывая физическій practicum (общій курсъ измѣрительныхъ опытовъ по физикѣ), хочетъ на дѣлѣ примѣнить конечные тригонометрическіе ряды, обыкновенно вводитъ самъ себя въ заблужденіе такими ложными заключеніями.

Еще поразительнѣе покажется это обычное пренебреженіе конечными тригонометрическими рядами, если вспомнимъ, что ихъ уже съ давнихъ поръ подвергали самостоятельному изученію. Основы этого изученія далъ астрономъ Бессель еще въ 1815 году. Подробности относительно исторіи и литературы этихъ вопросовъ вы найдете въ статьѣ Буркхардта (Burkhardt) о „тригонометрической интерполяціи“ въ „Encykl. d. Mathem. Wissensch.“ II A 9, pag. 642 ff. Впрочемъ, тѣ формулы, о которыхъ здѣсь идетъ рѣчь, въ сущности совпадаютъ съ тѣми, которыя встрѣчаются при обычныхъ доказательствахъ сходимости; но только тѣ идеи, которыя мы съ ними соединяемъ, пріобрѣтаютъ здѣсь иную окраску и облегчаютъ практическое пользованіе этими вещами.

Теперь я перейду къ ближайшему разсмотрѣнію нашей темы и начну съ вопроса о наиболѣе цѣлесообразномъ опредѣленіи коэффиціентовъ a, b при данномъ числѣ членовъ n. Для этой цѣли уже Бессель выработалъ одну идею, примыкающую къ методу наименьшихъ квадратовъ. Погрѣшность, которую мы совершаемъ, замѣняя $f(x)$ въ точкѣ x суммой $2n+1$ тригонометрическихъ функцій — обозначимъ ее черезъ $S(x)$ — равна $f(x)-S(x)$; мѣрой пригодности изображенія функціи $f(x)$ во всемъ

промежуткѣ $0 \leqq x \leqq 2\pi$, составляющемъ одинъ періодъ, можетъ служить сумма квадратовъ всѣхъ ошибокъ, т. е. интегралъ:

$$I = \int_0^{2\pi} \left(f(x) - S_n(x) \right)^2 dx.$$

Наиболѣе цѣлесообразное приближеніе значеній функціи $f(x)$ доставитъ, слѣдовательно, та сумма $S(x)$, для которой этотъ интегралъ I получаетъ наименьшее значеніе; на основаніи этого требованія Бессель опредѣлилъ значенія всѣхъ $2n+1$ коэффиціентовъ $a_0, a_1, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$. Въ самомъ дѣлѣ, необходимыя условія минимума I, какъ функціи нашихъ $2n+1$ величинъ, выражаются такими уравненіями:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial I}{\partial a_0} = 0, \ \frac{\partial I}{\partial a_1} = 0, \ldots, \ \frac{\partial I}{\partial a_n} = 0, \\ &\qquad\quad \frac{\partial I}{\partial b_1} = 0, \ldots, \ \frac{\partial I}{\partial b_n} = 0. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

Такъ какъ I представляетъ собой квадратичную, существенно положительную функцію перемѣнныхъ $a_0, \ldots b_n$, то нетрудно видѣть, что тѣ значенія этихъ перемѣнныхъ, которыя получаются изъ уравненій (2), доставляютъ для I дѣйствительный минимумъ.

Если выполнить дифференцированіе подъ знакомъ интеграла, то уравненія (2) примутъ такой видъ:

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \left(f(x) - S_n(x) \right) dx = 0 \\ &\int_0^{2\pi} \left(f(x) - S_n(x) \right) \cos x \, dx = 0 \ldots \int_0^{2\pi} \left(f(x) - S_n(x) \right) \cos nx \, dx = 0 \\ &\int_0^{2\pi} \left(f(x) - S_n(x) \right) \sin x \, dx = 0 \ldots \int_0^{2\pi} \left(f(x) - S_n(x) \right) \sin nx \, dx = 0 \end{aligned} \right. \tag{2!}$$

Но интегралы отъ произведеній $S(x)$ на косинусъ или синусъ

можно значительно упростить. Дѣйствительно, при $\nu = 0,\ 1, \ldots n$ находимъ:

$$\int_0^{2\pi} S_n(x) \cos \nu\, x \,.\, dx =$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos \nu x \,.\, dx + a_1 \int_0^{2\pi} \cos x \,.\, \cos \nu x \,.\, dx + \ldots + a_n \int_0^{2\pi} \cos n x \,.\, \cos \nu x \,.\, dx$$

$$+ b_1 \int_0^{2\pi} \sin x \,.\, \cos \nu x \,.\, dx + \ldots + b_n \int_0^{2\pi} \sin n x \,.\, \cos \nu x \,.\, dx.$$

Согласно извѣстнымъ свойствамъ интеграловъ гоніометрическихъ функцій всѣ члены справа равны нулю, кромѣ члена съ индексомъ ν, содержащаго косинусъ, который имѣетъ, какъ извѣстно, простое значеніе $a_\nu \pi$; такимъ образомъ:

$$\int_0^{2\pi} S_n(x) \,.\, \cos \nu x \,.\, dx = a_\nu \,.\, \pi \quad (\nu = 0, 1, \ldots n)$$

Эта формула справедлива и при $\nu = 0$ благодаря тому, что мы присоединили множитель $\frac{1}{2}$ къ коэффиціенту a_0. Такимъ же образомъ находимъ далѣе, что

$$\int_0^{2\pi} S_n(x) \,.\, \sin \nu x \,.\, dx = b_\nu \,.\, \pi \quad (\nu = 1, 2, \ldots n).$$

Эти простыя соотношенія показываютъ, что каждое изъ уравненій (2!) содержитъ только одно изъ $2n+1$ неизвѣстныхъ; поэтому мы можемъ сразу написать значенія этихъ неизвѣстныхъ:

$$\left\{ \begin{aligned} a_\nu &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \nu x \, dx \quad (\nu = 0, 1, \ldots n) \\ b_\nu &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin \nu x \, dx \quad (\nu = 1, \ldots n). \end{aligned} \right. \qquad (3)$$

Во всемъ дальнѣйшемъ мы будемъ считать, что коэффиціенты $S_n(x)$ имѣютъ эти именно значенія; тогда I дѣйствительно получитъ свое наименьшее значеніе, именно равное

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 \, dx - \pi \sum_{\nu = 0}^{n} a^2{}_\nu - \pi \sum_{\nu = 1}^{n} b^2_\nu.$$

Весьма важно отмѣтить то обстоятельство, что полученныя такимъ образомъ значенія коэффиціентовъ совершенно не зависятъ отъ общаго числа членовъ ряда n; даже болѣе того, коэффиціентъ, принадлежащій члену $\cos \nu x$ или $\sin \nu x$, сохраняетъ одно и то же значеніе независимо отъ того, примѣняютъ ли для приближеннаго вычисленія функціи $f(x)$ по тому же самому принципу одинъ только этотъ членъ или же въ соединеніи съ любыми другими членами. Если бы, напримѣръ, мы захотѣли возможно ближе подойти къ значеніямъ функціи $f(x)$ съ помощью одного только члена съ косинусомъ: $a_\nu \cos \nu x$, такъ что должно было бы

$$\int_0^{2\pi} \Big(f(x) - a_\nu \cos \nu x \Big)^2 dx = \text{minim.},$$

то и въ такомъ случаѣ мы получили бы для a_ν какъ разъ написанное выше значеніе. Благодаря этому указанный методъ приближенія оказывается особенно удобнымъ на практикѣ. Если бы мы пожелали, напримѣръ, приближенно изобразить функцію, ходъ измѣненія которой похожъ на ходъ измѣненій синуса, съ помощью одного только кратнаго $\sin x$ и затѣмъ увидѣли бы, что это приближеніе не достаточно точно, то мы могли бы присоединить еще въ видѣ слагаемыхъ сколько угодно членовъ, — и все на основаніи того же принципа наименьшей суммы квадратовъ ошибокъ, — не измѣняя величины уже найденнаго перваго члена.

Теперь мнѣ предстоитъ показать вамъ, насколько суммы $S(x)$, опредѣленныя указаннымъ образомъ, приближаются въ отдѣльныхъ случаяхъ къ данной функціи $f(x)$. Но мнѣ представляется весьма цѣлесообразнымъ предпослать такому изслѣдованію естественнонаучный экспериментальный методъ, а именно построить для нѣсколькихъ конкретныхъ случаевъ правильное графическое изображеніе приближенныхъ кривыхъ $S_n(x)$. Это даетъ живое представленіе о сути дѣла и вызываетъ даже у людей, не имѣющихъ спеціальной склонности къ математикѣ, интересъ и потребность въ математическомъ образованіи.

Я покажу вамъ въ оригиналѣ и на экранѣ нѣкоторые изъ такихъ чертежей, изготовленнныхъ г. Шиммакомъ, моимъ

бывшимъ ассистентомъ, для лекцій, читанныхъ мною въ зимнемъ семестрѣ 1903/04 года, въ которыхъ я подробно говорилъ объ этихъ вещахъ.

1) Наиболѣе простыя функціи, для которыхъ вообще имѣютъ смыслъ наши интегралы, служащіе для опредѣленія коэффиціентовъ, мы получимъ, составляя кривыя изъ прямолинейныхъ отрѣзковъ. Пусть, напримѣръ, кривая $y=f(x)$ идетъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$ по прямой подъ угломъ въ 45^0 кверху, затѣмъ подъ такимъ же угломъ спускается внизъ до абсциссы $x=\frac{3\pi}{2}$ и, наконецъ, снова подъ угломъ въ 45^0 поднимается вверхъ до

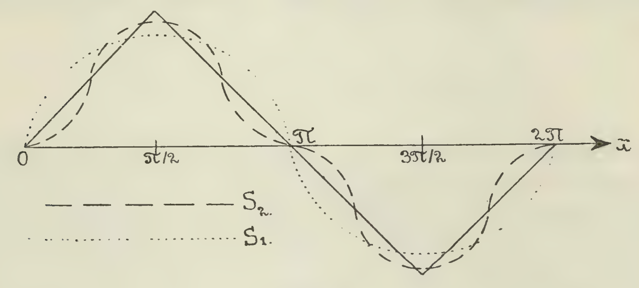


Рис. 67.

точки $x=2\pi$; далѣе функція повторяетъ этотъ періодъ $(0, 2\pi)$. (рис. 67). Если станемъ вычислять соотвѣтствующіе коэффиціенты, то увидимъ, что всѣ $a_\nu=0$ такъ какъ $f(x)$ продставляетъ нечетную функцію и вслѣдствіе этого остаются только члены съ синусами; получается такой рядъ:

$$S(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2}-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}-+\cdots\right).$$

На рисункѣ 67 представленъ ходъ кривыхъ, изображающихъ сумму одного и двухъ первыхъ членовъ. Онѣ примыкаютъ все ближе и ближе къ данной кривой $y=f(x)$, при чемъ число точекъ пересѣченія ихъ съ этой кривой постоянно возрастаетъ. Особенно замѣчательно то, какъ эти приближенныя кривыя все больше и больше вдвигаются въ углы, образуемые кривой $f(x)$ въ точкахъ съ абсциссами $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots,$ хотя сами онѣ, какъ аналитическія функціи, не могутъ образовывать угловъ.

2) Пусть кривая $f(x)$ отъ 0 до $x = \pi$ подымается вверхъ подъ угломъ въ 45^0 по прямой линіи, затѣмъ дѣлаетъ внезапный скачекъ внизъ до значенія $-\pi$ и потомъ снова подымается вверхъ подъ угломъ въ 45^0 до $x = 3\pi$; такимъ образомъ, кривая состоитъ изъ ряда параллельныхъ прямолинейныхъ отрѣзковъ, проходящихъ черезъ точки $x = 0,\ 2\pi,\ 4\pi, \ldots$ оси x (рис. 68). Вставляя въ мѣстахъ разрыва по вертикальному отрѣзку, соединяющему оба конца наклонныхъ отрѣзковъ, мы изобразимъ нашу разрывную функцію посредствомъ непрерывной линіи, напоми-

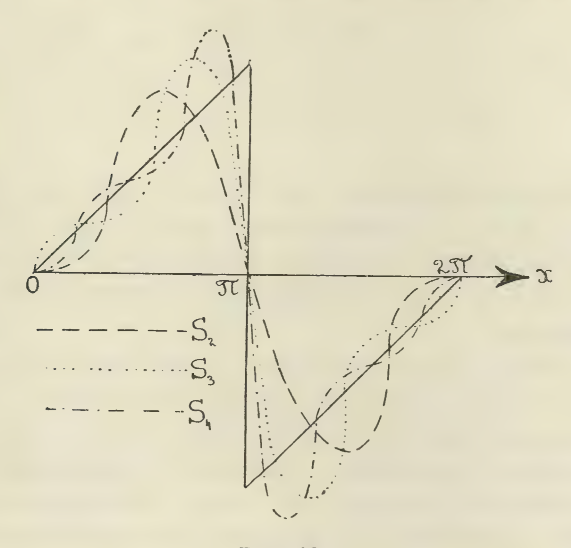


Рис. 68.

нающей тѣ штрихи, которые всѣ вы дѣлали въ началѣ обученія письму. Это опять нечетная функція, такъ что всѣ члены съ косинусами выпадаютъ, и разложеніе въ рядъ имѣетъ такой видъ:

$$S(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + - \cdots\right).$$

На рисункѣ 68 изображены суммы первыхъ двухъ, трехъ, четырехъ членовъ; и въ данномъ случаѣ особенно замѣчательно то, что онѣ какъ бы стремятся подражать разрывамъ функціи $f(x)$, проходя, напримѣръ, черезъ нулевое значеніе при $x = \pi$ все болѣе крутымъ паденіемъ.

3) Въ качествѣ послѣдняго примѣра возьмемъ кривую, которая для $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ равна $\frac{\pi}{2}$, для $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3\pi}{2}$ равна 0 и для $\frac{3\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi$ равна $-\frac{\pi}{2}$, а дальше періодически принимаетъ такія же значенія. Вставляя, какъ и раньше, вертикальныд отрѣзки въ мѣстахъ разрыва, мы получимъ крючкообразную линію. И въ данномъ случаѣ только члены съ синусами отличны отъ нуля, ибо функція нечетная, а именно:

$$S(x) = \sin x + 2\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + 0 + \frac{\sin 5x}{5} + \\ + 2\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 7x}{7} + 0 + \frac{\sin 9x}{9} + \cdots$$

Здѣсь законъ коэффиціентовъ не столь простой, какъ въ предыдущихъ случаяхъ, и соотвѣтственно этому переходъ отъ одной приближенной кривой къ другой (на рис. 69 изображены кривыя для суммъ изъ 3, 5 и 6 членовъ) не такъ ясенъ, какъ въ прежнихъ примѣрахъ.

Перейдемъ теперь къ вопросу о томъ, какъ велика вообще та ошибка при опредѣленномъ значеніи x, которую мы совершаемъ, замѣняя $f(x)$ суммой $S_n(x)$; до сихъ поръ мы интересовались только интеграломъ этой ошибки, взятымъ по всему интервалу. Теперь, для отличія отъ абсциссы x, которую мы считаемъ постоянной, будетъ обозначать перемѣнную интегрированія въ интегралахъ, входящихъ въ выраженія коэффиціентовъ a_ν, b_ν (3), черезъ ξ. Тогда наша конечная сумма (1) приметъ такой видъ:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\xi . f(\xi) . \left\{ \tfrac{1}{2} + \cos x \cos\xi + \cos 2x \cos 2\xi + \cdots + \cos nx \cos n\xi \right. \\ \left. + \sin x \sin\xi + \sin 2x \sin 2\xi + \cdots + \sin nx \sin n\xi \right\},$$

или же, соединяя каждыя два слагаемыя, стоящія одно подъ другимъ, въ одинъ членъ:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\xi . f(\xi) \left\{ \tfrac{1}{2} + \cos(x-\xi) + \cos 2(x-\xi) + \cdots + \cos n(x-\xi) \right\}.$$

Рядъ, стоящій въ скобкахъ, нетрудно суммировать; удобнѣе всего, пожалуй, сдѣлать это, переходя къ комплексной показательной функціи. Въ результатѣ, — въ детали я не могу здѣсь входить, — получается слѣдующее выраженіе, — если воспользоваться тѣмъ обстоятельствомъ, что въ силу періодичности подъинтегральной функціи, за предѣлы интегрированія можно принять $-\pi$ и $+\pi$:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\xi \,.\, f(\xi) \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(\xi - x)}{\sin \frac{1}{2}(\xi - x)}.$$

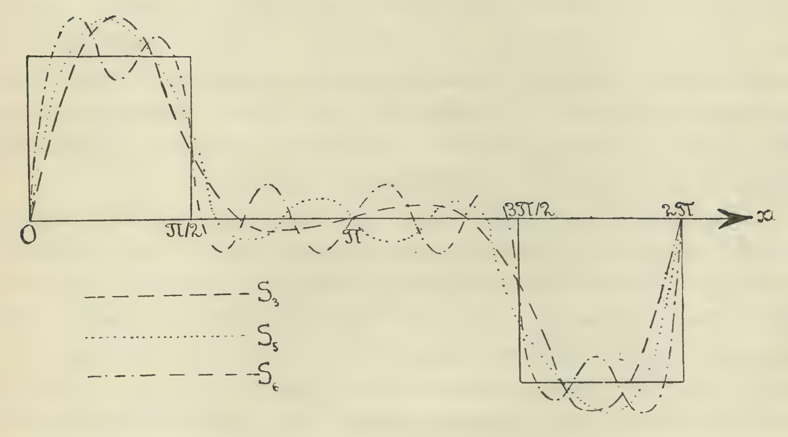


Рис. 69.

Чтобы получить представленіе о величинѣ этого интеграла, построимъ сперва кривыя:

$$\xi = \pm \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sin \frac{1}{2}(\xi - x)}$$

для промежутка $x - \pi \leqq \xi \leqq x + \pi$ оси ξ; онѣ, очевидно, похожи на вѣтви гиперболы. Между этими вѣтвями совершаетъ колебанія кривая

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(\xi - x)}{\sin \frac{1}{2}(\xi - x)} = \xi \,.\, \sin \frac{2n+1}{2}(\xi - x)$$

и именно тѣмъ чаще, чѣмъ больше n. Для $\xi = x$ она принимаетъ

значеніе, растущее одновременно съ n, равное $\eta = \frac{2n+1}{2\pi}\cdot$ Если положить ради простоты $f(\xi)=1$, то $S_n(x) = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \eta . d\xi$ представитъ площадь, ограниченную кривой η и осью ξ (на рис. 70 заштрихованная часть). Но обладая хотя бы въ нѣкоторой степени чувствомъ непрерывности, легко убѣдиться въ томъ, что при достаточно большомъ значеніи n какъ справа, такъ и слѣва площади, соотвѣтствующія отдѣльнымъ колебаніямъ, которыя попеременно положительны и отрицательны, должны другъ друга компенсировать, такъ что остается только площадь очень высокаго и узкаго средняго куска; послѣдній же, какъ нетрудно видѣть, при возрастаніи n переходитъ какъ разъ въ значеніи $f(x)=1$. Совершенно такъ же въ общемъ обстоитъ дѣло, когда $f(x)$ представляетъ любую не слишкомъ разрывную функцію, но непремѣнно непрерывную при $x=\xi$.

Такія же точно соображенія, выраженныя въ болѣе строгой формѣ, лежатъ въ основаніи доказательства Дирихле (Dirichlet) сходимости безконечныхъ тригонометрическихъ рядовъ. Это доказательство Дирихле впервые опубликовалъ въ 4-мъ томѣ журнала Крелля (Crelles Journal) въ 1829 году*). Позднѣе онъ далъ (1837) популярное изложеніе въ Repertorium der Physik von Dove und Moser. Въ настоящее время это доказательство приводится въ большинствѣ учебниковъ, такъ что мнѣ не приходится здѣсь на немъ останавливаться. Я долженъ лишь назвать тѣ условія, которымъ должна удовлетворять функція $f(x)$, чтобы ее можно было представить въ видѣ безконечнаго тригонометрическаго ряда. Предположимъ снова, что функція $f(x)$ дана въ промежуткѣ $0 \leqq x \leqq 2\pi$ и затѣмъ продолжается періодически. Дирихле дѣлаетъ слѣдующія допущенія, называемая теперь просто условіями Дирихле:

a) функція $f(x)$ непрерывна цѣлыми отрѣзками, т. е. въ промежуткѣ $(0, 2\pi)$ функція дѣлаетъ только конечное число скачковъ.

*) „Ueber die Darstellung ganz willkührlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen“. Перепечатано въ собраніи сочиненій: Werke, Bd. I, pag. 133—160 и въ изданіи Ostwalds Klassiker, № 116 (Leipzig 1900).

b) функція $f(x)$ монотонна цѣлыми отрѣзками, т. е. весь промежутокъ $(0, 2\pi)$ можно разбить на конечное число такихъ болѣе мелкихъ интерваловъ, что въ каждомъ изъ нихъ $f(x)$ либо не возрастаетъ, либо не убываетъ — другими словами, $f(x)$ обладаетъ лишь конечнымъ числомъ maxima и minima. Поэтому приходится исключить такія, напримѣръ, функціи, какъ $\sin\frac{1}{x}$, для которой въ окрестности точки $x = 0$ скопляется безконечное число extrema.

При соблюденіи этихъ условій, какъ показываетъ Дирихле, безконечный рядъ точно представляетъ

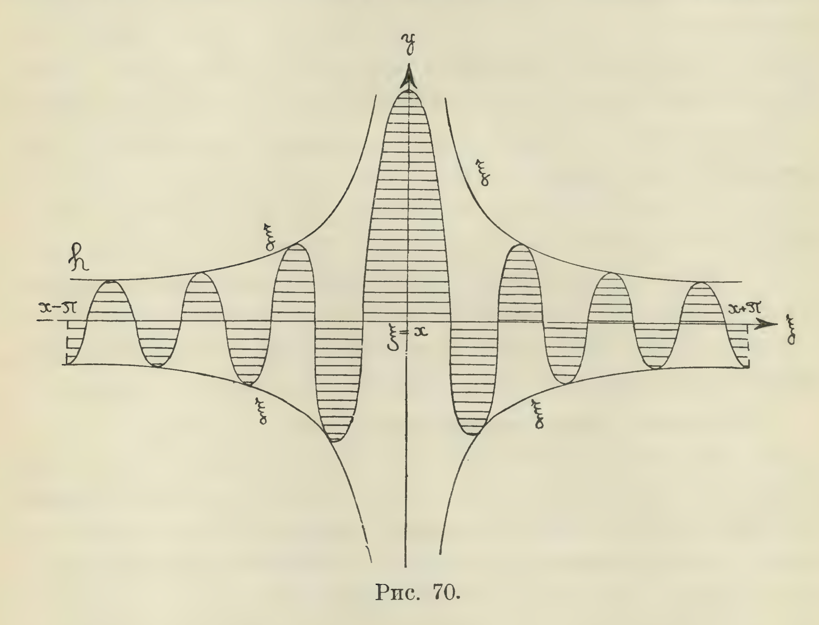


Рис. 70.

значеніе функціи $f(x)$ во всѣхъ точкахъ x, въ которыхъ послѣдняя непрерывна:

$$\lim_{n=\infty} S_n(x) = f(x).$$

Но далѣе Дирихле показываетъ, что и въ точкахъ разрыва рядъ этотъ сходится, а именно сумма его при этихъ значеніяхъ x равна ариѳметическому среднему тѣхъ значеній, которыя принимаетъ

$f(x)$, если приближаться справа и слѣва къ точкѣ разрыва; или, какъ принято писать:

$$\lim_{n=\infty} S_n(x) = \frac{f(x+0) - f(x-0)}{2}.$$

На рисункѣ 71 отмѣчены такія точки разрыва и тѣ значенія, о которыхъ идетъ рѣчь.

Упомянутыя условія Дирихле, налагаемыя на функцію $f(x)$, только достаточны, но ни въ коемъ случаѣ не являются необходимыми для того, чтобы $f(x)$ была представлена рядомъ $S(x)$. Но, съ другой стороны, не достаточно предполагать только непрерывность $f(x)$; можно построить непрерывныя функціи, у которыхъ безчисленное множество колебаній столь сильно сгущено, что рядъ $S(x)$ расходится.

Послѣ этихъ — скорѣе теоретическихъ — замѣчаній я хочу сказать нѣсколько словъ о практической сторонѣ тригонометрическихъ рядовъ. Болѣе подробный разборъ относящихся сюда вопросовъ вы найдете въ отмѣченной уже выше книгѣ Рунге. Въ ней вы найдете обстоятельное изслѣдованіе вопроса о вычисленіи коэффиціентовъ ряда въ числахъ, т. е. вопросъ о томъ, какъ можно наиболѣе быстро вычислить для данной функціи интегралы, входящіе въ выраженія для a_ν и b_ν.

Построены также спеціальные механическіе аппараты для вычисленія этихъ коэффиціентовъ, такъ называемые гармоническіе анализаторы. Это названіе объясняется тѣмъ значеніемъ, какое, какъ извѣстно, имѣетъ разложеніе данной функціи $y = f(x)$ въ тригонометрическій рядъ въ акустикѣ; оно въ точности соотвѣтствуетъ разложенію любого тона $y = f(x)$ (гдѣ x означаетъ время, а y амплитуду колебаній, соотвѣтствующаго данному тону) на „чистые тона", т. е. на чистыя косинусоидальныя и синусоидальныя колебанія. Въ нашемъ собраніи моделей и приборовъ имѣется анализаторъ, построенный Коради (Coradi) въ Цюрихѣ; онъ позволяетъ опредѣлить коэффиціенты первыхъ 6 членовъ съ синусами и 6 членовъ съ косинусами ($\nu = 1, \ldots 6$), такъ что въ общемъ даетъ 12 коэффиціентовъ. Коэффиціентъ $\frac{a_0}{2}$ приходится вычислять отдѣльно по-

средствомъ планиметра. Майкельсонъ (Michelson) въ Чикаго и Стрэттонъ (Stratton) построили аппаратъ, позволяющій вычислить даже 160 коэффиціентовъ ($\nu = 1, 2, \ldots 80$); вы найдете его описаніе въ книгѣ Рунге. Этотъ аппаратъ позволяетъ и, обратно, суммировать данный тригонометрическій рядъ изъ 160 членовъ, — другими словами, по даннымъ коэффиціентамъ возстановить самую функцію $f(x)$; конечно, эта задача тоже имѣетъ громадное практическое значеніе.

Аппаратъ Майкельсона-Стрэттона впервые обратилъ вниманіе на одно интересное явленіе, собственно говоря совершенно элементарнаго характера; приходится удивляться тому, что до тѣхъ поръ оно оставалось незамѣченнымъ. Впервые заговорилъ о немъ Гиббсъ (Gibbs) въ 1899 году на страницахъ журнала „Nature“ *), и поэтому его и называютъ явленіемъ

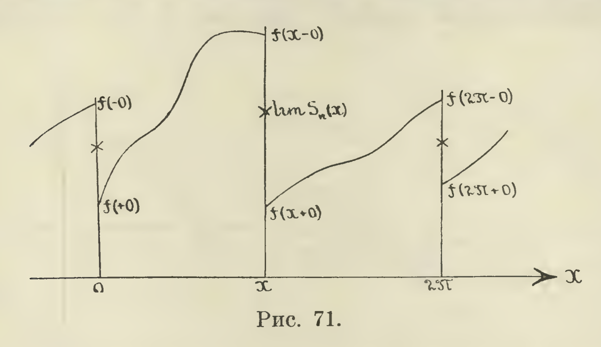


Рис. 71.

Гиббса. Позвольте мнѣ сказать о немъ нѣсколько словъ. По теоремѣ Дирихле значеніе безконечнаго тригонометрическаго ряда при опредѣленномъ значеніи x равно $\frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}$; такъ, во второмъ изъ нашихъ примѣровъ, — чтобы имѣть въ виду конкретный случай, — сумма ряда, въ этомъ смыслѣ слова, представляетъ функцію, изображенную на рисункѣ 72, съ изолированными точками для $x = \pi, 3\pi, \ldots$

Но раньше мы смотрѣли на тригонометрическое приближеніе иначе, чѣмъ Дирихле, который оставляетъ величину x постоянной и заставляетъ n расти до безконечности. Мы, на-

*) Bd. 59 (1898), pag. 200 или въ Scientific papers II (New Jork, 1906), pag. 258.

противъ, оставляли значеніе n постояннымъ и разсматривали $S_n(x)$ при перемѣнномъ x и, такимъ образомъ строили послѣдовательныя приближенныя кривыя $S_1(x)$ $S_2(x)$, $S_3(x), \ldots$. Вопросъ заключается въ слѣдующемъ: что станетъ съ этими кривыми, если n будетъ возрастать до безконечности? Или, выражаясь ариѳметически: вокругъ какихъ значеній сгущаются значенія $S_n(x)$, когда n при перемѣнномъ x стремится къ безконечности? Ясно, что теперь предѣльная функція не содержитъ болѣе изолированныхъ точекъ, какъ прежде, т. е. у Дирихле; напротивъ мы должны получить сплошную линію. На первый взглядъ представляется вѣроятнымъ, что эта кривая будетъ состоять какъ разъ изъ непрерывныхъ вѣтвей кривой $y=f(x)$ и изъ вертикальныхъ отрѣзковъ, соединяющихъ значенія $f(x+0)$ и $f(x-0)$ въ мѣстахъ

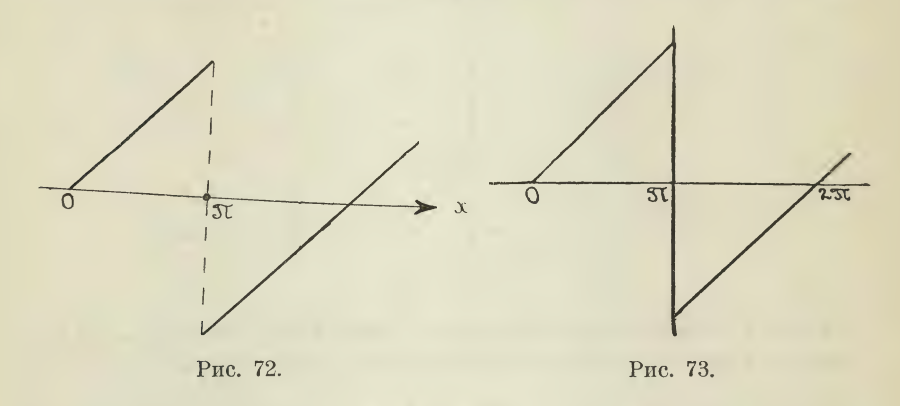


Рис. 72.　　　Рис. 73.

разрыва; въ упомянутомъ примѣрѣ это была бы линія, напоминающая нѣмецкую букву 𝔪 (рис. 68). На самомъ же дѣлѣ оказывается, что вертикальный отрѣзокъ предѣльной кривой всегда нѣсколько выходитъ кверху и книзу за предѣлы значеній $f(x+0)$ и $f(x-0)$ на конечную длину, такъ что эта кривая имѣетъ замѣчательный видъ, представленный на рисункѣ 72. Эти добавочные хвостики впервые были замѣчены у кривыхъ, построенныхъ аппаратомъ Майкельсона, такъ что они обнаружены именно экспериментальнымъ путемъ. Вначалѣ ихъ, конечно, приписывали несовершен-

ству аппарата, пока Гиббсъ не выяснилъ необходимость ихъ появленія. Если черезъ D обозначить величину скачка ($|f(x+0)-f(x-0)|$), то, какъ показалъ Гиббсъ, удлиненіе должно равняться.

$$-\frac{D}{10}\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi=\frac{1}{\pi}0{,}28\,D=0{,}09D.$$

Что касается обоснованія такого утвержденія, то достаточно дать его для одной какой-нибудь разрывной функціи, напримѣръ, для функціи, которой мы воспользовались въ качествѣ примѣра, — такъ какъ всѣ другія функціи съ такимъ же скачкомъ должны получиться изъ нея посредствомъ прибавленія соотвѣтственныхъ непрерывныхъ функцій. А для этого случая доказательство не особенно трудно, а именно оно получается изъ разсмотрѣнія интегральной формулы для $S_n(x)$ (стр. 321). Съ другой стороны, можно вполнѣ отчетливо прослѣдить по наброску приближенныхъ кривыхъ (рис. 68), какимъ образомъ возникаетъ остріе Гиббса.

Я зашелъ бы слишкомъ далеко, если бы сталъ входить здѣсь въ дальнѣйшія, крайне интересныя, подробности хода приближенныхъ кривыхъ; но я охотно рекомендую вашему вниманію содержательную и легко написанную работу Fejér въ Math. Ann. Bd. 64 (1907, pag. 273).

На этомъ я закончу спеціальныя замѣчанія относительно тригонометрическихъ рядовъ, чтобы присоединить къ нимъ отступленіе, посвященное общему понятію функціи, которое и по существу дѣла и исторически очень тѣсно сюда примыкаетъ.

D. Общее понятіе о функціи.

Мы должны заняться въ нашемъ курсѣ этимъ вопросомъ, тѣмъ болѣе, что вѣдь наша школьная реформа, по самому существу, своему стоитъ подъ девизомъ выдѣленія на первый планъ въ школьномъ обученіи этого столь важнаго понятія.

Сперва мы снова прослѣдимъ исторію развитія этого понятія. Прежде всего замѣтимъ, что у болѣе старыхъ авторовъ, каковы Лейбницъ и Бернулли, понятіе о функціи встрѣчается всегда лишь въ примѣненіи къ отдѣль-

нымъ примѣрамъ, къ степенямъ, къ тригонометрическимъ функціямъ и т. п. Общія формулировки встрѣчаются впервые только въ XVIII столѣтіи.

1) У Эйлера около 1850 года — мы находимъ два различныхъ объясненія слова „функція“:

a) въ своемъ „Introductio“ онъ называетъ функціей всякое „аналитическое выраженіе“, содержащее x, т. е. всякое выраженіе, составленное изъ степеней, логариѳмовъ, тригонометрическихъ функцій и т. д.: точнѣе Эйлеръ не опредѣляетъ выраженій, которыя онъ при этомъ употребляетъ. Впрочемъ, онъ уже дѣлаетъ обычное подраздѣленіе функцій на алгебраическія и на трансцендентныя.

b) Наряду съ этимъ мы встрѣчаемъ у него, что функція $y(x)$ опредѣляется тѣмъ, что въ плоскости координатъ xy начерчена кривая просто отъ руки „libera manu ducta“ (рис. 74).

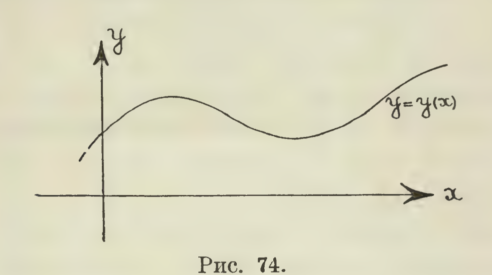


Рис. 74.

2) Лагранжъ въ своей „Théorie des fonctions analytiques“ (около 1800 года) сильно ограничиваетъ понятіе о функціи, сводя его къ такъ называемымъ „аналитическимъ функціямъ“, опредѣляемымъ посредствомъ степенного ряда относительно x. Мы сохранили этотъ терминъ „аналитическая функція“, хотя, конечно, хорошо знаемъ, что здѣсь идетъ рѣчь только объ одномъ спеціальномъ классѣ функцій изъ числа тѣхъ, которыя дѣйствительно появляются въ анализѣ. Степеннымъ рядомъ

$$y = \mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

функціи опредѣляются только внутри области сходимости, т. е. въ нѣкоторой окрестности значенія $x = 0$. Но

вскорѣ былъ найденъ способъ расширенія области, въ которой функція опредѣлена, за предѣлы первоначальнаго круга сходимости: если, напримѣръ, значеніе x_1 лежитъ внутри (рис. 75) области сходимости ряда $\mathfrak{P}$ и если преобразовать этотъ рядъ въ другой степенной рядъ, расположенный по степенямъ $(x-x_1)$;

$$y=\mathfrak{P}_1(x-x_1),$$

то можетъ случится, что область сходимости послѣдняго ряда выйдетъ за предѣлы области сходимости перваго ряда, такъ что y окажется опредѣленнымъ въ болѣе обширной области; повторяя тотъ же пріемъ, можно иногда эту область расширить еще дальше. Этотъ процессъ „аналитическаго продолженія“ хорошо извѣстенъ всякому, кто хоть немного занимался теоріей комплексныхъ функцій.

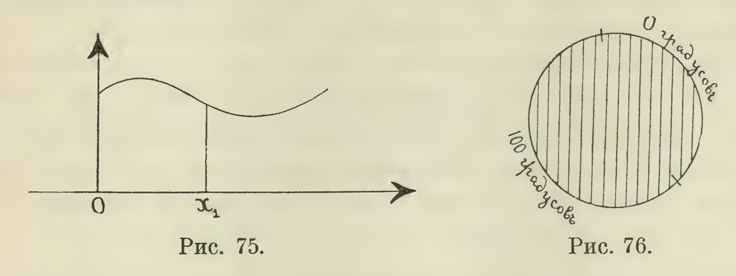


Рис. 75. Рис. 76.

Обратите ваше вниманіе въ особенности на то обстоятельство, что всѣ коэффиціенты степенного ряда $\mathfrak{P}(x)$ и, слѣдовательно, и самая функція y будутъ вполнѣ опредѣлены, если будутъ извѣстны значенія функціи y вдоль какого-нибудь отрѣзка оси x, сколь угодно малой длины, напримѣръ, въ окрестности точки $x=0$; дѣйствительно, тогда будутъ извѣстны значенія всѣхъ производныхъ функціи y для $x=0$ и коэффиціенты можно опредѣлить съ помощью формулъ:

$$y(0)=a_0;\quad y'(0)=a_1;\quad y''(0)=2a_2\ldots.$$

Такимъ образомъ, самый маленькій отрѣзокъ функціи, аналитической въ смыслѣ опредѣленія Лагранжа, вполнѣ ее опредѣляетъ на всемъ ея протяженіи.

Это свойство стоитъ въ полномъ противорѣчіи со свойствами функціи въ смыслѣ второго опредѣленія Эйлера: всякій отрѣзокъ такой функціи можно продолжить произвольнымъ образомъ.

3) Имѣя въ виду дальнѣйшее развитіе понятія о функціи, я долженъ назвать теперь Фурье (Fourier) — одного изъ многочисленныхъ выдающихся математиковъ, жившихъ въ Парижѣ въ началѣ XIX столѣтія. Его главный трудъ — „Аналитическая теорія теплоты" *) — появился въ 1822 году; первое сообщеніе о содержащихся въ немъ теоріяхъ Фурье сдѣлалъ Парижской Академіи уже въ 1807 году. Это произведеніе является источникомъ всѣхъ тѣхъ методовъ современной математической физики, которые можно охарактеризовать, какъ сведеніе всѣхъ проблемъ къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій съ частными производными при заданныхъ значеніяхъ на границахъ („Randwertaufgaben"). Самъ Фурье занимается спеціально вопросомъ о теплопроводности, который въ простѣйшемъ случаѣ состоитъ въ слѣдующемъ: край плоской круглой пластинки поддерживается при опредѣленной температурѣ, напримѣръ, одна часть края при температурѣ таянія льда, другая — при температурѣ кипѣнія воды (см. рис. 76); спрашивается, какое установить стаціонарное распредѣленіе температуръ вслѣдствіе распространенія теплоты въ пластинкѣ. Такимъ образомъ, здѣсь играютъ роль значенія на границахъ, которыя можно по краю пластинки въ отдѣльныхъ частяхъ задавать совершенно произвольно, въ одной части совершенно независимо отъ другой; поэтому, здѣсь на первый планъ выступаетъ само собой второе опредѣленіе функціи Эйлера, а не опредѣленіе Лагранжа.

4) Это же самое Эйлерово опредѣленіе принимаетъ, въ сущности, и Дирихле въ упомянутыхъ выше работахъ, но только онъ его переводитъ на языкъ анализа или — какъ говорятъ теперь — ариѳметизируютъ его. И это дѣйствительно представляется необходимымъ, ибо никакая кривая, какъ бы тонко

*) «Théorie analytique de la chaleur", перепечатано въ собраніи сочиненій: Fourier, Oeuvres T. I (Paris 1888).

она ни была вычерчена, никогда не дастъ точнаго опредѣленія сопряженія значеній y и x по той причинѣ, что толщина черты не позволяетъ произвести ариѳметически точнаго измѣренія нужныхъ значеній.

Дирихле формулируетъ ариѳметическое содержаніе Эйлерова опредѣленія слѣдующимъ образомъ: „Если въ нѣкоторомъ промежуткѣ каждому отдѣльному значенію x отнесено одно опредѣленное значеніе y, то перемѣнная y называется функціей отъ x“. Владѣя, такимъ образомъ, этимъ наиболѣе общимъ понятіемъ функціи, Дирихле все же всякій разъ имѣетъ въ виду, слѣдуя всѣми принятому обычаю, прежде всего непрерывныя или не слишкомъ разрывныя функціи. Если въ ту пору и считали вполнѣ возможными сложныя сгущенія точекъ разрыва, но едва ли предполагали, что такіе случаи могутъ представить интересъ для изученія. Эта точка зрѣнія находитъ свое отраженіе и въ томъ обстоятельствѣ, что Дирихле всегда говоритъ о разложеніи въ рядъ „вполнѣ произвольныхъ функцій“ совершенно такъ же, какъ Фурье говорилъ о „fonctions entièrement arbitraires“); а между тѣмъ онъ очень точно формулируетъ свои „условія Дирихле“, которымъ эти функціи должны удовлетворять.

5) Теперь мы должны принять во вниманіе, что въ то время (около 1830 года) начинается болѣе общая разработка теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго, которая становится постепенно, приблизительно въ теченіе ближайшихъ трехъ десятилѣтій, общимъ достояніемъ математиковъ. Это развитіе связано, прежде всего, съ именами Коши, Римана и Вейерштрасса; первые два геометра исходятъ, какъ извѣстно, отъ дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ, названныхъ по ихъ имени (этимъ уравненіямъ удовлетворяютъ вещественная и мнимая части u, v комплексной функціи $f(x+iy)=u+iv$), между тѣмъ какъ Вейерштрассъ опредѣляетъ функцію степеннымъ рядомъ и совокупностью его аналитическихъ продолженій, примыкая этимъ въ извѣстной степени къ Лагранжу.

И вотъ оказывается, что этотъ переходъ въ область комплексныхъ величинъ привелъ къ сопоставленію и объеди-

ненію обѣихъ разсмотрѣнныхъ выше точекъ зрѣнія на функціи; я остановлюсь на этомъ нѣсколько подробнѣе.

Положимъ $z = x + iy$ и станемъ разсматривать степенной рядъ

$$f(z) = u + iv = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots;$$

предположимъ, что этотъ рядъ сходится при небольшихъ значеніяхъ z, опредѣляя собой, по терминологіи Вейерштрасса, элементъ аналитической функціи. Разсмотримъ его значенія на небольшой окружности радіуса r съ центромъ въ $z = 0$ (рис. 78), лежащей цѣликомъ внутри области сходимости; другими словами, подставимъ вмѣсто z въ степенной рядъ величину $x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

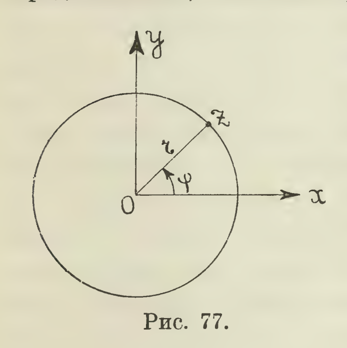


Рис. 77.

$$f(z) = c_0 + c_1 r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + c_2 r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \cdots$$

Если разложимъ коэффиціенты на ихъ вещественныя и мнимыя части:

$$c_0 = \frac{\alpha_0 - i\beta_0}{2}, \quad c_1 = \alpha_1 - i\beta_1, \quad c_2 = \alpha_2 - i\beta_2, \ldots,$$

то для вещественной части f найдемъ такое выраженіе:

$$u(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 r\cos\varphi + \alpha_2 r^2 \cos 2\varphi + \cdots$$
$$+ \beta_1 r\sin\varphi + \beta_2 r^2 \sin 2\varphi + \cdots$$

Мы преднамѣренно взяли чисто мнимыя части коэффиціентовъ c со знаками — съ тѣмъ, чтобы въ послѣднемъ выраженіи всѣ знаки были $+$. Такимъ образомъ, степенной рядъ для $f(z)$ даетъ выраженіе вещественной части u на нашей окружности въ функціи отъ угла φ, посредствомъ тригонометрическаго ряда точно такого же рода, какой мы разсматривали выше, съ коэффиціентами α_0, $r^\nu\alpha_\nu$, $r^\nu\beta_\nu$. Обратно, этотъ тригонометрическій рядъ вполнѣ опредѣляетъ собой всѣ величины $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots,$

а, слѣдовательно, и степенной рядъ, не считая постояннаго слагаемаго $-\frac{i\beta_0}{2}$. Если задано какое-либо распредѣленіе значеній $u(\varphi)$ по окружности, лишь бы его удалось представить въ видѣ тригонометрическаго ряда, — если, другими словами, задана функція въ смыслѣ Дирихле, удовлетворяющая условіямъ Дирихле, то ей можно указаннымъ образомъ отнести опредѣленный степенной рядъ, сходящійся внутри взятой окружности (r), т. е. опредѣленную аналитическую функцію, вещественная часть которой принимаетъ на этой окружности заданныя значенія $u(\varphi)$. Мы видимъ, что въ этомъ порядкѣ идей понятіе функціи, въ смыслѣ Фурье-Дирихле вполнѣ совпадаетъ съ опредѣленіемъ Лагранжа; только та произвольность, которая имѣетъ мѣсто по отношенію къ ходу измѣненія тригонометрическаго ряда $u(\varphi)$ вдоль всей окружности, степеннымъ рядомъ вполнѣ концентрируется въ ближайшей окрестности центра окружности.

6) Но современная наука не остановилась, конечно, на образованіи этихъ понятій, ибо наука, какъ таковая, никогда не знаетъ отдыха и только тотъ или другой изслѣдователь можетъ придти въ изнеможеніе. А именно, въ противоположность тому, что́ я охарактеризовалъ выше, какъ точку зрѣнія Дирихле, въ послѣднія три дѣсятилѣтія при изученіи вещественныхъ функцій стали интересоваться возможно болѣе различными функціями, которыя существенно выходятъ за предѣлы условій Дирихле. При этомъ были найдены весьма замѣчательные типы функцій, содержащіе „отвратительныя скопленія“ самыхъ непріятныхъ особенностей. Здѣсь, прежде всего, возникаетъ вопросъ о томъ, чтобы изслѣдовать, въ какой мѣрѣ остаются въ силѣ при наличности такихъ „уродствъ“ тѣ теоремы, которыя имѣютъ мѣсто для „приличныхъ“ функцій.

7) Наконецъ, сюда же примыкаетъ совершенно новое обобщеніе понятія о функціи, идущее еще дальше. До сихъ поръ функцію всегда считали опредѣленной въ каждой точкѣ континуума всѣхъ вещественныхъ или всѣхъ мнимыхъ значеній x или же, по крайней мѣрѣ, во всѣхъ точкахъ нѣкотораго

интервала или области. Но съ тѣхъ поръ, какъ все болѣе и болѣе стало выступать на первый планъ созданное Г. Канторомъ понятіе о комплексѣ*), согласно которому континуумъ всѣхъ x представляетъ лишь примѣръ „совокупности" объектовъ, — съ этихъ поръ стали разсматривать и такія функціи, которыя опредѣлены только для значеній x какого-либо комплекса, и стали вообще называть y функціей отъ x, если всякому элементу одного комплекса объектовъ (чиселъ или точекъ) x соотвѣтствуетъ опредѣленный элементъ другого комплекса y.

Я хочу здѣсь же отмѣтить одно отличіе этихъ новыхъ представленій отъ прежнихъ: понятія, выясненныя въ пунктахъ 1) — 5), возникли и развились, главнымъ образомъ, въ виду ихъ приложеній къ изученію природы; стоитъ только вспомнить заглавіе сочиненія Фурье! Наоборотъ, новѣйшія изслѣдованія, упомянутыя въ 6) и 7) пунктахъ, представляютъ продукты чисто математической потребности изслѣдованія, которая не имѣетъ вовсе въ виду нуждъ естествознанія; дѣйствительно, до сихъ поръ эти изслѣдованія не нашли еще прямого примѣненія. Конечно, оптимистъ долженъ полагать, что еще придетъ, несомнѣнно, время для такихъ приложеній.

Но поставимъ снова свой обычный вопросъ о томъ, что изъ всего этого должна воспринять школа, что долженъ знать о нихъ учитель и что должны знать ученики?

Прежде всего, если школа нѣсколько, скажемъ на три десятилѣтія, отстаетъ отъ новѣйшихъ успѣховъ нашей науки, если обнаруживается, такъ сказать, извѣстный гистерезисъ, то это вполнѣ естественно и отнюдь не нуждается въ оправданіи. Но въ дѣйствительности имѣетъ мѣсто гораздо болѣе продолжительный гистерезисъ, обнимающій болѣе столѣтія: вѣдь школа, большей частью, игнорируетъ все развитіе науки, имѣвшее мѣсто послѣ Эйлера; такимъ образомъ, для работы реформаторовъ остается еще весьма обширное поле. То, чего мы требуемъ отъ реформы,

*) „Mengenbegriff": — терминъ „Menge" мы переводимъ здѣсь, какъ и въ „Энциклопедіи элементарной математики" словомъ „комплексъ"; переводятъ этотъ терминъ также „множество", „ансамбль", „многообразіе".

Ред.

представляется весьма скромнымъ, если сравнить наши требованія съ современнымъ состояніемъ науки: мы хотимъ, чтобы общее понятіе функціи, въ смыслѣ того или другого опредѣленія Эйлера, проникло, какъ ферментъ, во все преподаваніе математики въ средней школѣ; но его надо вводить не въ формѣ абстрактнаго опредѣленія, а на конкретныхъ примѣрахъ, какіе во множествѣ имѣются уже у Эйлера, чтобы сдѣлать это понятіе живымъ достояніемъ ученика. Что же касается преподавателей математики, то, конечно, желательно, чтобы они, помимо того, были знакомы съ элементами теоріи комплексныхъ функцій. Хотя и нельзя требовать того же по отношенію къ новѣйшимъ концепціямъ ученія о комплексахъ, но все же желательно, чтобы среди многочисленныхъ учителей нашлось хотя бы небольшое число самостоятельно работающихъ людей, которые занялись бы и этими вещами.

Къ сказанному я хотѣлъ бы добавить нѣсколько словъ о томъ, какую важную роль сыграло ученіе о тригонометрическихъ рядахъ во всей этой эволюціи понятій. Подробныя литературныя указанія по этому вопросу вы найдете въ работѣ Буркгардта: „Разложенія въ рядъ по періодическимъ функціямъ“ *) — въ томъ „гигантскомъ отчетѣ“, какъ мы его называемъ въ болѣе тѣсномъ кругу, который вотъ уже 7 лѣтъ, какъ выходитъ отдѣльными выпусками при X томѣ „Jahresbericht der deutschen Mathemakervereinigung“; въ болѣе чѣмъ 9000 цитатъ этотъ отчетъ объединяетъ такое множество литературы, какого не найти нигдѣ.

Первый пришелъ къ изображенію произвольныхъ функцій посредствомъ тригонометрическихъ рядовъ Даніилъ Бернулли, сынъ Ивана Бернулли. Изучая (около 1750 года) акустическую проблему о колебаніяхъ струны, онъ замѣтилъ, что можно получить самый общій видъ колебаній струны посредствомъ наложенія синусоидальныхъ колебаній, соотвѣтствующихъ основному тону и чистымъ обертонамъ; а изъ этого вытекаетъ возможность разложить функцію, изображающую форму струны, въ тригонометрическій рядъ.

*) Burkhardt, „Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen“ (въ особенности во 2 и 3 выпускѣ)

Хотя въ дѣлѣ ознакомленія съ этими рядами вскорѣ были сдѣланы значительные успѣхи, однако, никто не хотѣлъ вѣрить, что съ помощью такихъ рядовъ можно представить любыя функціи, заданныя графически. Это можно объяснить неясностью представленія о такого рода соображеніяхъ, какія теперь въ ученіи о комплексахъ стали совершенно тривіальными. Повидимому, принимали a priori, не умѣя, конечно, выразить это точно, — что комплексъ всѣхъ произвольныхъ непрерывныхъ функцій больше комплекса всѣхъ возможныхъ системъ числовыхъ значеній a_0, a_1, $a_2, \ldots$, b_1, $b_2, \ldots$,*) которая соотвѣтствуетъ совокупности всѣхъ тригонометрическихъ рядовъ.

Но точныя логическія построенія современной теоріи комплексовъ пролили свѣтъ на эти вопросы и обнаружили ложность указаннаго предразсудка. Позвольте мнѣ подробнѣе остановиться на этомъ важномъ вопросѣ. Легко видѣть, что непрерывная

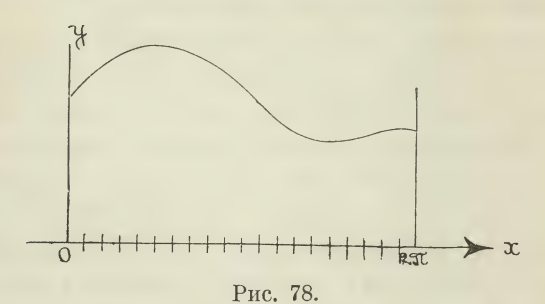


Рис. 78.

функція, опредѣленная произвольнымъ образомъ въ нѣкоторомъ промежуткѣ, напримѣръ $(0, 2\pi)$, будетъ даны на всемъ ея протяженіи, если будутъ даны ея значенія во всѣхъ раціональныхъ точкахъ этого промежутка. Дѣйствительно, въ виду того, что эти значенія во всякомъ промежуткѣ образуютъ сгущенный комплексъ, то ко всякому ирраціональному значенію x можно подойти сколь угодно близко съ помощью (рис. 78) раціональныхъ значеній, и въ силу непрерывности функціи значеніе ея $f(x)$ должно равняться предѣлу значеній въ этихъ безконечно

*) Каждая комбинація a_0, a_1, $a_2, \ldots$, b_1, $b_2, \ldots$, опредѣляетъ тригонометрическій рядъ, если смотрѣть на эти числа, какъ на его коэффиціенты.

близкихъ раціональныхъ точкахъ. Далѣе, какъ извѣстно, совокупность всѣхъ раціональныхъ чиселъ „исчислима“, другими словами, всю ее можно расположить въ такой рядъ, что въ немъ за опредѣленнымъ первымъ элементомъ слѣдуетъ опредѣленный второй,за нимъ третій и т. д. *). А изъ этого слѣдуетъ, что задать произвольную непрерывную функцію значитъ задать исчислимую совокупность константъ — значеній функціи въ расположенныхъ такимъ образомъ раціональныхъ точкахъ. Точно такимъ же образомъ посредствомъ исчислимой совокупности постоянныхъ a_0, a_1, b_1, a_2, $b_2, \ldots$ можетъ быть заданъ опредѣленный тригонометрическій рядъ. Такимъ образомъ, мнѣніе, будто совокупность всѣхъ непрерывныхъ функцій по самой своей природѣ существенно больше совокупности рядовъ, оказывается лишеннымъ всякаго основанія. Ниже мы снова займемся этимъ вопросомъ болѣе обстоятельно.

Фурье первый отрѣшился отъ такого предвзятаго мнѣнія, и въ этомъ заключается его громадное значеніе въ исторіи тригонометрическихъ рядовъ. Хотя онъ и не далъ приведеннаго выше объясненія въ духѣ ученія о комплексахъ, но онъ первый имѣлъ мужество увѣровать въ способность тригонометрическихъ рядовъ изображать произвольныя функціи; руководясь этой вѣрой, онъ, дѣйствительно, вычислилъ нѣсколько характерныхъ примѣровъ разрывныхъ функцій (подобныхъ тѣмъ, какія мы разсмотрѣли выше) и тѣмъ поставилъ внѣ сомнѣній правильность своего убѣжденія! Дѣйствительныя общія доказательства сходимости далъ впервые, какъ я уже говорилъ, Дирихле, бывшій ученикомъ Фурье. Выступленіе Фурье было настоящей революціей; чтобы посредствомъ рядовъ изъ аналитическихъ функцій можно было изобразить такія произвольныя функціи, подчиненныя въ различныхъ частяхъ разсматриваемаго промежутка различнымъ аналитическимъ законамъ, — это представлялось тогдашнимъ математикамъ чѣмъ-то совершенно новымъ и неожиданнымъ. Въ благодарность за открытіе этой истины, тригонометрическіе ряды окрестили именемъ Фурье,

*) См. брошюру Дедекинда „Непрерывность и ирраціональныя числа“. Одесса, „Mathesis“; въ приложенной къ этой брошюрѣ статьѣ г. Шатуновскаго эти идеи достаточно выяснены.

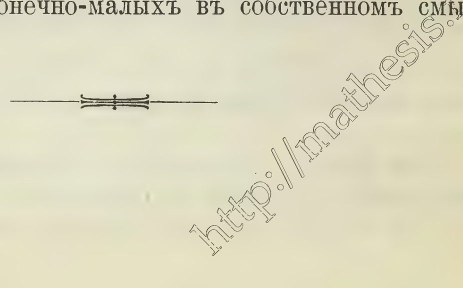
которое, дѣйствительно, пользуется широкимъ распространеніемъ. Конечно, всякое такое приспособленіе собственныхъ именъ къ научной терминологіи всегда представляетъ значительную односторонность, если не прямую несправедливость.

Въ заключеніе я долженъ, хотя бы вкратцѣ, упомянуть о второй заслугѣ Фурье. А именно, онъ разсматривалъ также и предѣльный случай тригонометрическихъ рядовъ, который наступаетъ, если періодъ изображаемой функціи возрастаетъ до безконечности; а такъ какъ функція съ безконечно большимъ періодомъ представляетъ попросту непе|ріодическую функцію, произвольно заданную вдоль всей оси x-овъ, то это даетъ средство изображать и неперіодическія функціи. Чтобы выполнить этотъ переходъ, находятъ сперва посредствомъ линейнаго преобразованія аргумента ряда изображеніе функцій съ любымъ періодомъ l вмѣсто опредѣленнаго періода 2π, а затѣмъ заставляютъ l возрастать до безконечности. При этомъ рядъ переходитъ въ такъ называемый интегралъ Фурье:

$$f(x) = \int_0^\infty \left(\varphi(\nu)\cos\nu x + \psi(\nu)\sin\nu x\right) d\nu,$$

гдѣ $\varphi(\nu)$, $\psi(\nu)$ выражаются опредѣленнымъ образомъ черезъ интегралы, взятые отъ $-\infty$ до $+\infty$, отъ функціи $f(x)$. Такимъ образомъ, различіе заключается въ томъ, что теперь индексъ ν измѣняется непрерывно отъ 0 до ∞, тогда какъ раньше онъ принималъ только значенія 0, 1, 2, 3, . . . , и что вмѣсто коэффиціентовъ a_ν, b_ν стоятъ функціи $\varphi(\nu)\,d\nu$ и $\psi(\nu)\,d\nu$.

На этомъ мы можемъ разстаться съ элементарными трансцендентными функціями, которыми мы до сихъ поръ занимались въ отдѣлѣ, посвященномъ Анализу, и перейти къ разсмотрѣнію исчисленія безконечно-малыхъ въ собственномъ смыслѣ.



III. Исчисленіе безконечно-малыхъ въ собственномъ смыслѣ слова.

Конечно, я предполагаю, что всѣ вы умѣете дифференцировать и интегрировать и не разъ примѣняли это умѣніе. Эту главу мы посвятимъ только вопросамъ общаго характера, какъ напримѣръ, вопросы о логическомъ и психилогическомъ обоснованіи, вопросы о преподаваніи и т. д.

1. Общія замѣчанія относительно исчисленія безконечно-малыхъ.

Я хотѣлъ бы предпослать замѣчаніе общаго характера относительно объема математики. Вы можете часто услышать отъ не-математиковъ, въ особенности отъ философовъ, что математика занимается исключительно выводами логическихъ слѣдствій изъ ясно заданныхъ посылокъ, при чемъ совершенно безразлично, что именно означаютъ эти посылки, истинны ли онѣ или ложны, — лишь бы только онѣ не противорѣчили другъ другу. Совершенно иначе смотритъ на дѣло всякій, кто самъ продуктивно занимается математикой. Въ дѣйствительности тѣ люди судятъ исключительно по той выкристаллизованной формѣ, въ какой принято излагать готовыя математическія теоріи; но изслѣдователь работаетъ въ математикѣ, какъ и во всякой другой наукѣ, совершенно иначе: онъ существенно пользуется своей фантазіей и подвигается впередъ индуктивно, опираясь на эвристическія вспомогательныя средства. Можно привести не мало примѣровъ того, какъ великіе математики находили самыя важныя теоремы, не будучи въ состояніи строго ихъ доказать. Неужели можно не цѣнить такое великое творчество, неужели надо въ угоду приведенному выше опредѣленію математики сказать, что это не математика и что только тѣ

позднѣйшіе математики, которые нашли наконецъ *вылощенныя* доказательства теоремъ, — только они одни двигали математику? Конечно, въ концѣ концовъ, присвоить ли слову то или иное значеніе, вещь условная; но при оцѣнкѣ заслугъ научныхъ работниковъ приходится сказать, что *индуктивная работа того, кто впервые установилъ какое-нибудь предложеніе, имѣетъ, конечно, такую же цѣнность, какъ и дедуктивная работа того, кто его впервые доказалъ*; ибо то и другое одинаково необходимо.

Какъ разъ при изобрѣтеніи и первоначальной разработкѣ исчисленія безконечно-малыхъ это индуктивное творчество, не основанное на связныхъ логическихъ выводахъ, сыграло большую роль; при этомъ весьма часто *самымъ дѣйствительнымъ эвристическимъ средствомъ являлось чувственное воспріятіе*, — я имѣю въ виду *непосредственное* чувственное воспріятіе со всѣми его неточностями; напримѣръ, воспріятіе, при которомъ кривая представляется дѣйствительно чертой опредѣленной толщины, а *не тѣмъ абстрактнымъ* воззрѣніемъ, которое постулируетъ, какъ нѣчто заранѣе выполненное, предѣльный переходъ къ точной одномѣрной линіи. Я хочу въ подтверженіе этого изложить въ краткихъ чертахъ, какъ исторически вырабатывались идеи исчисленія безконечно малыхъ.

Обращаясь прежде всего къ *понятію интеграла*, приходится замѣтить, что оно исторически возникло по поводу *проблемы измѣренія площадей и объемовъ* (*квадратура и кубатура*). Какъ извѣстно, абстрактное логическое опредѣленіе интеграла $\int_b^a f(x)\,dx$, т. е. площади фигуры, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью x-овъ и ординатами $x=a$ и $x=b$, заключается въ томъ, что это есть *предѣлъ суммы всѣхъ узкихъ прямоугольниковъ, вписанныхъ въ эту фигуру*, когда число ихъ безпредѣльно возрастаетъ, а ширина одновременно неограниченно убываетъ (рис. 79). Но съ точки зрѣнія чувственнаго воспріятія представляется естественнымъ опредѣлить разсматриваемую площадь не какъ точный

предѣлъ, а просто, какъ сумму очень большого числа довольно узкихъ прямоугольниковъ; ибо и безъ того дальнѣйшему уменьшенію прямоугольниковъ всегда положитъ конецъ неизбѣжная неточность чертежа.

Съ такими наивными продставленіями мы дѣйствительно встрѣчаемся у самыхъ выдающихся математиковъ въ періодъ возникновенія исчисленія безконечно-малыхъ. Прежде всего я назову Кеплера, который занимается вопросомъ объ измѣреніи объемовъ въ своей „Новой стереометріи винныхъ бочекъ“ *). Главный интересъ для Кеплера представляетъ измѣреніе бочекъ и ихъ наиболѣе цѣлесообразная форма. При этомъ онъ становится цѣликомъ на только-что отмѣченную наивную точку зрѣнія: онъ представляетъ себѣ бочку состоящей изъ

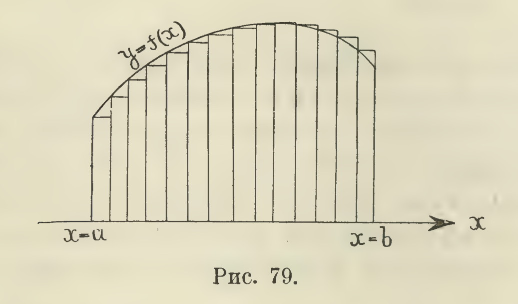


Рис. 79.

большого числа тонкихъ листовъ, напримѣръ, изъ бумаги, и считаетъ объемъ бочки равнымъ суммѣ объемовъ этихъ листовъ (рис. 80), каждый изъ которыхъ представляетъ цилиндръ. Подобнымъ же образомъ поступаетъ онъ и при вычисленіи объемовъ простыхъ геометрическихъ тѣлъ,— напримѣръ, шара. Послѣдній Кеплеръ разсматриваетъ, какъ образованный изъ очень большого числа (рис. 81) небольшихъ пирамидокъ съ вершиной въ центрѣ шара; поэтому весь объемъ равенъ, по извѣстной формулѣ для пирамидъ, произведенію $\frac{r}{3}$ на сумму всѣхъ основаній пирамидокъ. Полагая послѣднюю сумму равной поверхности шара $4\pi r^2$, Кеплеръ получаетъ для объема правильную формулу $\frac{4\pi r^3}{3}$. Впрочемъ, Кеплеръ подчерки-

*) „Nova stereometria doliorum vinariorum“, Lincii, 1615.

ваетъ практическое, эвристическое значеніе такихъ разсужденій, а относительно строгихъ математическихъ доказательствъ отсылаетъ къ сложнымъ разсужденіямъ Архимеда (методъ истощенія).

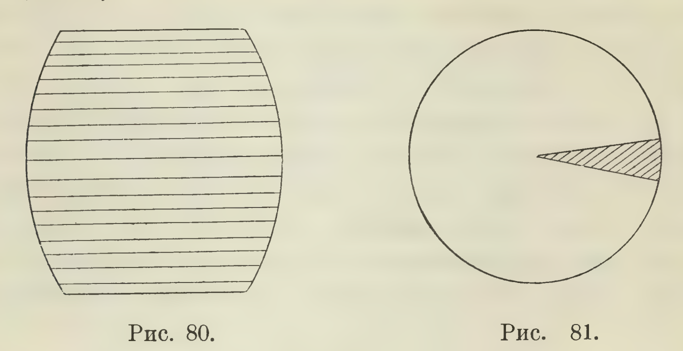


Рис. 80. Рис. 81.

Подобныя же разсужденія встрѣчаются въ книгѣ іезуита Бонавентуры Кавальери „Geometria indivisibilibus continuorum“ *) („геометрія недѣлимыхъ“), въ которой онъ устанавливаетъ принципъ, носящій теперь его имя: объемы двухъ тѣлъ равны, если равны площади сѣченій, проведенныхъ на одинаковой высотѣ въ обоихъ тѣлахъ. Объ этомъ принципѣ Кавальери очень много, какъ извѣ-

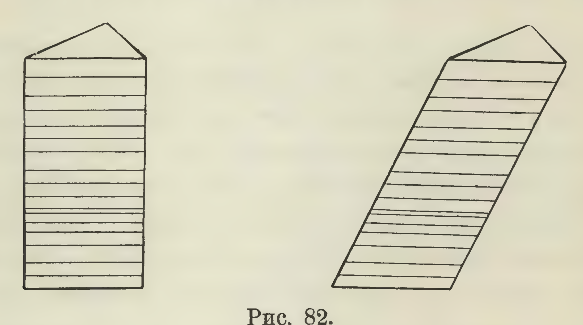


Рис. 82.

стно, говорятъ у насъ въ школѣ, думая съ его помощью избѣгнуть интегральнаго исчисленія, тогда какъ въ дѣйствительности этотъ методъ вполнѣ принадлежитъ интегральному исчисленію. Обоснованіе, которое даетъ Кавальери, сводится къ тому, что онъ

*) Bologna, 1653, первое изданіе 1635 г. Подробнѣе см. на стр. 350.

представляетъ себѣ оба тѣла построенными изъ тонкихъ листковъ, наложенныхъ другъ на друга и по предположенію попарно конгруэнтныхъ между собой; другими словами, одно тѣло можетъ быть получено изъ другого посредствомъ сдвиганія отдѣльныхъ листковъ; при этомъ, конечно, объемъ тѣла не можетъ измѣниться, такъ какъ онъ состоитъ изъ однихъ и тѣхъ же слагаемыхъ и до и послѣ этого процесса.

Подобнымъ же образомъ наивное воззрѣніе приводитъ къ понятію о производной функціи, т. е. къ понятію о касательной къ кривой. Для этого замѣняемъ, — и такъ дѣйствительно и поступали, — кривую прямолинейнымъ многоугольникомъ, вершинами котораго служитъ достаточно большое число точекъ, густо расположенныхъ на кривой. Въ силу природы нашего чувственнаго воспріятія на большомъ разстояніи едва ли возможно отличить кривую отъ такой вереницы точекъ и тѣмъ болѣе отъ самаго многоугольника. Но въ такомъ случаѣ касательную къ кривой приходится опредѣлить просто, какъ прямую, соединяющую двѣ такія точки, непосредственно слѣдующія одна за другой, т. е. какъ продолженіе одной изъ сторонъ многоугольника. Съ абстрактно логической точки зрѣнія такая прямая, конечно, всегда, — какъ бы близко ни лежали сосѣднія точки, — остается только сѣкущей по отношенію къ кривой, а касательная является тѣмъ предѣльнымъ положеніемъ, къ которому эта сѣкущая неограниченно приближается при уменьшеніи разстоянія между точками. Аналогично этому, подъ кругомъ кривизны съ этой наивной точки зрѣнія надо понимать кругъ, проходящій черезъ три послѣдовательныя вершины многоугольника, между тѣмъ какъ, выражаясь точно, надо сказать, что кругъ кривизны есть предѣльное положеніе такого круга при неограниченномъ сближеніи трехъ точекъ.

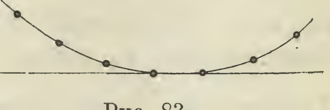


Рис. 83.

Убѣдительность такого рода наивныхъ разсужденій представляется, конечно, различнымъ лицамъ весьма различной.

Многіе, — и къ нимъ принадлежу и я самъ, — чувствуютъ себя въ высшей степени ими удовлетворенными. Другіе же, будучи односторонне расположены къ чисто логической сторонѣ, находятъ, что такія соображенія ничего не говорятъ, и не могутъ согласиться съ тѣмъ, чтобы на нихъ можно было вообще смотрѣть, какъ на основаніе для математическихъ разсужденій.

Съ другой стороны, такіе наивные пріемы мышленія и въ настоящее время очень часто примѣняются всякій разъ, когда хотятъ — *въ математической физикѣ, въ механикѣ, въ дифференціальной геометріи* — примѣнить, какое-нибудь математическое положеніе, такъ какъ тамъ эти пріемы, какъ всѣ вы знаете, весьма цѣлесообразны. Конечно, чистые математики часто смѣются надъ такимъ наивнымъ изложеніемъ; во время моего студенчества говорили, что для физика дифференціалъ — это кусокъ латуни, съ которымъ онъ обращается, какъ со своими аппаратами.

По этому поводу я хочу отмѣтить достоинства *обозначеній Лейбница*, которыя теперь господствуютъ повсюду. Дѣйствительно, они соединяютъ съ *цѣлесообразнымъ указаніемъ на наивное воззрѣніе* также извѣстный намекъ на тотъ абстрактный *предѣльный процессъ*, который дѣйствительно въ этихъ понятіяхъ содержится. Такъ, символъ *Лейбница* $\frac{dy}{dx}$ для обозначенія производной указываетъ на то, что послѣдняя возникаетъ изъ *частнаго*, но при этомъ знакъ d, въ противоположность знаку конечной разности Δ, показываетъ, что тутъ привходитъ и нѣчто новое, а именно *предѣльный переходъ*. Точно такъ же символъ для обозначенія интеграла $\int y dx$ указываетъ, что послѣдній возникаетъ изъ *суммы* малыхъ величинъ, но при этомъ обычный знакъ суммы Σ замѣняется стилизированнымъ S (приходится удивляться тому, что не всѣ знаютъ, что знакъ $\int$ имѣетъ такое значеніе) и это указываетъ на то, что здѣсь къ суммированію присоединяется новый процессъ.

Теперь мы должны, наконецъ, ближе подойти къ вопросу о *логическомъ обоснованіи дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія*; мы непосредственно приступимъ къ разсмотрѣнію этого вопроса въ его историческомъ развитіи.

1) Основная идея заключается — какъ теперь излагаютъ во всѣхъ высшихъ школахъ, такъ что мнѣ приходится только въ двухъ словахъ вамъ это напомнить — въ томъ, что исчисленіе безконечно-малыхъ представляетъ попросту приложеніе общаго понятія о предѣлѣ: производную опредѣляютъ, какъ предѣлъ частнаго соотвѣтственныхъ конечныхъ приращеній перемѣнной и функціи:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

предполагая, что этотъ предѣлъ существуетъ; это ни въ коемъ случаѣ не есть частное, въ которомъ dy и dx имѣютъ самостоятельное значеніе. Точно такъ же интегралъ опредѣляютъ, какъ предѣлъ суммы:

$$\int_a^b y dx = \lim_{\Delta x_i = 0} \sum_{(i)} y_i . \Delta x_i,$$

гдѣ Δx_i обозначаетъ конечныя доли промежутка $a \leqq x \leqq b$, а y_i любыя значенія функціи въ нихъ; всѣ Δx_i должны совмѣстно стремиться къ нулю; но ни въ какомъ случаѣ не должно приписывать реальнаго значенія символу $y . dx$, напримѣръ, какъ слагаемому суммы. Это обозначеніе удержано лишь изъ выше указанныхъ соображеній цѣлесообразности.

2) Такое пониманіе можно найти уже у Ньютона въ очень точной формѣ. Я приведу одно мѣсто въ его главномъ произведеніи: „Principia philosophiae naturalis", вышедшаго въ 1687 году*): „Ultimae rationes illae, quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites, ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant, et quos propius assequi possunt, quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum". Впрочемъ, Ньютонъ совершенно избѣгаетъ въ этомъ сочиненіи примѣненія

*) Reprinted for W. Thomson and H. Blackburn, Glasgow 1871, pag. 38.

исчисленія безконечно-малыхъ, хотя онъ несомнѣнно пользовался имъ при первоначальномъ выводѣ своихъ результатовъ. Дѣйствительно, основное произведеніе, въ которомъ онъ развиваетъ свой методъ безконечно-малыхъ, Ньютонъ написалъ уже въ 1671 г., хотя появилось оно впервые лишь въ 1736 году подъ названіемъ „Methodus fluxionum et serierum infinitarum“ *) („Методъ флюксіи и безконечныхъ рядовъ“).

Въ этомъ произведеніи Ньютонъ развиваетъ, не вдаваясь въ разъясненія принципіальнаго характера, новое счисленіе на многочисленныхъ примѣрахъ. При этомъ онъ примыкаетъ къ одному представленію изъ повседневной жизни, которое дѣлаетъ весьма понятнымъ предѣльный переходъ; а именно, если разсматривать движеніе $x=f(t)$ вдоль оси x-овъ въ моментъ t, то всякій имѣетъ опредѣленное представленіе о томъ, что называется скоростью такого движенія; если присмотрѣться ближе, то увидимъ, что это въ сущности и есть предѣлъ отношенія конечныхъ наращеній $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Эту скорость, съ которой перемѣнная x измѣняется во времени, Ньютонъ и принимаетъ за основаніе своихъ разсужденій, какъ „флюксію“ $\dot{x}$ перемѣнной x. Онъ представляетъ себѣ, что всѣ перемѣнныя x, y зависятъ отъ этой первичной перемѣнной, времени t, такъ что производная является частнымъ двухъ флюксій $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, что мы записали бы теперь подробнѣе такъ:

$$\left(\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}\right).$$

3) Къ этимъ идеямъ Ньютона примыкаетъ цѣлый рядъ математиковъ XVIII столѣтія, которые съ большей или меньшей строгостью строили исчисленіе безконечно-малыхъ на понятіи о предѣлѣ. Я назову лишь нѣсколько именъ: Маклоренъ (C. Maclaurin), написавшій „Treatise of fluxions“ **) („Трактатъ о флюксіяхъ“), который въ качествѣ учебника имѣлъ

*) J. Newtoni Opuscula. T. I (Lausannae, 1744), pag. 29.

**) Edinburgh, 1742.

обширный кругъ вліянія; затѣмъ Даламберъ (d'Alembert), участвовавшій въ большой французской „Методической энциклопедіи“ („Encyklopédie méthodique“); наконецъ, Кэстнеръ (Kästner), жившій здѣсь, въ Гёттингенѣ, проводилъ тѣ же идеи въ своихъ лекціяхъ и книгахъ. Наконецъ, и самъ Эйлеръ принадлежитъ, главнымъ образомъ, къ этому же направленію, хотя у него, пожалуй, проглядываютъ уже и другія тенденціи.

4) Но во всѣхъ этихъ построеніяхъ анализа оставался еще одинъ существенный пробѣлъ, безъ заполненія котораго не могло быть и рѣчи о послѣдовательной системѣ исчисленія безконечно-малыхъ; тогда, хотя и знали опредѣленіе производной, какъ предѣла, но не хватало еще средства для того, чтобы, обратно, по данному значенію производной опредѣлить величину приращенія функціи въ конечномъ промежуткѣ. Такимъ средствомъ является теорема о среднемъ значеніи, и великой заслугой Коши (Cauchy) является то, что онъ вполнѣ оцѣнилъ центральное значеніе этой теоремы и соотвѣтственно этому поставилъ ее во главѣ дифференціальнаго исчисленія. Поэтому не будетъ преувеличеніемъ, если мы назовемъ его основателемъ точнаго анализа безконечно-малыхъ въ современномъ смыслѣ. Основное значеніе имѣютъ въ данномъ отношеніи его „Resumé des leçons sur le calcul infinitésimale“ *), составленное на основаніи его лекцій въ Парижѣ, а также второе изданіе ихъ, въ которомъ появилась только первая часть подъ заглавіемъ „Leçons sur le calcul différentiel“ **).

Теорема о среднемъ значеніи заключается въ слѣдующемъ: если $f(x)$ представляетъ непрерывную функцію, обладающую непрерывною производною $f'(x)$, то всегда найдется между x и $x+h$ такое значеніе $x+\theta h$, что

$$f(x+h)=f(x)+h\cdot f'(x+\theta h),\quad (0\leqq\theta\leqq h).$$

Въ это выраженіе входитъ характерная для теоремъ о среднихъ значеніяхъ величина θ, которая начинающему часто на первыхъ

*) Paris, 1823, перепечатано въ „Oeuvres complètes“, Sér. II, T. IV (Paris, 1889).

**) Paris, 1829; „Oeuvres complètes“, Sér. II, T. IV (Paris, 1889).

порахъ представляется такой удивительной. Въ геометрической формѣ эта теорема представляется весьма наглядной: она утверждаетъ лишь, что между точками x и $x+h$ всегда найдется на кривой такая точка $x+\theta h$, въ которой касательная къ кривой параллельна хордѣ (рис. 84), соединяющей точки x и $x+h$.

5) Какъ же доказать строго ариѳметически теорему о среднемъ значенiи, не прибѣгая къ геометрическимъ представленiямъ? Такое доказательство должно, конечно, состоять только въ томъ, что доказываемую теорему сводятъ на абстрактно установленныя раньше въ самой точной формѣ ариѳметическiя опредѣленiя перемѣнныхъ, функцiй, непрерывности и тому подобныхъ понятiяхъ. Въ этомъ смыслѣ впервые нашли вполнѣ строгое доказательство Вейерштрассъ и его по-

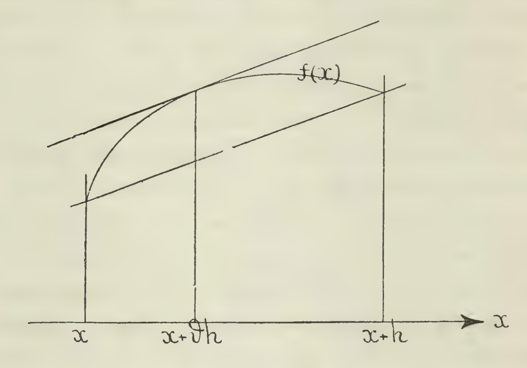


Рис. 84.

слѣдователи, которымъ мы вообще обязаны современнымъ ариѳметическимъ представленiямъ о числовомъ континуумѣ. Я хотѣлъ бы отмѣтить здѣсь лишь характерные моменты этихъ разсужденiй.

Прежде всего нетрудно свести нашу теорему къ тому случаю, когда сѣкущая, ограничивающая нашу дугу, горизонтальна, т. е. когда $f(x)=f(x+h)$ (рис. 85); въ этомъ случаѣ требуется показать, что существуетъ точка, въ которой касательная горизонтальна. А для этого служитъ знаменитая теорема Вейерштасса, по которой всякая непрерывная въ нѣкоторомъ промежуткѣ

функція дѣйствительно принимаетъ въ немъ, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ свое наибольшее и наименьшее значеніе. По крайней мѣрѣ, одно изъ этихъ наибольшихъ и наименьшихъ значеній должно лежать внутри промежутка $(x, x+h)$, если исключить тривіальный случай, когда функція равна постоянной величинѣ. Предположимъ, что это — максимумъ и что онъ приходится въ точкѣ $x+\theta h$, тогда $f(x)$ справа и слѣва отъ этого мѣста имѣетъ меньшія значенія; поэтому отношеніе конечныхъ нарощеній имѣетъ справа отрицательное, а слѣва положительное значеніе. Слѣдовательно, производную, которая, по предположенію, должна существовать въ каждой точкѣ, можно представить въ точкѣ $x+\theta$, какъ предѣлъ либо только положительныхъ, либо только отрицательныхъ значеній, смотря по тому, будемъ ли мы разсматривать ее, какъ предѣлъ отношеній конечныхъ разностей слѣва или какъ предѣлъ такихъ же отно-

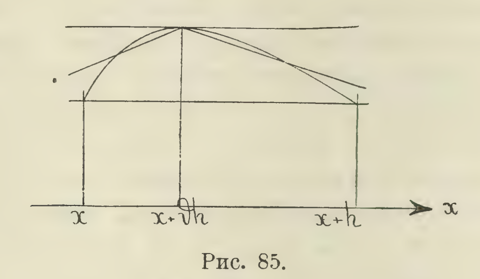


Рис. 85.

шеній справа отъ разсматриваемой точки. Поэтому производная можетъ равняться только нулю, и, такимъ образомъ, оказываются доказанными существованіе горизонтальной касательной и, вмѣстѣ съ тѣмъ, и теорема о среднемъ значеніи.

Параллельно съ этимъ направленіемъ, съ которымъ мы теперь познакомились и въ духѣ котораго построена современная научная математика, въ теченіе столѣтій существовало и распространилось другое существенно отличное пониманіе исчисленія безконечно-малыхъ.

1) Оно исходитъ изъ старыхъ метафизическихъ спекулятивныхъ соображеній о построеніи континуума изъ неразложимыхъ далѣе послѣднихъ „безконечно-малыхъ“ составныхъ частей. Уже въ древности встрѣ-

чаются намеки на такого рода представленія, а у схоластиковъ и затѣмъ у философовъ-іезуитовъ они встрѣтили большое сочувствіе. Какъ на характерный примѣръ я укажу на заглавіе уже упомянутой книги Кавальери „Geometria indivisibilibus continuorum“ („Геометрія сплошныхъ величинъ, состоящихъ изъ недѣлимыхъ“), которое указываетъ на его истинное основное воззрѣніе. Дѣйствительно, точка зрѣнія приближеннаго опредѣленія играетъ у Кавальери лишь второстепенную роль; онъ фактически считаетъ пространство состоящимъ изъ недѣлимыхъ послѣднихъ составныхъ частей, изъ „indivisibilia“. Вообще, для полнаго уясненія этого рода концепціи, очень важно и интересно быть знакомымъ съ тѣми различными расчлененіями, какія представленіе о континуумѣ испытало въ теченіе ряда столѣтій (и даже тысячелѣтій).

2) Къ такого же рода воззрѣніямъ примыкаетъ и Лейбницъ, который раздѣляетъ съ Ньютономъ славу изобрѣтенія исчисленія безконечно-малыхъ. Для него первичнымъ элементомъ исчисленія безконечно-малыхъ является не производная, какъ предѣлъ, а дифференціалъ dx перемѣнной x, который имѣетъ реальное существованіе, какъ послѣдняя недѣлимая составная часть оси абсциссъ, какъ величина, которая меньше всякой конечной величины и все же не равна нулю (безконечно-малая величина). Аналогично этому дифференціалы высшихъ порядковъ d^2x, $d^3x, \ldots$, опредѣляются, какъ безконечно-малыя величины 2-го, 3-го, ... порядковъ, изъ которыхъ каждая безконечно мала по сравненію съ предыдущей; такимъ образомъ, мы получаемъ рядъ качественно различныхъ системъ величинъ.

Впрочемъ, у Лейбница это воззрѣніе отнюдь не является единственнымъ; во многихъ случаяхъ у него выступаетъ на первый планъ точка зрѣнія приближеннаго опредѣленія, согласно которой дифференціалъ dx представляетъ конечный, но столь малый отрѣзокъ, что вдоль него отклоненіе кривой отъ касательной совершенно незамѣтно, неуловимо. Эти метафизическія спекуляціи представляютъ, разумѣется, лишь идеализацію простыхъ психологическихъ фактовъ, имѣющихъ здѣсь мѣсто.

Совершенно отдѣльно стоитъ у Лейбница третій взглядъ, который, пожалуй, наиболѣе для него характеренъ; это — формальное представленіе. Я уже не разъ имѣлъ случай отмѣтить, что въ лицѣ Лейбница мы должны видѣть основателя формальной математики. Идея, о которой идетъ рѣчь, заключается въ слѣдующемъ: совершенно безразлично, какое именно значеніе имѣютъ дифференціалы и даже имѣютъ ли они таковое вообще, лишь бы были соотвѣтственнымъ образомъ опредѣлены правила дѣйствій съ ними; въ такомъ случаѣ, если поступать съ дифференціалами согласно правиламъ, то должно, во всякомъ случаѣ, получиться нѣчто разумное, правильное. При этомъ Лейбницъ постоянно указываетъ на аналогію съ комплексными числами, о которыхъ у него были вполнѣ соотвѣтственныя представленія. Говоря о правилахъ дѣйствій съ дифференціалами, мы имѣемъ въ виду, главнымъ образомъ, формулу:

$$f(x+dx)-f(x)=f'(x)\,.\,dx;$$

теорема о среднемъ значеніи показываетъ, что эта формула будетъ вѣрна только въ томъ случаѣ, если написать въ ней $f'(x+\theta\,.\,dx)$ вмѣсто $f'(x)$; но содержащаяся здѣсь ошибка есть безконечно-малая величина высшаго (второго) порядка, а на такія величины — и въ этомъ заключается главное формальное правило — не должно обращать вниманія при вычисленіяхъ съ дифференціалами.

Самыя важныя работы, опубликованныя Лейбницомъ, помѣщены въ знаменитомъ научномъ журналѣ „Acta eruditorum“ за 1684, 1695 и 1712 годы*). Въ первомъ изъ этихъ томовъ находится статья подъ заглавіемъ „Nova methodus pro maximis et minimis“ (стр. 467 и сл.); она представляетъ собой первое вообще печатное произведеніе, посвященное дифференціальному исчисленію, а именно Лейбницъ излагаетъ въ ней попросту правила дифференцированія. Позднѣйшія работы даютъ также разъясненія принципіальнаго характера, въ которыхъ особенно замѣтно выступаетъ формальная

*) Частью переведены въ собраніи: Ostawalds Klassiker, №. 162 (Herausgeg. von G. Kowalewski, Leipzig 1908).

точка зрѣнія. Въ особенности характерна въ этомъ отношеніи небольшая работа, напечатанная въ 1712 году*), т. е. въ послѣдніе годы жизни Лейбница; въ ней Лейбницъ говоритъ какъ разъ о теоремахъ и опредѣленіяхъ, которыя суть лишь „toleranter vera“ или, по-французски, „passables“: „Rigorem quidem non sustinent, habent tamen usum magnum in calculando et ad artem inveniendi universalesque conceptus valent“ („ибо они не выдерживаютъ строгой критики, но тѣмъ не менѣе находятъ большое примѣненіе въ вычисленіяхъ и годятся, какъ эвристическое средство и для уясненія общихъ понятій)“. Это Лейбницъ относитъ какъ къ комплекснымъ числамъ, такъ и къ безконечности; напримѣръ, когда мы говоримъ о безконечно-маломъ, то „commoditati expressionis seu breviloquio mentalis inservimus, sed non nisi toleranter vera loquimur, quae explicatione rigidantur“ („пользуемся ими для удобства выраженія и для сокращенія рѣчи, но высказываемъ лишь относительныя истины, которыя укрѣпляются объясненіемъ“).

3) Начиная съ Лейбница, новое исчисленіе быстро распространяется по континенту, при чемъ каждая изъ трехъ его постановокъ находитъ своихъ представителей. Прежде всего я долженъ назвать первое руководство по дифференціальному исчисленію, какое только было вообще опубликовано; это — „Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des courbes“ (Paris, 1696, 2 éd. 1715) маркиза Делопиталя (de l'Hospital), одного изъ учениковъ Ивана Бернулли, который, съ своей стороны, поразительно быстро перенялъ новыя идеи отъ Лейбница. Въ этой книгѣ проводится точка зрѣнія приближеннаго опредѣленія; такъ, напримѣръ, кривую Делопиталь разсматриваетъ, какъ многоугольникъ съ очень малыми сторонами,—касательную, какъ продолженіе такой стороны (стр. 11). — Распространенію дифференціальнаго исчисленія Лейбница въ Германіи особенно содѣйствовалъ Христіанъ Вольфъ (Christian Wolff) въ Галле (Halle), опубликовавшій содержаніе своихъ лекцій въ „Elementa matheseos universae“ **). Вольфъ въ самомъ началѣ дифференціальнаго

*) „Observatio...; et de vero sensu Methodi infinitesimalis“, pag. 167 — 169.

**) Впервые появились въ 1710 году. — Новое изданіе: Ed. nov. Hallae, Magdebourgiae, 1742, pag. 545.

счисленія вводитъ дифференціалы Лейбница, но при этомъ особенно подчеркиваетъ, что они не имѣютъ никакого реальнаго эквивалента. А относительно всего того, что для нашего воспріятія является безконечно-малымъ, онъ проводитъ снова исключительно точку зрѣнія приближеннаго опредѣленія. Такъ, въ видѣ примѣра, Вольфъ говоритъ, что высота горы не испытаетъ измѣненія, замѣтнаго для практическаго измѣренія, если снять съ нея или прибавить пылинку.

4) Нерѣдко встрѣчается также метафизическое представленіе, приписывающее дифференціаламъ реальное существованіе. Особенно оно распространено среди философовъ; но и среди представителей математической физики оно находитъ не мало приверженцевъ. Къ числу послѣднихъ принадлежалъ, между прочимъ, Пуассонъ (Poisson), который въ предисловіи къ своему знаменитому трактату по механикѣ („Traité de mécanique", 2-ое изд., Paris, 1833, t. I, стр. 14) въ очень категорической формѣ высказывается въ томъ смыслѣ, что безконечно-малыя величины не только представляютъ орудіе изслѣдованія, но даже вполнѣ реально существуютъ.

5) Вѣроятно, вслѣдствіе философской традиціи, это представленіе перешло въ популярную учебную литературу и играетъ въ ней большую роль и по сію пору. Для примѣра я назову учебникъ Любсена (Lübsen) „Введеніе въ исчисленіе безконечно-малыхъ" *), впервые появившійся въ 1855 году и съ тѣхъ поръ имѣвшій долгое время — быть можетъ, и теперь еще — необычайное вліяніе на широкіе круги публики; въ мое время, несомнѣнно, всякій — въ ученическіе годы или позже — бралъ въ руки эту книгу, и многіе изъ нея впервые почерпнули побужденіе къ дальнѣйшему изученію математики. Любсенъ сперва опредѣляетъ производную при помощи понятія о предѣлѣ, но на ряду съ этимъ, начиная со второго изданія, помѣщаетъ то́, что онъ считаетъ истиннымъ исчисленіемъ безконечно-малыхъ, — мистическія операціи надъ безконечно-малыми величинами. Соотвѣтствующія главы помѣчены звѣздочкой въ знакъ того, что онѣ не содержатъ новаго матеріала. Здѣсь дифференціалы вводятся, какъ послѣднія доли, ко-

*) „Einleitung in die Infinitesimalrechnung", 8 Aufl. Leipzig, 1899.

торыя возникаютъ, напримѣръ, при послѣдовательномъ дѣленіи конечной величины пополамъ, въ безконечномъ, неподдающемся опредѣленію числѣ; каждая изъ такихъ долей, „хотя и отлична отъ абсолютнаго нуля, но не поддается установленію; она представляетъ собой безконечно-малую (Infinitesimalgrösse), дуновеніе, мгновеніе“; далѣе слѣдуетъ англійская цитата: „Безконечно-малое — это духъ отошедшей величины“ (стр. 59, 60). Дальше, въ другомъ мѣстѣ (стр. 76) читаемъ еще: „Методъ безконечно-малыхъ, какъ видитъ читатель, очень тонкій, но правильный. Если же это недостаточно явствуетъ изъ предыдущаго и послѣдующаго, то причиной этого являются недостатки нашего изложенія“. Весьма интересно познакомиться съ этими разсужденіями ближе.

Для сопоставленія я назову еще распространенный „Курсъ Опытной Физики“ Вюлльнера*), въ которомъ первому тому предпослано краткое изложеніе дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія; этимъ авторъ имѣетъ въ виду дать возможность ознакомиться съ необходимыми для физики свѣдѣніями изъ анализа безконечно-малыхъ естественникамъ и медикамъ, которые въ гимназіи не пріобрѣли этихъ знаній. Вюлльнеръ начинаетъ (стр. 31) съ опредѣленія того, что́ такое безконечно-малая величина dx, и затѣмъ переходитъ къ болѣе трудному опредѣленію второго дифференціала d^2x. Просмотрите это введеніе съ точки зрѣнія математика и подумайте о томъ, какое получается противорѣчіе: въ школѣ изгоняютъ анализъ безконечно-малыхъ, какъ слишкомъ трудный предметъ, а потомъ приходится постигнуть его при помощи такого рода изложенія на 10 страницахъ, не только совершенно неудовлетворительнаго, но и крайне труднаго для пониманія.

Причину живучести подобныхъ воззрѣній наряду съ математически-точнымъ методомъ предѣловъ надо искать въ весьма распространенной потребности заглянуть, минуя абстрактно-логическія разсужденія способа предѣловъ, поглубже въ самую природу непрерывныхъ величинъ; желаютъ составить себѣ о ней болѣе конкретныя представленія, чѣмъ тѣ, которыя возникаютъ, когда мы подчеркиваемъ только психологическіе моменты, опредѣляющіе понятіе о предѣлѣ. Въ этомъ отношеніи характеренъ

*) Wüllner, „Lehrbuch der Experimentalphysik“, 6. Aufl., Leipzig, 1907.

одинъ афоризмъ, который, насколько я знаю, принадлежитъ философу Гегелю и въ прежнее время часто повторялся въ книгахъ и лекціяхъ; онъ утверждаетъ, что функція $y=f(x)$ изображаетъ бытіе (das Sein) вещей, а производная — ихъ становленіе (das Werden). Конечно, въ этомъ утвержденіи есть нѣчто заманчивое; но только надо ясно сознавать, что подобныя фразы нисколько не содѣйствуютъ дальнѣйшему развитію математики, ибо послѣдняя нуждается въ болѣе точныхъ понятіяхъ.

Въ новѣйшей математикѣ „актуально“ безконечно-малыя величины снова попали въ честь, но только въ совершенно иномъ порядкѣ идей; именно мы встрѣчаемъ ихъ въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ Веронезе (Veronese), а также въ „Основаніяхъ Геометріи“ („Grundlagen der Geometrie“, 2. Aufl., Leipzig 1903) Гильберта (Hilbert). Идея, которую я имѣю въ виду, въ самыхъ краткихъ словахъ сводится къ слѣдующему. Разсматриваютъ геометрію, въ которой заданіе $x=a$ (a — обыкновенное вещественное число), опредѣляетъ собой не одну только точку оси x-овъ, а безконечное множество точекъ, абсциссы которыхъ отличаются между собой на конечныя кратныя безконечно-малыхъ величинъ различныхъ порядковъ η, ξ, ...; такимъ образомъ, точка будетъ опредѣлена, если дано

$$x=a+b\eta+c\xi+\cdots,$$

гдѣ a, b, c, ... означаютъ обыкновенныя вещественныя числа. У Гильберта вопросъ поставленъ такъ; онъ устанавливаетъ относительно введенныхъ такимъ образомъ величинъ особыя положенія въ качествѣ аксіомъ и при ихъ помощи обнаруживаетъ, что съ ними можно оперировать безъ риска впасть во внутреннее противорѣчіе. Самый важный моментъ представляетъ при этомъ надлежащій выборъ критеріевъ сравненія числа x и второго числа $x_1=a_1+b_1\eta+c_1\xi+\cdots$. Прежде всего, конечно, устанавливаютъ, что $x>$ или $<x_1$, если $a>$ или $<a_1$; если же $a=a_1$, то вопросъ о сравненіи величинъ рѣшаютъ вторые коэффиціенты въ томъ смыслѣ, что $x \gtreqless x_1$, если $b \gtreqless b_1$; если же и $b=b_1$, то коэффиціенты c даютъ рѣшеніе вопроса

и т. д. Вы поймете это лучше всего, если не будете пытаться связывать съ написанными буквами никакихъ особенныхъ представленій.

Оказывается, что съ такими объектами можно оперировать по этимъ и еще другимъ, указываемымъ далѣе, правиламъ совершенно аналогично тому, какъ оперируютъ съ конечными числами; при этомъ отпадаетъ только одна существенно важная теорема, имѣющая мѣсто въ системѣ обыкновенныхъ вещественныхъ чиселъ, а именно теорема, гласящая, что ко всякимъ двумъ положительнымъ числамъ c и a, какъ бы мало ни было первое изъ нихъ и какъ бы велико ни было второе, можно подыскать такое цѣлое число n, чтобы было $nc > a$. Въ данномъ случаѣ изъ приведенныхъ опредѣленій непосредственно вытекаетъ, что *любое конечное кратное* $n.\eta$ *величины* η *всегда будетъ меньше всякаго конечнаго положительнаго числа* a; это именно свойство и характеризуетъ η, какъ безконечно-малую величину. Точно такъ же всегда $n.\xi < \eta$, т. е. ξ *есть безконечно-малая величина высшаго порядка, чѣмъ* η. Такую систему чиселъ называютъ *не-архимедовой*, такъ какъ упомянутую теорему о конечныхъ числахъ называютъ *аксіомой Архимеда*; *Архимедъ* устанавливаетъ ее, какъ недоказуемое — вѣрнѣе, какъ не допускающее дальнѣйшаго доказательства — основное допущеніе относительно конечныхъ чиселъ. Тотъ фактъ, что эта аксіома перестаетъ имѣть мѣсто, *является характернымъ моментомъ для появленія актуально безконечно-малыхъ величинъ*. Впрочемъ, присвоеніе этой аксіомѣ имени *Архимеда*, какъ и большинство другихъ именныхъ обозначеній, является исторически неточнымъ: уже за сто лѣтъ до *Архимеда* ее высказалъ *Евклидъ*, который, повидимому, тоже не самъ ее нашелъ, а заимствовалъ, какъ и очень многія другія изъ своихъ теоремъ, у *Евдокса Родосскаго*.

Изученіе не-архимедовыхъ величинъ, примѣняемыхъ, въ особенности, въ качествѣ координатъ для построенія „*неархимедовой геометріи*“, имѣетъ цѣлью болѣе глубокое проникновеніе въ сущность тѣхъ положеній, которыми устанавливается непрерывность, и принадлежитъ къ обширной группѣ изслѣдованій о логической зависимости различныхъ аксіомъ обык-

новенной геометріи и ариѳметики; съ этой цѣлью обыкновенно строятъ такую искусственную числовую систему, въ которой имѣетъ мѣсто только часть всѣхъ аксіомъ, и изъ этого заключаютъ о логической независимости прочихъ аксіомъ отъ первыхъ.

Естественно возникаетъ вопросъ о томъ, нельзя ли распространить на такія числовыя системы анализъ безконечно-малыхъ въ строгой современной его постановкѣ; другими словами, нельзя ли построить своего рода не-архимедовъ Анализъ. Первая и самая главная задача заключалась бы въ доказательствѣ, на основаніи принятыхъ аксіомъ, теоремы о среднемъ значеніи: $f(x+h)-f(x)=$ $=h.f'(x+\theta h)$. Я не хочу утверждать, что въ этомъ направленіи успѣхъ невозможенъ, но во, всякомъ случаѣ, до сихъ поръ никому изъ тѣхъ (а ихъ не мало!), кто занимается актуально безконечно-малыми величинами, не удалось добиться какихъ-либо положительныхъ результатовъ въ этомъ направленіи.

Чтобы помочь вамъ лучше оріентироваться, я замѣчу еще, что со времени Коши терминъ „безконечно-малый" стали употреблять въ современныхъ учебникахъ въ другомъ смыслѣ. А именно, теперь никогда не говорятъ, что величина безконечно-мала, но говорятъ лишь, что она становится безконечно-малой, и видятъ въ этомъ лишь удобное сокращенное обозначеніе того обстоятельства, что разсматриваемая величина неограниченно убываетъ, стремясь къ нулю.

Теперь я долженъ упомянуть еще о той реакціи, которую вызвало такое обоснованіе анализа на понятіи о безконечно-малыхъ величинахъ. Въ этихъ представленіяхъ очень скоро почувствовали что-то мистическое, недоказуемое; въ результатѣ нерѣдко возникало даже предубѣжденіе, будто дифференціальное счисленіе является особой философской системой, которую нельзя доказать, но въ которую можно только вѣрить, или даже прямо-таки, выражаясь грубо, — подвохомъ, плутней. Наиболѣе рѣзкимъ критикомъ въ этомъ смыслѣ является философъ Бёркли (Berkeley), который въ небольшой книжкѣ подъ заглавіемъ „Аналистъ"*) въ весьма забавной формѣ вышучиваетъ неясности, царившія въ то время въ математикѣ. При этомъ Бёркли исходитъ изъ той мысли, что по отношенію къ принципамъ и

*) „The analyst", London, 1734.

методамъ математики критика должна предоставить себѣ такую же свободу, какую математики примѣняютъ, въ свою очередь, къ тайнамъ религіи, и затѣмъ самымъ ожесточеннымъ образомъ нападаетъ на всѣ методы новаго Анализа — какъ на исчисленіе флюксій, такъ и на оперированіе съ дифференціалами; въ результатѣ онъ приходитъ къ тому выводу, что все построеніе Анализа неясно и совершенно непонятно.

Подобныя воззрѣнія сохранились и до настоящаго времени именно среди философовъ; они все еще знаютъ лишь операціи съ дифференціалами и совершенно не усвоили себѣ способа предѣловъ, разработаннаго въ новѣйшее время до полной строгости. Для примѣра, позвольте мнѣ процитировать одно только мѣсто изъ книги Баумана „Пространство, время и математика“ *), напечатанной въ шестидесятыхъ годахъ: „такимъ образомъ, мы отвергаемъ то логическое и метафизическое обоснованіе, которое далъ Счисленію (Kalkul) Лейбницъ, но самаго Счисленія мы не касаемся. Мы считаемъ его геніальнымъ изобрѣтеніемъ, оправдавшимъ себя на практикѣ, скорѣе искусствомъ, чѣмъ наукой; построить его чисто логически невозможно, изъ элементовъ обыкновенной математики оно не получается...“

Этой же реакціей противъ дифференціаловъ слѣдуетъ объяснять и не разъ уже упомянутую нами попытку Лагранжа (въ его „Théorie des fonctions analytiques“), которая представляется намъ теперь опять въ новомъ освѣщеніи. Лагранжъ хочетъ совершенно удалить изъ теоріи не только безконечно-малыя величины, но и вообще всѣ предѣльные переходы; онъ ограничивается разсмотрѣніемъ такихъ функцій, которыя можно опредѣлить посредствомъ степенныхъ рядовъ:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

а ихъ „производныя функціи $f'(x)$“ (Лагранжъ не признаетъ производной, какъ отношенія дифференціаловъ и не употребляетъ символа $\frac{dy}{dx}$) опредѣляетъ чисто формальнымъ образомъ, а именно посредствомъ новаго степенного ряда:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

*) Baumann, „Raum, Zeit und Mathematik“, Berlin, 1869, Bd. II, стр. 55.

Въ соотвѣтствіи съ этимъ, онъ говоритъ не о дифференціальномъ исчисленіи, а объ „исчисленіи производныхъ" (Derivationscalcul). Но, конечно, такое изложеніе не могло долго удовлетворять математиковъ. Дѣйствительно, съ одной стороны, опредѣленіе функціи, принимаемое Лагранжемъ, слишкомъ узко, какъ мы это выше подробно выясняли; а съ другой стороны, и это наиболѣе важно, такія исключительно формальныя опредѣленія дѣлаютъ невозможнымъ болѣе глубокое пониманіе сущности понятія о производной или объ интегралѣ; они совершенно не принимаютъ во вниманіе того, что мы назвали психологическимъ моментомъ; вопросъ о томъ, почему занимаются именно такими своеобразными „производными" рядами, остается безъ отвѣта. Наконецъ, безъ изученія предѣловъ можно обойтись только въ томъ случаѣ, если оставить совершенно безъ вниманія вопросъ о сходимости этихъ степенныхъ рядовъ; но лишь только мы захотимъ заняться этимъ вопросомъ, — а это является, конечно, необходимымъ для дѣйствительнаго примѣненія рядовъ, — какъ увидимъ себя вынужденными прибѣгнуть къ тому же самому понятію о предѣлѣ, ради устраненія котораго и придумана вся система.

Этимъ я закончу краткій историческій очеркъ развитія анализа безконечно-малыхъ; я по необходимости ограничился тѣмъ, что отмѣтилъ значеніе наиболѣе выдающихся людей, игравшихъ руководящую роль. Конечно, такой очеркъ слѣдовало бы дополнить болѣе подробнымъ изученіемъ литературы этого періода. Много интересныхъ въ этомъ смыслѣ указаній вы можете найти въ рефератѣ Симона (Max Simon), представленномъ съѣзду Естествоиспытателей въ 1896 году въ Франкфуртѣ, подъ заглавіемъ: „Къ исторіи и философіи дифференціальнаго счисленія".

Если въ заключеніе мы окинемъ быстрымъ взглядомъ отношеніе школьнаго преподаванія къ исчисленію безконечно-малыхъ, то увидимъ, что на первомъ отразился весь ходъ развитія послѣднаго. Всюду, гдѣ въ прежнее время занимались въ школѣ анализомъ безконечно-малыхъ, мы видимъ, — судя, по крайней мѣрѣ, по учебникамъ, а иначе и нельзя судить о дѣлѣ преподаванія, — полное отсутствіе яснаго представленія о точномъ научномъ построеніи анализа безконечно-малыхъ при помощи метода пре-

деловъ; этотъ методъ выступалъ лишь въ болѣе или менѣе расплывчатомъ видѣ; на первомъ планѣ стояли операціи съ безконечно-малыми величинами, а подчасъ и исчисленіе производныхъ,какъ его понимаетъ Лагранжъ. Разумѣется, такое преподаваніе было лишено не только строгости, но и доступности, и нѣтъ ничего удивительнаго въ томъ, что постенно стало распространяться весьма рѣзкое отрицательное отношеніе къ преподаванію анализа въ школѣ. Въ семидесятыхъ и восьмидесятыхъ годахъ дошли даже до прямого запрещенія преподавать анализъ, не исключая и реальныхъ школъ.

Но это, конечно, не помѣшало, какъ я уже раньше имѣлъ случай отмѣтить, примѣненію способа предѣловъ въ школѣ въ тѣхъ случаяхъ, когда въ немъ оказывалась необходимость; но только при этомъ избѣгали самаго названія или даже иной разъ, пожалуй, думали, что занимаются чѣмъ-то другимъ. Я приведу только три примѣра, которые большинству изъ васъ знакомы изъ вашего школьнаго времени:

a) Общеизвѣстное вычисленіе длины окружности и площади круга по способу приближенія къ кругу посредствомъ вписанныхъ и описанныхъ правильныхъ многоугольниковъ представляетъ, конечно, точное интегрированіе. Какъ извѣстно, этотъ способъ весьма древняго происхожденія, а именно принадлежитъ Архимеду; этому своему возрасту, восходящему до античной эпохи, онъ и обязанъ тѣмъ, что сохранился въ школѣ.

b) Преподаваніе физики, въ особенности ея механическаго отдѣла, нуждается безусловно въ понятіяхъ о скорости и ускореніи и въ ихъ примѣненіи къ законамъ паденія тѣлъ. Но ихъ выводъ представляетъ не что иное, какъ интегрированіе дифференціальнаго уравненія $z''=g$, приводящее къ функціи $z=\frac{1}{2}gt^2+at+b$, гдѣ a и b суть постоянныя интегрированія. Этотъ выводъ школа вынуждена дать въ виду требованій, предъявляемыхъ физикой, и тѣ методы, какіе школа примѣняетъ, представляютъ, конечно, болѣе или менѣе точные методы интегрированія, но только въ замаскированномъ видѣ.

c) Во многихъ школахъ сѣверной Германіи проходятъ теорію maxima и minima по способу, которой называютъ тамъ методомъ Шельбаха (Schellbach), выдающагося педагога-математика, о которомъ всѣ вы, вѣроятно, слыхали. Этотъ спо-

собѣ состоитъ въ томъ, что для нахожденія extrema функціи $y = f(x)$ полагаютъ:

$$\lim_{x = x_1} \left(\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \right) = 0;$$

но это вѣдь и есть методъ дифференціальнаго исчисленія съ тою лишь разницей, что не произносятъ слова „производная". Самъ Шельбахъ воспользовался, конечно, этимъ пріемомъ въ такомъ видѣ, когда преподаваніе дифференціальнаго исчисленія въ школахъ было запрещено, а онъ не захотѣлъ отказаться отъ этихъ идей. Но его ученики переняли пріемъ отъ него въ томъ же видѣ, назвали его по имени учителя, и такимъ образомъ — это дѣлается даже еще и теперь — ученикамъ преподносятъ, какъ открытіе Шельбаха, вещи, которыя были извѣстны Лейбницу и Ньютону.

Позвольте мнѣ въ связи съ этимъ охарактеризовать отношеніе къ этому вопросу нашихъ реформаторскихъ стремленій, которыя въ настоящее время встрѣчаютъ въ Германіи, какъ и въ другихъ странахъ — въ особенности во Франціи, все больше и больше сочувствія и, надо надѣяться, будутъ играть руководящую роль въ преподаваніи математики въ ближайшія десятилѣтія. Мы хотимъ, чтобы понятія, обозначаемыя символами $y = f(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\int y dx$, стали знакомы ученику вмѣстѣ съ этими обозначеніями, но не въ видѣ новой абстрактной дисциплины, а въ органической связи со всѣмъ преподаваніемъ; при этомъ нужно подвигаться впередъ постепенно, начиная съ самыхъ простыхъ примѣровъ. Такъ, въ 4-мъ и 5-мъ классахъ надо начинать съ подробнаго изученія функціи $y = ax + b$ при опредѣленныхъ численныхъ значеніяхъ коэффиціентовъ a, b и функціи $y = x^2$, пользуясь клѣтчатой бумагой; при этомъ нужно стараться постепенно выяснить учащимся понятіе о подъемѣ или паденіи кривой и о площади. Въ послѣднемъ классѣ можно будетъ сдѣлать общій обзоръ пріобрѣтенныхъ такимъ образомъ знаній, при чемъ само собой обнаружится, что ученики вполнѣ владѣютъ основами или начатками анализа безконечно-малыхъ. Главная цѣль

при этомъ должна заключаться въ томъ, чтобы выяснить ученику, что здѣсь нѣтъ ничего мистическаго, что все это простыя вещи, который всякій можетъ понять.

Неоспоримая необходимость такихъ реформъ явствуетъ изъ того, что они имѣютъ въ виду выясненіе тѣхъ математическихъ понятій, которыя и теперь господствуютъ во всѣхъ безъ исключенія приложеніяхъ математики во всевозможныхъ областяхъ и безъ которыхъ совершенно теряетъ почву всякое обученіе въ высшей школѣ, начиная съ простѣйшихъ занятій по опытной физикѣ. Я могу ограничиться здѣсь этими краткими замѣчаніями, тѣмъ болѣе, что какъ разъ этотъ вопросъ подробно разобранъ въ книгѣ Klein-Schimmack (см. примѣчаніе на стр. 3).

Чтобы показать приложеніе этихъ общихъ разсужденій къ конкретнымъ вещамъ, я разберу подробнѣе одинъ изъ вопросовъ исчисленія безконечно-малыхъ, а именно теорему Тэйлора (Taylor).

2. Теорема Тэйлора.

Обращаясь къ этому вопросу, я отклонюсь отъ изложенія, обычно принятаго въ учебникахъ, въ томъ же направленіи, какъ и выше въ главѣ о тригонометрическихъ рядахъ; а именно, на первый планъ я поставлю конечный рядъ, важный въ практическомъ отношеніи, и наглядное выясненія всего матеріала при помощи чертежей. Благодаря этому все пріобрѣтаетъ вполнѣ элементарный характеръ и становится весьма понятнымъ.

Я исхожу изъ такого вопроса: нельзя ли приближенно изобразить ходъ любой кривой $y=f(x)$, на нѣкоторомъ ея протяженіи, при помощи другихъ возможно болѣе простыхъ кривыхъ? Проще всего было бы замѣнить кривую въ окрестности точки $x=a$ прямолинейной касательной къ ней въ этой точкѣ:

$$y=A+Bx;$$

такъ именно и поступаютъ въ физикѣ и другихъ приложеніяхъ всякій разъ, когда при разложеніи функціи въ рядъ сохраняютъ только первыя степени независимой перемѣнной, а

остальныя отбрасываютъ. Можно получить подобнымъ же образомъ еще лучшія приближенія, если воспользоваться параболами 2-го, 3-го,... порядка:

$$y = A + Bx + Cx^2, \quad y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3, \ldots,$$

или, выражаясь аналитически, многочленами высшихъ степеней; примѣненіе ихъ особенно цѣлесообразно по той причинѣ, что ихъ удобнѣе всего вычислять. Мы будемъ такъ проводить эти кривыя, чтобы онѣ примыкали какъ можно тѣснѣе къ данной кривой въ точкѣ $x = a$, т. е. будемъ брать соприкасающіяся параболы. Такъ, напримѣръ, парабола 2-го порядка будетъ имѣть съ кривой $y = f(x)$ не только общую ординату, но и одинаковыя первую и вторую производную (т. е. будетъ „соприкасаться" съ нею); у

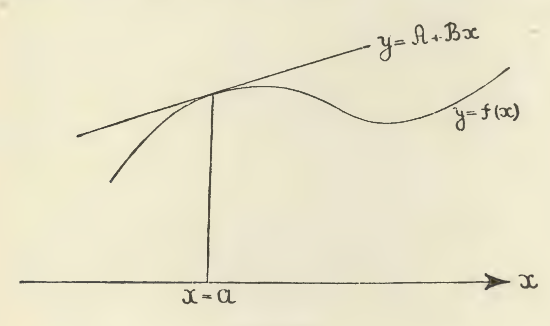


Рис. 86.

кубической параболы также и третья производная будетъ совпадать съ 3-ей производной функціи $y = f(x)$. Простое вычисленіе даетъ для соприкасающейся параболы n-го порядка такое аналитическое выраженіе:

$$y = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x - a) + \frac{f''(a)}{1 . 2}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{1 . 2 \ldots n}(x - a)^n;$$
$$(n = 1, 2, \ldots)$$

а это какъ разъ первые n членовъ ряда Тэйлора.

Изслѣдованіе вопроса о томъ, представляютъ ли эти многочлены годныя къ употребленію приближенныя кривыя, и, если представляютъ, то въ какой именно

формѣ,—это изслѣдованіе мы начнемъ съ разсужденій скорѣе опытнаго характера, какъ и въ случаѣ тригонометрическихъ рядовъ (стр. 317—318). Я могу показать вамъ на экранѣ нѣсколько чертежей **соприкасающихся параболъ** первыхъ порядковъ для нѣкоторыхъ простыхъ кривыхъ, которые изготовилъ также г. **Шиммакъ**. Это, прежде всего, **слѣдующія 4 функціи** вмѣстѣ съ ихъ соприкасающимися параболами въ точкѣ 0; всѣ онѣ имѣютъ при $x = -1$ особую точку:

$$1)\ \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$2)\ (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \cdots$$

$$3)\ (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

$$4)\ (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$$

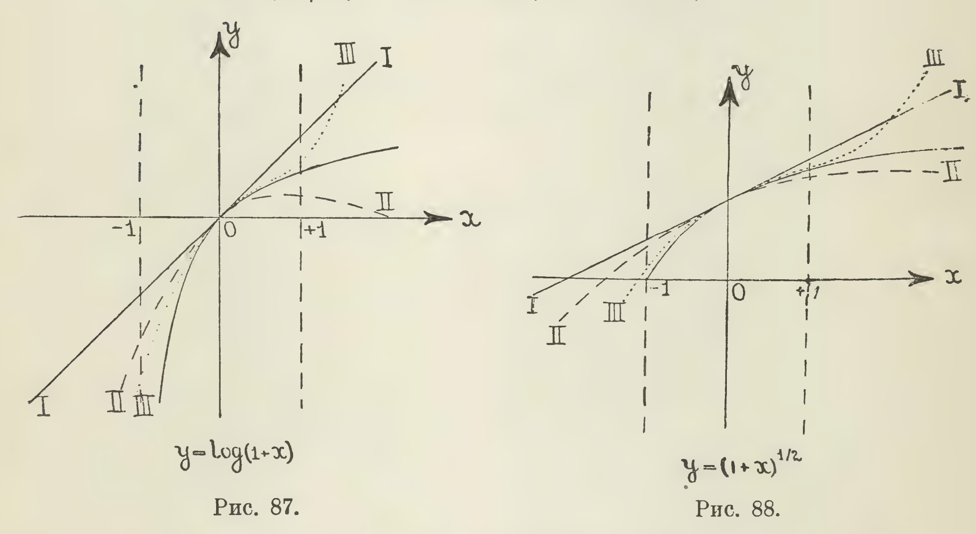


Рис. 87. Рис. 88.

Чѣмъ выше порядокъ соприкасающихся параболъ, тѣмъ больше онѣ приближаются къ оригинальной кривой въ промежуткѣ $(-1, +1)$; но замѣчательно, что справа отъ $x = +1$ онѣ отклоняются отъ кривой вверхъ или внизъ тѣмъ сильнѣе, чѣмъ выше ихъ порядокъ (см. рис. 87—90).

Въ **особой точкѣ** $x = -1$, въ которой функціи 1), 3), 4) становятся безконечно-большими, ординаты послѣдовательныхъ соприкасающихся параболъ принимаютъ все большія и большія значенія. Во второмъ же случаѣ, въ которомъ кривая, изобра-

жаемая оригинальной функціей, имѣетъ въ точкѣ $x = -1$ вертикальную касательную и не имѣетъ продолженія влѣво отъ этой точки, послѣдовательныя параболы, хотя и продолжаются влѣво отъ этой точки, но все болѣе и болѣе приближаются въ ней къ оригинальной кривой, все круче и круче опускаясь книзу. Въ симметрично расположенной точкѣ $x = +1$ въ первыхъ двухъ случаяхъ параболы примыкаютъ все ближе и ближе къ оригинальнымъ кривымъ; въ 3-емъ случаѣ ихъ ординаты попеременно равны 1 и 0, а ордината оригинальной кривой равна $\frac{1}{2}$; въ 4-мъ случаѣ параболы получаютъ попеременно положительныя и отрицательныя значенія, растущія до безконечности.

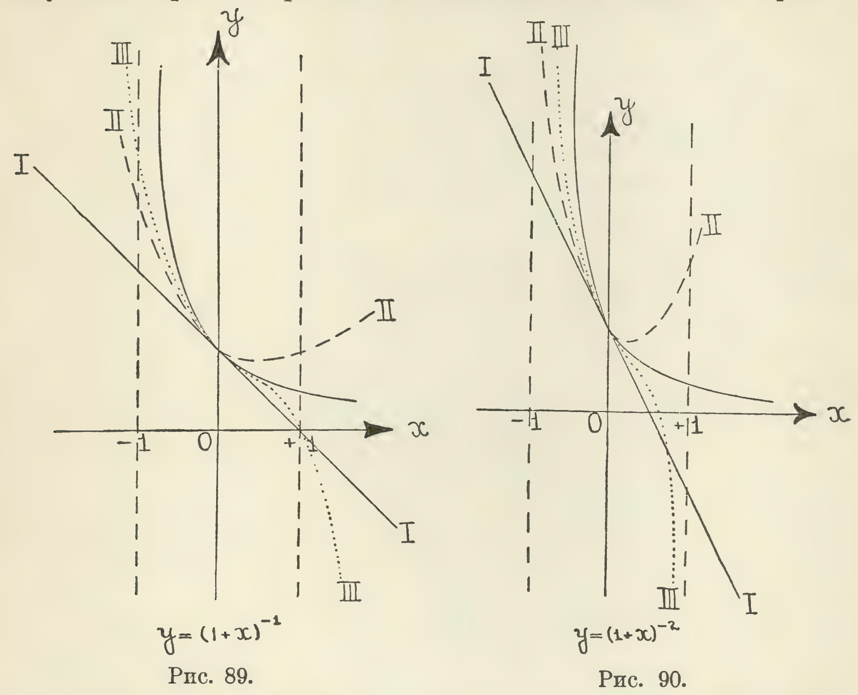


Рис. 89.

Рис. 90.

Кромѣ того, у меня здѣсь имѣются чертежи соприкасающихся параболъ для **двухъ цѣлыхъ трансцендентныхъ функцій:**

$$5)\ e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$6)\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Вы видите, что протяженіе, на которомъ соприкасающіяся параболы представляютъ годныя приближенія къ оригинальной кривой, становится тѣмъ больше, чѣмъ выше ихъ порядокъ. Въ случаѣ функціи $\sin x$ особенно ясно видно, какъ параболы стараются все больше и больше подражать колебаніямъ синусоиды.

Замѣчу, что вычерчиваніе подобныхъ кривыхъ для наиболѣе простыхъ случаевъ представляетъ, пожалуй, подходящій матеріалъ и для школы.

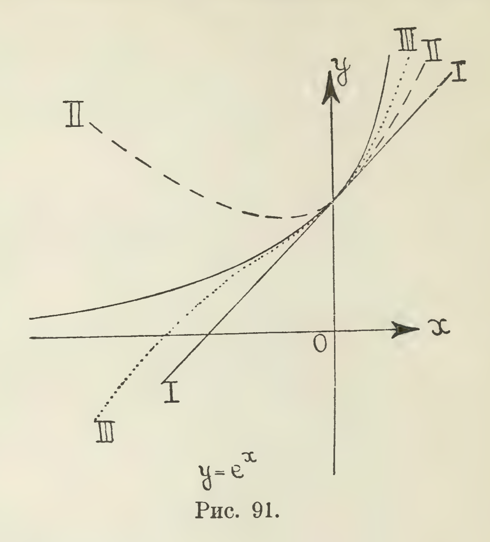


Рис. 91.

Собравши, такимъ образомъ, опытный матеріалъ, мы

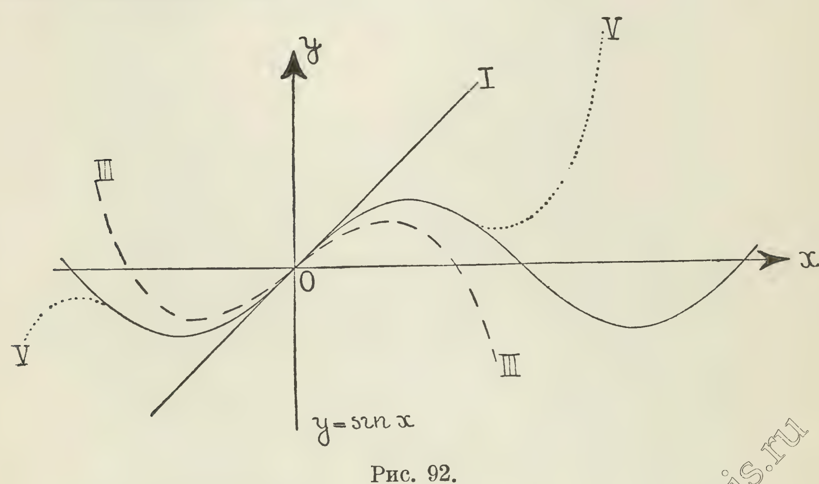


Рис. 92.

должны теперь перейти къ разсмотрѣнію вопроса съ математической точки зрѣнія. Здѣсь, прежде всего, возникаетъ крайне важный въ практическомъ отношеніи вопросъ о той точности, съ какою вообще соприкасаю-

щаяся парабола n-го порядка изображаетъ оригинальную кривую, — такъ называемая оцѣнка погрѣшности или остатка; сюда же примыкаетъ, конечно, вопросъ о переходѣ къ безконечно большому n: нельзя ли при помощи безконечнаго степенного ряда точно изобразить данную кривую?

Я могу здѣсь ограничиться тѣмъ, что приведу наиболѣе извѣстную теорему о величинѣ остатка

$$R_n(x) = f(x) - \left\{ f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \right\};$$

выводъ ея вы найдете во всякомъ учебникѣ; кромѣ того, я вернусь еще позже къ этому, исходя изъ болѣе общей точки зрѣнія. Между a и x существуетъ такое промежуточное значеніе ξ, что $R_n(x)$ можно представить въ такомъ видѣ:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(\xi).$$

Вопросъ о переходѣ къ безконечному ряду сводится теперь непосредственно къ вопросу о томъ, стремится ли этотъ остатокъ $R_n(x)$ при безпредѣльномъ возрастаніи n къ предѣлу 0 или нѣтъ.

Въ примѣненіи къ нашимъ примѣрамъ отсюда выводятъ, — и это вы тоже найдете во всякомъ учебникѣ, — что прежде всего въ 5) и 6) примѣрахъ безконечный рядъ сходится для всѣхъ значеній x. Что же касается первыхъ четырехъ примѣровъ, то оказывается, что безконечный рядъ сходится для всѣхъ значеній x, заключенныхъ между $+1$ и -1, при чемъ сумма его равна первоначально заданной функціи, но внѣ этого промежутка рядъ расходится. При $x = -1$ во второмъ примѣрѣ рядъ сходится, имѣя суммой величину функціи въ этой точкѣ; а въ 1), 3) и 4) примѣрахъ сумма ряда стремится къ безконечности — такъ же, какъ и значеніе самой функціи, такъ что и въ этомъ случаѣ можно было бы, собственно, говорить о сходимости; но по традиціи этого термина не употребляютъ въ случаѣ рядовъ съ явно безконечнымъ предѣломъ. Наконецъ, при $x = +1$ мы имѣемъ дѣло со сходимостью въ обоихъ первыхъ и съ расходимостью въ обоихъ послѣднихъ примѣрахъ. Все это прекрасно

согласуется съ результатами изученія нашихъ чертежей. Но можно задать себѣ, какъ и въ случаѣ тригонометрическихъ рядовъ, такой вопросъ: къ какимъ предѣльнымъ положеніямъ стремятся соприкасающіяся параболы, когда мы смотримъ на нихъ чисто геометрически, какъ на кривыя? Вѣдь онѣ не могутъ внезапно оборваться при $x = \pm 1$. Для $\log(1+x)$ эти предѣльныя кривыя изображены приближенно на рис. 93; а именно оказывается, что четныя и нечетныя параболы стремятся къ двумъ различнымъ предѣльнымъ положеніямъ, состоящимъ изъ части логариѳмической кривой, заключенной между -1 и $+1$, и изъ примыкающей къ ней въ точкѣ $x = +1$ нижней, и соотвѣтственно верхней, половины вертикали $x = +1$. Аналогично обстоитъ дѣло и въ остальныхъ трехъ случаяхъ.

Теоретическое изслѣдованіе ряда Тэйлора находитъ свое завершеніе лишь при переходѣ къ мнимымъ перемѣннымъ, ибо только тогда становится понятнымъ внезапное прекращеніе сходимости степенныхъ рядовъ въ совершенно опредѣленныхъ точкахъ функціи. Конечно, въ нашихъ четырехъ примѣрахъ можно считать, что это явленіе въ точкѣ $x = +1$ объясняется въ достаточной степени тѣмъ обстоятельствомъ, что рядъ не можетъ сходиться справа дальше, чѣмъ онъ сходится слѣва; слѣва же сходимость должна прекращаться въ точкѣ $x = -1$, ибо это — особая точка для разсматриваемыхъ функцій. Но уже въ нижеслѣдующемъ примѣрѣ это разсужденіе оказывается непримѣнимымъ. Рядъ Тэйлора для вѣтви функціи $\operatorname{arctg} x$, которая остается правильной при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ x:

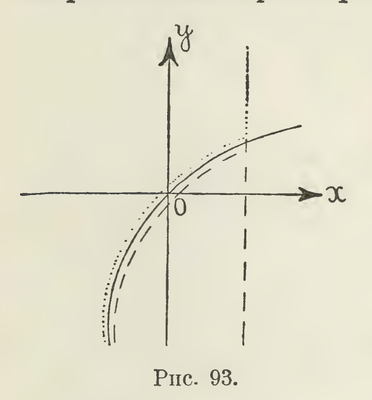


Рис. 93.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots,$$

сходится только въ промежуткѣ $(-1, +1)$, а соприкасающіяся параболы поочередно стремятся къ предѣльнымъ кривымъ, изображеннымъ черточнымъ и точечнымъ пунктиромъ (рис. 94). Внезапное прекращеніе сходимости въ вполнѣ опредѣленныхъ

точкахъ $x = \pm 1$ совершенно не поддается пониманію, если оставаться въ области вещественныхъ перемѣнныхъ.

Объясненіе заключается въ замѣчательной теоремѣ о кругѣ сходимости, которая представляетъ самое прекрасное открытіе, сдѣланное Коши (Cauchy) въ теоріи функцій; самая теорема гласитъ: если отмѣтить въ комплексной плоскости x всѣ особенныя точки аналитической функціи $f(x)$, то рядъ Тэйлора для этой функціи, относящійся къ точкѣ $x = a$, сходится внутри той окружности, описанной около a, какъ центра, ко-

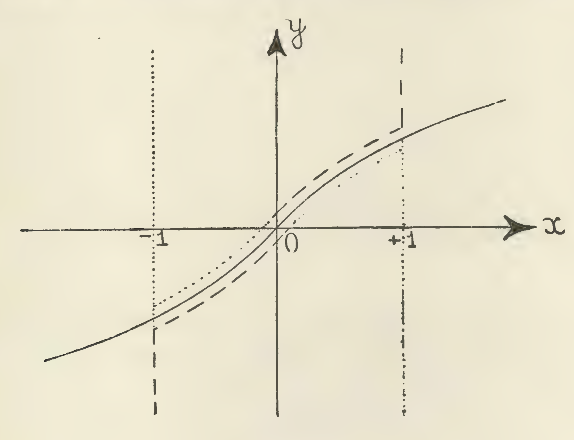


Рис. 94.

торая проходитъ черезъ ближайшую особую точку; этотъ рядъ не сходится ни для одной точки, лежащей внѣ этой окружности (рис. 95).

Для функціи $\operatorname{arctg} x$, какъ извѣстно, значенія $x = \pm i$ представляютъ особенныя точки; поэтому кругомъ сходимости для разложенія по степенямъ x является кругъ радіуса 1 съ центромъ въ точкѣ $x = 0$. Вслѣдствіе этого сходимость должна прекращаться въ точкахъ $x = \pm 1$, въ которыхъ ось вещественныхъ чиселъ выходитъ за предѣлы круга сходимости (рис. 96).

Что же касается сходимости ряда на самомъ кругѣ радіуса 1, то по этому вопросу я долженъ ограничиться слѣдующимъ указаніемъ, примыкающимъ къ подчеркнутой выше связи между степенными и тригонометриче-

скими рядами: упомянутая сходимость зависитъ отъ того, можно ли вещественную и мнимую часть функціи на кругѣ сходимости вмѣстѣ съ тѣми особенностями, какими онѣ тамъ необходимо обладаютъ, разложить въ сходящіеся тригонометрическіе ряды.

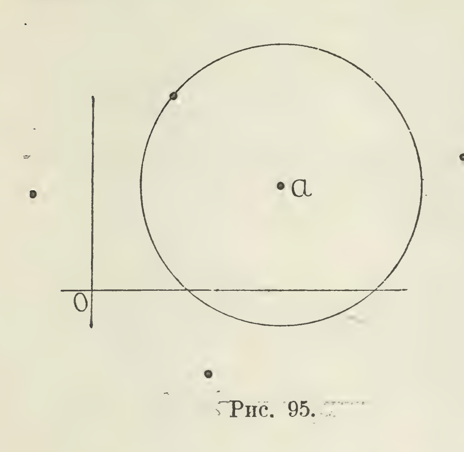


Рис. 95.

Я хочу еще оживить теорему Тэйлора тѣмъ, что покажу, въ какомъ отношеніи она стоитъ къ проблемамъ интерполированія и разностнаго исчисленія. И въ этихъ дисциплинахъ занимаются вопросомъ о томъ, чтобы приближенно изобразить заданную кривую при помощи параболы; но здѣсь вопросъ ставится иначе; здѣсь парабола не должна примыкать къ данной кривой въ одной опредѣленной точкѣ, а, напротивъ, требуется, чтобы она пересѣкала заданную кривую въ нѣсколькихъ, заранѣе указанныхъ точкахъ; вопросъ снова заключается въ томъ, въ какой мѣрѣ такая „интерполяціонная парабола" представляетъ пригодное приближеніе. Въ простѣйшемъ случаѣ разница сводится къ тому, что кривую замѣняютъ не ея касательною, а ея сѣкущей (рис. 97); далѣе, аналогично изслѣдуютъ квадратичную параболу, проходящую черезъ 3 точки данной кривой, кубическую параболу, проходящую черезъ 4 точки и т. д.

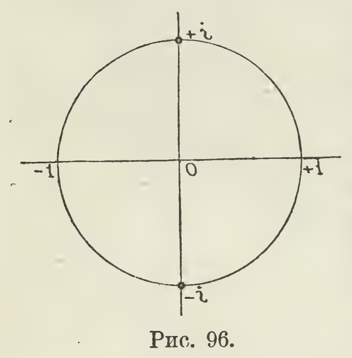


Рис. 96.

Такая постановка вопроса въ теоріи интерполированія является вполнѣ естественной и примѣняется необычайно часто,—напримѣръ, при употребленіи численныхъ логариѳмическихъ таблицъ. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ какъ разъ допускаютъ, что логариѳмическая кривая проходитъ

между двумя значеніями, данными въ таблицѣ, по прямой линіи, и поэтому интерполируютъ линейно по обычному способу, пользуясь „табличками разностей“. Если же это не даетъ достаточно точныхъ результатовъ, то примѣняютъ и квадратичную интерполяцію.

По отношенію къ этой общей задачѣ, опредѣленіе соприкасающихся параболъ по теоремѣ Тэйлора представляетъ частный случай: а именно, здѣсь всѣ точки пересѣченія кривой съ интерполяціонными параболами сливаются въ одну точку. Конечно, при такой замѣнѣ кривой соприкасающимися параболами слово „интерполированіе“, собственно говоря, не подходитъ; но, съ другой стороны, въ задачу интерполированія всегда включаютъ также и „экстраполированіе“; такъ, напримѣръ, сѣкущую сравниваютъ съ кривой не только между ея точками пересѣченія, но и внѣ

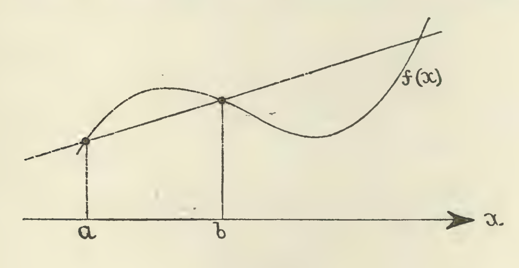


Рис. 97.

ихъ. Поэтому для обозначенія всего способа въ цѣломъ болѣе цѣлесообразнымъ представляется, пожалуй, общее выраженіе „приближеніе“ (Approximation).

Теперь я намѣренъ указать наиболѣе важныя интерполяціонныя формулы. Поставимъ себѣ прежде всего цѣлью опредѣлить параболу $(n-1)$-го порядка, которая пересѣкала бы данную кривую въ n произвольно выбранныхъ точкахъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$, т. е. чтобы ея ординаты въ этихъ точкахъ были равны $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$ (рис. 98). Эту задачу разрѣшаетъ интерполяціонная формула Лагранжа:

$$y = \frac{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)} f(a_1) +$$
$$+ \frac{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)} f(a_2) + \cdots$$

Въ этой формулѣ въ общемъ содержится n членовъ съ множителями $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$; въ числителей этихъ членовъ не внесены послѣдовательно множители $(x-a_1), (x-a_2), \ldots, (x-a_n)$. Справедливость этой формулы можно сразу провѣрить: съ одной стороны, всѣ слагаемыя выраженія y, а, слѣдовательно, и само y представляютъ многочлены $(n-1)$-ой степени относительно $x-a$; съ другой стороны, всѣ дроби, кромѣ первой, обращаются при $x=a_1$ въ 0, а первая обращается при этомъ въ 1, такъ что y оказывается равнымъ $f(a_1)$; точно такъ же $y=f(a_2)$ при $x=a_2$ и т. д.

Изъ этой формулы можно получить, какъ ея частный случай, формулу Ньютона, которыя исторически, конечно, гораздо старше формулы Лагранжа. Формула Ньютона относится къ тому случаю, когда даны равноотстоящія абс-

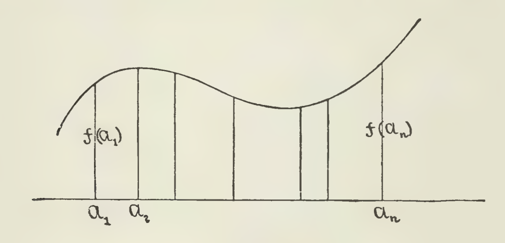


Рис. 98.

циссы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (рис. 99). Въ этомъ случаѣ имѣютъ большое преимущество обозначенія, принятыя въ разностномъ исчисленіи, и поэтому мы сперва познакомимся съ послѣдними.

Пусть Δx обозначаетъ нѣкоторое приращеніе перемѣнной x, а $\Delta f(x)$ — соотвѣтственное приращеніе функціи $f(x)$, такъ что

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta f(x).$$

Но $\Delta f(x)$, въ свою очередь, представляетъ нѣкоторую функцію отъ x, которая при измѣненіи перемѣнной x на Δx имѣетъ опредѣленную разность—такъ называемую „вторую разность" $\Delta^2 f(x)$:

$$\Delta f(x+\Delta x)=\Delta f(x)+\Delta^2 f(x);$$

аналогично полагаемъ далѣе:

$$\Delta^2 f(x+\Delta x)=\Delta^2 f(x)+\Delta^3 f(x)$$

и т. д.

Эти обозначенія вполнѣ аналогичны обозначеніямъ диффе-ренціальнаго исчисленія, съ той только разницею, что здѣсь мы имѣемъ дѣло съ опредѣленными конечными величинами и ни о какихъ предѣльныхъ переходахъ нѣтъ рѣчи.

Изъ написанныхъ выше равенствъ, выражающихъ опредѣ-ленія разностей, непосредственно вытекаютъ такія выраженія для значеній функціи f въ послѣдовательныхъ равно-отстоящихъ точкахъ:

$$\left.\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= f(x)+\Delta f(x), \\ f(x+2\Delta x) &= f(x+\Delta x)+\Delta f(x+\Delta x) \\ &= f(x)+2\Delta f(x)+\Delta^2 f(x), \\ f(x+3\Delta x) &= f(x+2\Delta x)+\Delta f(x+2\Delta x), \\ &= f(x)+3\Delta f(x)+3\Delta^2 f(x)+\Delta^3 f(x) \\ f(x+4\Delta x) &= f(x)+4\Delta f(x)+6\Delta^2 f(x)+4\Delta^3 f(x)+\Delta^4 f(x). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Такимъ же простымъ образомъ выражаются значенія функціи f и въ дальнѣйшихъ равноотстоящихъ точкахъ черезъ послѣдо-вательныя разности f въ первой точкѣ x, при чемъ въ качествѣ множителей входятъ биноміальные коэффиціенты.

Формула Ньютона выражаетъ интерполирую-щую параболу $(n-1)$-го порядка для n равноот-стоящихъ точекъ:

$$a_1=a,\ a_2=a+\Delta x, \ldots, a_n=a+(n-1)\Delta x,$$

т. е. такую параболу, которая при этихъ абсциссахъ имѣетъ ординаты, равныя соотвѣтствующимъ значеніямъ функціи $f(x)$; эта формула имѣетъ видъ:

$$\begin{aligned} y=f(a)+\frac{x-a}{1!}\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}+\frac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2!}\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2}+\cdots \\ \cdots+\frac{(x-a)(x-a-\Delta x)\ldots(x-a-(n-2)\Delta x)}{(n-1)!}\frac{\Delta^{n-1} f(a)}{\Delta x^{n-1}}, \end{aligned} \quad (3)$$

Въ самомъ дѣлѣ, это, во-первыхъ, многочленъ $(n-1)$-ой степени относительно x; во-вторыхъ, при $x=a$ y приводится къ $f(a)$; при $x=a+\Delta x$ всѣ члены послѣ второго отпадаютъ и остается

$y=f(a)+\Delta f(a)$, что, согласно равенствамъ (2), какъ разъ равно $f(a+\Delta a)$, и т. д. Таблица (2) показываетъ, что этотъ многочленъ во всѣхъ n точкахъ принимаетъ вѣрныя значенія.

Если мы хотимъ въ дѣйствительности примѣнить съ успѣхомъ одну изъ этихъ формулъ интерполированія, то намъ надо еще знать что-нибудь относительно той точности, съ которой они выражаютъ функцію $f(x)$; другими словами, мы должны умѣть оцѣнить погрѣшность. Эту оцѣнку указалъ Коши въ 1840 году*), и я охотно приведу здѣсь ея выводъ. Пусть x есть какое-нибудь значеніе, заключенное между значеніями $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (мы исходимъ изъ общей формулы Лагранжа) или внѣ ихъ (интерполированіе или экстраполированіе). Черезъ $P(x)$ обозначимъ значеніе интерполирующей параболы $(n-1)$-го порядка, изображаемой формулой Лагранжа; черезъ $R(x)$ обозначимъ остатокъ, такъ что:

$$f(x)=P(x)+R(x). \qquad (4)$$

Согласно опредѣленію функціи $P(x)$, остатокъ $R(x)$ несомнѣнно обращается въ нуль при $x=a_1, a_2, \ldots, a_n$; поэтому мы полагаемъ:

$$R(x)=\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{n!}\psi(x).$$

Выдѣленіе множителя $n!$ представляется удобнымъ по той причинѣ, что тогда множитель $\psi(x)$ оказывается равнымъ значенію n-ой производной отъ $f(x)$ для нѣкоторой промежуточной точки ξ, — промежуточной въ томъ смыслѣ, что она заключена внутри промежутка, занимаемаго $n+1$ точками $a_1, a_2, \ldots, a_n, x$. То обстоятельство, что отклоненіе функціи $f(x)$ отъ многочлена $(n-1)$-ой степени зависитъ отъ общаго хода измѣненія производной n-аго порядка $f^{(n)}(x)$, становится вполнѣ естественнымъ, если принять во вниманіе, что функція $f(x)$ становится равной этому многочлену, если производная $f^{(n)}(x)$ обращается тождественно въ нуль.

Что же касается доказательства этой формулы остатка, то его удается провести при помощи такого пріема:

*) Comptes Rendus, XI, pag. 175 и сл. или „Oeuvres", I Ser., T. V. (Paris 1885), pag. 422.

составляемъ функцію отъ новой перемѣнной z:

$$F(z) = f(z) - P(z) - \frac{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)}{n!}\psi(x),$$

гдѣ перемѣнную x въ функціи $\psi(x)$ разматриваемъ, какъ параметръ. Такъ какъ по опредѣленію $f(a_r) = P(a_r)$ $(r = 1, \dots, n)$, то

$$F(a_1) = F(a_2) = \dots = F(a_n) = 0.$$

Далѣе находимъ, что и $F(x) = 0$, такъ какъ при $z = x$ послѣднее слагаемое переходитъ въ $R(x)$ и вся правая часть въ силу равенства (4) обращается въ 0. Такимъ образомъ, мы знаемъ $n+1$ корней: $z = a_1, a_2, \dots, a_n, x$ функціи $F(z)$. Теперь примѣнимъ **теорему о среднемъ значеніи въ обобщенномъ видѣ**, получаемомъ посредствомъ повторнаго примѣненія этой теоремы въ ея обычной формѣ (стр. 347): **если нѣкоторая непрерывная функція, имѣющая n непрерывныхъ производныхъ, обращается въ 0 въ $n+1$ точкахъ, то ея n-ая производная обращается въ 0, по крайней мѣрѣ, въ одной точкѣ промежутка, содержащаго всѣ эти $n+1$ корней.** Поэтому, если только функція $f(z)$, а вмѣстѣ съ нею и $F(z)$ обладаетъ n непрерывными производными, то существуетъ такая точка ξ, заключенная между крайними изъ значеній $a_1, a_2, \dots, a_n, x$, что

$$F^{(n)}(\xi) = 0.$$

Но

$$F^{(n)}(z) = f^{(n)}(z) - \psi(x),$$

такъ какъ n-ая производная многочлена $(n-1)$ой степени P равна нулю, а въ послѣднемъ слагаемомъ только высшій членъ $\frac{1}{n!}z^n\psi(x)$ даетъ n-ую производную, отличную отъ нуля. Такимъ образомъ, въ результатѣ находимъ:

$$F^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - \psi(x) = 0, \text{ т. е. } \psi(x) = f^{(n)}(\xi),$$

а это именно и требовалось доказать.

Я выпишу подробно, въ частности, интерполяціонную формулу Ньютона съ ея остаточнымъ членомъ:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \frac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2!}\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(x-a)\ldots(x-a-(n-1)\Delta x)}{n!} f^{(n)}(\xi), \tag{5}$$

гдѣ ξ означаетъ нѣкоторое среднее значеніе, заключенное въ промежуткѣ, содержащемъ $n+1$ точекъ a, $a+\Delta x, \ldots, a+(n-1)\Delta x$, x. Эта формула дѣйствительно незамѣнима въ примѣненіяхъ. Я уже указывалъ на линейное интерполированіе при пользованіи таблицами логариѳмовъ; для $f(x) = \log(x)$ и $n = 2$ формула (5) даетъ:

$$\log x = \log a + \frac{x-a}{1!}\frac{\Delta \log a}{\Delta x} - \frac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2!}\frac{M}{\xi^2}$$

(ибо $\frac{d^2 \log x}{dx^2} = -\frac{M}{x^2}$, если черезъ M обозначить модуль взятой системы логариѳмовъ); это даетъ намъ выраженіе для той ошибки, какую мы совершаемъ при линейномъ интерполированіи между двумя логариѳмами чиселъ a и $a+\Delta x$, взятыми изъ таблицы. Между прочимъ, изъ этой формулы видно, что эта ошибка получаетъ различный знакъ, въ зависимости отъ того, лежитъ ли число x между числами a и $a+\Delta x$ или внѣ ихъ. Строго говоря, эту формулу долженъ былъ бы знать всякій, кому приходится имѣть дѣло съ таблицами логариѳмовъ!

Я не буду больше останавливаться на приложеніяхъ, а перейду къ замѣчательной аналогіи между интерполяціонной формулой Ньютона и строкой Тэйлора. Въ основѣ этой аналогіи лежитъ слѣдующее обстоятельство: изъ формулы Ньютона можно очень легко и притомъ совершенно строго вывести рядъ Тэйлора съ остаточнымъ членомъ; этотъ выводъ вполнѣ соотвѣтствуетъ переходу отъ интерполяціи къ приближеннымъ параболамъ. Въ самомъ дѣлѣ, если при постоянныхъ x, a и n приращеніе Δx стремится къ нулю, то каждое изъ $n-1$ отношеній между конечными разностями, встрѣчающихся въ равенствѣ (5), переходитъ

въ соотвѣтствующую производную (по предположенію вѣдь существуютъ первыя n производныхъ функціи $f(x)$):

$$\lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x), \quad \lim \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} = f''(x)$$

и т. д.

Отсюда слѣдуетъ, что множитель $f^{(n)}(\xi)$ послѣдняго члена правой части тоже стремится къ опредѣленному предѣлу, а вслѣдствіе непрерывности функціи $f^{(n)}(x)$ этимъ предѣломъ опять является среднее значеніе $f(\xi)$. Итакъ, мы получаемъ совершенно строгое равенство:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad (a \leqq \xi \leqq x).$$

Такимъ образомъ, мы вполнѣ доказали теорему Тэйлора и въ то же время показали, съ какимъ изяществомъ ее можно привести въ связь съ общимъ ученіемъ объ интерполяціи.

Благодаря этой тѣсной связи съ очень простыми вопросами и благодаря тому, что предѣльный переходъ здѣсь такъ легокъ, я считаю этотъ выводъ строки Тэйлора лучшимъ изъ всѣхъ возможныхъ выводовъ. Но не всѣ математики, даже хорошо знакомые съ этими вещами,— нужно, впрочемъ, замѣтить, что, какъ это ни странно, ихъ часто не знаютъ даже составители учебниковъ, — держатся этого мнѣнія; они обыкновенно принимаютъ очень серьезный видъ, приступая къ предѣльному переходу и предпочитаютъ дать непосредственное доказательство теоремы Тэйлора, чѣмъ выводить ее при помощи разностнаго исчисленія.

Но я не могу здѣсь не отмѣтить, что исторически источникомъ открытія ряда Тэйлора было именно разностное исчисленіе. Какъ я уже упоминалъ, въ первый разъ этотъ рядъ построилъ Тейлоръ (Brook Taylor) въ своемъ „Methodus incrementorum*)“; онъ тамъ выводитъ сначала формулу Ньютона — конечно, безъ остаточнаго члена — и потомъ полагаетъ въ ней одновременно $\Delta x = 0$ и $n = \infty$; онъ вполнѣ

*) Londini 1715, pag. 21 — 23.

правильно получаетъ изъ первыхъ членовъ этой формулы первые члены новаго ряда:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} \cdot \frac{df(a)}{dx} + \frac{(x-a)^2}{2!} \frac{d^2 f(a)}{dx^2} + \cdots,$$

и считаетъ очевиднымъ, что этотъ рядъ можно продолжать до безконечности, — ни объ остаточномъ членѣ, ни о сходимости у него нѣтъ и рѣчи. Это неслыханный по своей смѣлости предѣльный переходъ. Первые члены, въ которыхъ встрѣчается $x-a-\Delta x$, $x-a-2\Delta x, \ldots$, не представляютъ трудностей, такъ какъ при $\lim \Delta x = 0$ исчезаетъ также Δx, повторенное конечное число разъ. Но при дальнѣйшемъ возрастаніи n появляются въ постоянно возрастающемъ числѣ члены, содержащіе множителей $x-a-k\,\Delta x$ съ постоянно возрастающими значеніями k, и мы, конечно, не имѣемъ права обращаться съ ними такъ, какъ съ первыми членами, и предполагать, что мы получаемъ сходящійся рядъ.

Въ сущности Тэйлоръ здѣсь оперируетъ съ безконечно-малыми величинами (дифференціалами) гораздо, если можно такъ выразиться, легкомысленнѣе, чѣмъ это когда-либо дѣлали послѣдователи Лейбница; интересно отмѣтить, что онъ еще въ молодости (ему было 29 лѣтъ) и еще на глазахъ Ньютона такъ уклонился отъ метода предѣловъ, которымъ пользовался послѣдній. Какъ бы тамъ ни было, ему удалось такимъ образомъ сдѣлать свое очень важное открытіе.

Отличное критическое изложеніе исторіи развитія этой теоремы можно найти въ работѣ Альфреда Прингсгейма (Alfred Pringsheim: „Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes" *). Я здѣсь хотѣлъ бы еще сказать нѣсколько словъ по поводу дѣлаемаго обыкновенно различія между рядомъ Тэйлора и рядомъ Маклорена. Какъ извѣстно, во всѣхъ учебникахъ подъ названіемъ ряда Малорена отдѣльно разсматриваютъ частный случай ряда Тэйлора при $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots,$$

и легко можетъ придти въ голову, что очень важно строго отличать одинъ рядъ отъ другого. Каждому, знакомому съ дѣломъ, ясно, что съ математической точки зрѣнія это различіе совсѣмъ

*) „Bibliotheca mathematica", 3 серія, I (1900), pag. 433—479.

несущественное; менѣе извѣстно то обстоятельство, что оно исторически также является безсмыслицей. Во-первыхъ, Тэйлору принадлежитъ несомнѣнный пріоритетъ въ отношеніи общей теоремы, къ которой онъ пришелъ, какъ указано выше. Но, кромѣ того, онъ дальше (pag. 27) спеціально останавливается на той формѣ, которую его рядъ получаетъ при $a = 0$, и замѣчаетъ, что въ этомъ случаѣ рядъ можно получить также непосредственно, при помощи такъ называемаго способа неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Этимъ способомъ воспользовался въ 1742 году Маклоренъ въ своей упомянутой выше (стр. 346) книгѣ „Treatise of fluxions *)", при чемъ онъ совершенно ясно ссылается на Тэйлора и не заявляетъ претензіи дать что-нибудь новое. Но на эту ссылку впослѣдствіи не обратили вниманія и стали считать автора учебника вмѣстѣ съ тѣмъ авторомъ теоремы; такимъ образомъ вѣдь часто происходятъ ошибки. Только еще позже опять вспомнили про Тэйлора и назвали его именемъ общую теорему. Очень трудно — а можетъ быть даже невозможно — бороться съ такими укоренившимися нелѣпостями; можно только выяснить истинное положеніе дѣлъ въ маленькомъ кругу тѣхъ математиковъ, которые интересуются исторіей своей науки.

Мнѣ хотѣлось бы прибавить къ этому еще нѣкоторыя замѣчанія историческаго и педагогическаго характера.

3. Замѣчанія историческаго и педагогическаго характера.

Я отмѣчу раньше всего, что связь, которую Тэйлоръ установилъ между разностнымъ и дифференціальнымъ исчисленіями, сохранялась въ теченіе продолжительнаго времени: еще у Эйлера, въ работахъ его, посвященныхъ анализу, эти двѣ дисциплины тѣсно связаны одна съ другой, и формулы дифференціальнаго исчисленія разсматриваются, какъ предѣльные случаи совершенно элементарныхъ соотношеній, имѣющихъ мѣсто въ разностномъ исчисленіи. Это вполнѣ естественное соединеніе двухъ наукъ продолжалось до тѣхъ поръ, пока не появилось исчисленіе производныхъ Лагранжа съ его, не разъ уже упомянутыми выше, формальными опредѣленіями. Я долженъ здѣсь указать на одно компилятивное сочиненіе конца XVIII столѣтія, въ которомъ авторъ, становясь на почву ученія Лагранжа

*) Edinburgh 1742. Vol II, pag. 610.

излагаетъ всѣ извѣстные въ то время факты исчисленія безконечно-малыхъ; это „Traité du calcul differentiel et du calcul integral“, принадлежащее Лакруа (Lacroix*). Какъ характерный примѣръ изъ этой работы, я приведу опредѣленіе производной (I, pag. 145): Пусть нѣкоторая функція $f(x)$ опредѣлена степеннымъ рядомъ; пользуясь разложеніемъ бинома Ньютона и соединяя члены съ одинаковыми степенями буквы h, мы получимъ:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+\cdots$$

Лакруа просто обозначаетъ членъ, линейный относительно h, черезъ $df(x)$ и, такъ какъ вмѣсто h можно писать dx, получаетъ для производной, или, какъ онъ это называетъ, для дифференціальнаго коэффиціента, соотношеніе,

$$\frac{df(x)}{dx}=f'(x).$$

Это равенство получаетъ, такимъ образомъ, совершенно формальный характеръ, хотя противъ правильности его нельзя возражать.

Понятно, что при такомъ характерѣ изложенія Лакруа не можетъ исходить изъ разностнаго исчисленія; онъ считаетъ, однако, послѣднее настолько важнымъ для практики, что не рѣшается вовсе его опустить, а даетъ его въ видѣ самостоятельной дисциплины — и притомъ въ очень подробной обработкѣ — въ третьемъ томѣ.

Историческое значеніе этой книги, которую называютъ „большой Лакруа“, состоитъ, главнымъ образомъ, въ томъ, что она является источникомъ, изъ котораго черпали матеріалъ многіе учебники исчисленія безконечно-малыхъ, появившіеся въ XIX столѣтіи; раньше всего здѣсь нужно назвать учебникъ, составленный самимъ Лакруа, — „маленькій Лакруа“.

Впрочемъ, начиная съ двадцатыхъ годовъ этого столѣтія, наряду съ вліяніемъ Лакруа, въ учебникахъ сказывается также вліяніе способа предѣловъ, которому Коши возвратилъ его

*) 3 тома. Paris 1797—1800 (2 éd. 1810—1813).

прежнее значеніе; я имѣю въ виду, главнымъ образомъ, французскіе учебники, выходившіе подъ названіемъ „Cours d'analyse de l'école polytechnique" и предназначенные для высшихъ учебныхъ заведеній. Нѣмецкіе учебники, за единственнымъ исключеніемъ Шлёмильха (Schlömilch), не носятъ самостоятельнаго характера, а зависятъ прямо или косвенно отъ французскихъ. Изъ этой массы книгъ я выдѣлю только „Cours de calcul différentiel et intégral" Serret, который въ первый разъ вышелъ въ Парижѣ въ 1884 году; Гарнакъ (A. Harnack) перевелъ его на нѣмецкій языкъ, и онъ сталъ также въ Германіи однимъ изъ самыхъ распространенныхъ учебниковъ. Книга подвергалась переработкѣ нѣсколько разъ, и изложеніе сдѣлалось въ виду этого неравномѣрнымъ; но для недавно появившагося 3-го изданія Шефферсъ (G. Scheffers, Charlottenburg) передѣлалъ ее опять и придалъ ей цѣльный характеръ*). Мнѣ еще хотѣлось бы упомянуть объ одной, совсѣмъ новой французской книгѣ: это двухтомный „Cours d'analyse mathématique" Гурса (Goursat)**); онъ по многимъ вопросамъ содержитъ гораздо больше матеріала, чѣмъ Серре, и въ него входитъ цѣлый рядъ новѣйшихъ изслѣдованій; кромѣ того, онъ очень доступно написанъ.

Во всѣхъ этихъ новыхъ учебникахъ производная и интегралъ опредѣляются при помощи предѣльнаго перехода,— о разностномъ исчисленіи въ нихъ нѣтъ и рѣчи. При такомъ изложеніи многое можетъ стоять болѣе отчетливымъ, но при этомъ, какъ въ микроскопѣ, суживается поле зрѣнія. Разностное исчисленіе теперь предоставлено тѣмъ, которые занимаются практическими вычисленіями,—главнымъ образомъ, астрономамъ; математики же совсѣмъ не изучаютъ его.

На этомъ я закончу свое изложеніе исчисленія безконечно-малыхъ и только въ заключеніе опять укажу на особенности, отличающія его отъ того изложенія, которое обыкновенно дается въ учебникахъ.

1) Я иллюстрирую абстрактныя разсужденія при помощи наглядныхъ, конкретныхъ чертежей. (Приближенныя кривыя для рядовъ Фурье и Тэйлора).

---

*) J. A. Serret u. G. Scheffers: „Lehrbuch der Diff. u. Integralrechnung." Bd. I–II. Leipzig 1906, 1907.

**) Paris 1902 и 1907.

2) Я подчеркиваю связь съ сосѣдними областями, — напримѣръ съ разностнымъ и интерполяціоннымъ исчисленіями и даже съ философскими изслѣдованіями.

3) Я указываю на исторію развитія предмета.

4) Привожу примѣры изложенія изъ популярной литературы, съ цѣлью выяснить разницу между основанными на ней воззрѣніями публики и воззрѣніями спеціалистовъ-математиковъ.

Я считаю знакомство съ этими вещами особенно важнымъ для будущихъ учителей. Какъ только вы вступаете въ практическую жизнь, вамъ приходится столкнуться съ ходячими воззрѣніями, и если вы въ нихъ не разобрались раньше, если вы незнакомы съ элементомъ наглядности въ математикѣ и не сознаете ея живой связи съ сосѣдними областями, — если вы, что̀ важнѣе всего, не знаете историческаго развитія вашей науки, то вы теряете всякую почву подъ ногами; вы становитесь на почву самой ортодоксальной математики — и васъ тогда не понимаютъ ученики, или же вы признаете себя побѣжденными, отказываетесь отъ всего, чему вы научились въ университетѣ, и придерживаетесь въ преподаваніи традиціонной рутины. Какъ разъ здѣсь, въ области исчисленія безконечно-малыхъ, разрывъ между средней и высшей школой особенно великъ; я надѣюсь, что мое изложеніе будетъ содѣйствовать его устраненію, и что я далъ вамъ для вашей педагогической дѣятельности полезное орудіе.

Теперь я оставляю традиціонный анализъ и хочу посвятить приложеніе изложенію нѣсколькихъ теорій новѣйшей математики, о которыхъ мнѣ уже приходилось упоминать раньше и съ которыми, какъ мнѣ кажется, учитель долженъ быть немного знакомъ.

ПРИЛОЖЕНІЕ

I. Трансцендентность чиселъ e и π.

Интересъ къ числу π возникъ—въ геометрической формѣ—еще въ древности, и тогда уже вполнѣ сознавали разницу между задачей приближеннаго вычисленія его и задачей о точномъ теоретическомъ построеніи и даже обладали нѣкоторыми предпосылками для рѣшенія обоихъ вопросовъ. Рѣшеніе перваго значительно подвинулось впередъ благодаря Архимеду и его способу приближенія къ кругу при помощи вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ; второму вопросу скоро дали болѣе точную формулировку: можно ли построить число π при помощи циркуля и линейки?—и стали пробовать найти это построеніе всевозможными способами, не догадываясь, что причиной постоянныхъ неудачъ является неразрѣшимость задачи; все, что сохранилось отъ этихъ первыхъ попытокъ, недавно опубликовалъ Рудіо*). Но и теперь „квадратура круга" является одной изъ самыхъ популярныхъ задачъ, и множество людей — какъ я уже говорилъ раньше — хотятъ попытать на ней счастье, не зная или не вѣря, что современная наука давно съ ней покончила.

Между тѣмъ эти старые вопросы теперь дѣйствительно вполнѣ рѣшены. Теперь часто сомнѣваются, можетъ ли вообще человѣческое познаніе подвигаться впередъ, и, пожалуй, для нѣкоторыхъ областей это сомнѣніе въ самомъ дѣлѣ основательно. Но въ математикѣ несомнѣнно познаніе сдѣлало успѣхи, и данный вопросъ можетъ послужить примѣромъ этого.

Принципы, на которыхъ основано современное рѣшеніе этихъ задачъ, были найдены въ промежутокъ времени отъ Ньютона до Эйлера. Для приближеннаго вычисленія π было найдено

*) Rudio, „Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und Hippokrates". Leipzig 1908. — См. также Ф. Рудіо, „Квадратура круга". Одесса, „Mathesis", 1910.

прекрасное средство въ видѣ безконечныхъ рядовъ, которые даютъ возможность достигнуть точности, удовлетворяющей самымъ строгимъ требованіямъ. Дальше всѣхъ въ этомъ направленіи пошелъ англичанинъ Шарпъ (Sharp), который нашелъ 600 десятичныхъ знаковъ числа π; это вычисленіе имѣетъ только, такъ сказать, спортивный интересъ, какъ рекордъ, потому что въ приложеніяхъ никогда не потребуется знать π съ такою точностью. Что касается теоретической стороны вопроса, то въ этомъ періодѣ въ изслѣдованіяхъ впервые появляется число e, основаніе натуральныхъ логариѳмовъ. Въ это время было открыто удивительное соотношеніе $e^{i\pi} = -1$ и подготовлено, въ видѣ интегральнаго исчисленія, важное орудіе для окончательнаго рѣшенія вопроса.

Рѣшительный шагъ въ этомъ направленіи сдѣлалъ, какъ извѣстно, Эрмитъ (Hermite), доказавъ въ 1874 г. трансцендентность числа e. Онъ не нашелъ, однако, также доказательства трансцендентности числа π; это удалось впервые Линдеману (Lindemann) въ 1882 году.

Здѣсь мы имѣемъ существенное обобщеніе классической постановки вопроса; тамъ рѣчь шла только о томъ, чтобы построить π при помощи циркуля и линейки, а это, какъ мы знаемъ (ср. стр. 79, 80), аналитически сводится къ тому, чтобы представить π, какъ результатъ нѣсколькихъ послѣдовательныхъ извлеченій корня квадратнаго изъ раціональныхъ чиселъ. Теперь же доказывается не только, что это невозможно, но нѣчто еще гораздо большее; именно можно показать, что какъ π, такъ и e суть числа трансцендентныя, т. е. что ихъ вообще нельзя связать съ цѣлыми числами никакимъ алгебраическимъ соотношеніемъ. Другими словами, ни e ни π не могутъ быть корнями алгебраическаго уравненія съ цѣлыми раціональными коэффиціентами

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0,$$

каковы бы ни были цѣлыя числа $a_0, \ldots, a_n$ и показатель n. Самое существенное здѣсь—это цѣлые раціональные коэффиціенты: достаточно было бы, собственно, сказать раціональные коэффиціенты, потому что, приводя къ общему знаменателю

и отбрасывая его, мы всегда можемъ свести уравненіе съ раціональными коэффиціентами къ уравненію съ цѣлыми раціональными коэффиціентами.

Я теперь приведу доказательство трансцендентности числа e, при чемъ буду пользоваться тѣми существенными упрощеніями, которыя сдѣлалъ въ немъ Гильбертъ (Hilbert) въ 43 томѣ „Mathem. Annalen" (1893 г.).

Доказательство трансцендентности числа e.

Намъ предстоитъ доказать, что предположеніе существованія равенства

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = 0, \qquad (1)$$

гдѣ $a_0 \neq 0$ и коэффиціенты $a_0, \ldots, a_n$ суть цѣлыя числа, ведетъ къ противорѣчію; это противорѣчіе обнаружится на самыхъ простыхъ свойствахъ цѣлыхъ чиселъ. Намъ придется ссылаться изъ теоріи чиселъ только на самыя элементарныя теоремы о дѣлимости, — въ частности на то, что каждое цѣлое положительное число можно разложить на первоначальныхъ множителей только однимъ способомъ, и на то, что существуетъ безчисленное множество простыхъ чиселъ.

Планъ нашего доказательства заключается въ слѣдующемъ: мы покажемъ, какъ находить очень хорошія раціональныя приближенныя значенія для числа e и его степеней слѣдующаго вида:

$$e = \frac{M_1 + \varepsilon_1}{M}, \quad e^2 = \frac{M_2 + \varepsilon_2}{M}, \ldots, e^n = \frac{M_n + \varepsilon_n}{M}, \quad (2)$$

гдѣ M, M_1, $M_2, \ldots, M_n$ суть цѣлыя числа, а $\frac{\varepsilon_1}{M}, \frac{\varepsilon_2}{M}, \ldots, \frac{\varepsilon_n}{M}$ — чрезвычайно малыя дроби. Умножая затѣмъ обѣ части равенства (1) на M, мы придадимъ ему такой видъ:

$$\left\{a_0 M + a_1 M_1 + a_2 M_2 + \cdots + a_n M_n\right\} + \\ + \left\{a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \cdots + a_n \varepsilon_n\right\} = 0. \qquad (3)$$

Первое слагаемое лѣвой части есть цѣлое число, и мы докажемъ, что оно не равно нулю; второе слагаемое намъ

удастся, выбирая достаточно малыя значенія для чиселъ $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, сдѣлать правильной дробью. Мы придемъ, такимъ образомъ, къ противорѣчію, заключающемуся въ томъ, что сумма цѣлаго, отличнаго отъ нуля, числа $a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n$ и правильной, отличной отъ единицы, дроби $a_1 \varepsilon_1 + \cdots + a_n \varepsilon_n$ равна нулю; отсюда и будетъ вытекать невозможность равенства (1).

При этомъ большую услугу намъ окажетъ слѣдующее предложеніе: цѣлое число, которое не дѣлится на нѣкоторое опредѣленное число, отлично отъ нуля (потому что нуль дѣлится на всякое число); именно мы покажемъ, что числа $M_1, \ldots, M_n$ дѣлятся на нѣкоторое простое число p, а число $a_0 M$ на него навѣрное не дѣлится; такимъ образомъ, сумма $a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n$ не дѣлится на p и, значитъ, отлична отъ нуля.

Главнымъ орудіемъ для дѣйствительнаго выполненія того доказательства, идея котораго только-что намѣчена, является одинъ опредѣленный интегралъ; его впервые въ такихъ разсужденіяхъ сталъ употреблять Эрмитъ, и поэтому мы можемъ назвать его интеграломъ Эрмита; построить его—значило найти ключъ ко всему доказательству. Мы увидимъ, что значеніе этого интеграла есть цѣлое число, и онъ опредѣлитъ наше число M:

$$M = \int_0^\infty \frac{z^{p-1}\left\{(z-1)(z-2)\ldots(z-n)\right\}^p e^{-z}}{(p-1)!}\,dz; \quad (4)$$

здѣсь n есть степень нашего предполагаемаго уравненія (1), а p — нѣкоторое простое число, которое мы опредѣлимъ дальше. При помощи этого интеграла мы найдемъ также вышеупомянутыя приближенныя значенія (2) для степеней e^ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$); для этого мы разобьемъ интервалъ $0 \ldots \infty$ на два интервала при помощи числа ν и положимъ:

$$M_\nu = e^\nu \int_\nu^\infty \frac{z^{p-1}\left\{(z-1)\ldots(z-n)\right\}^p e^{-z}}{(p-1)!}\,dz, \quad (4^a)$$

$$\varepsilon_\nu = e^\nu \int_0^\nu \frac{z^{p-1}\left\{(z-1)\ldots(z-n)\right\}^p e^{-z}}{(p-1)!}\,dz. \quad (4^b)$$

Перейдемъ теперь къ самому доказательству.

1) Исходнымъ пунктомъ является формула, хорошо извѣстная изъ элементарной теоріи функціи Γ:

$$\int_0^\infty z^{\varrho-1} e^{-z} dz = \Gamma(\varrho).$$

Намъ придется примѣнять эту формулу только въ предположеніи, что ϱ есть число цѣлое; въ этомъ случаѣ $\Gamma(\varrho) = (\varrho - 1)!$, и я сейчасъ это докажу. При помощи интегрированія по частямъ мы найдемъ:

$$\int_0^\infty z^{\varrho-1} e^{-z} dz = \left[-z^{\varrho-1} e^{-z}\right]_0^\infty + \int_0^\infty (\varrho - 1) z^{\varrho-2} e^{-z} dz =$$

$$= (\varrho - 1) \int_0^\infty z^{\varrho-2} e^{-z} dz.$$

Второй сомножитель правой части представляетъ собой интегралъ того же вида, но только показатель при z на единицу меньше; примѣняя это преобразованіе нѣсколько разъ, мы дойдемъ, при ϱ цѣломъ, до z^1, а такъ какъ $\int_0^\infty e^{-z} dz = 1$, то мы получимъ окончательно:

$$\int_0^\infty z^{\varrho-1} e^{-z} dz = (\varrho - 1)(\varrho - 2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = (\varrho - 1)! \qquad (5)$$

Этотъ интегралъ есть, такимъ образомъ, при цѣломъ ϱ, цѣлое число, которое очень быстро возрастаетъ съ возрастаніемъ ϱ.

Чтобы сдѣлать этотъ результатъ геометрически нагляднымъ, изобразимъ графически ходъ измѣненія функціи $z^{\varrho-1} e^{-z}$ для различныхъ значеній ϱ (рис. 98); значеніе интеграла будетъ равно площади фигуры, заключенной между кривой и осью z и простирающейся до безконечности. Чѣмъ больше ϱ, тѣмъ тѣснѣе кривая примыкаетъ къ оси абсциссъ вблизи точки $z = 0$, но зато тѣмъ скорѣе она подымается, начиная отъ точки $z = 1$; затѣмъ она достигаетъ, каково бы ни было ϱ, максимума при $z = \varrho - 1$, при чемъ съ возрастаніемъ ϱ этотъ максимумъ увеличивается и

вмѣстѣ съ тѣмъ передвигается вправо; начиная отъ этой точки получаетъ преобладающее значеніе множитель e^{-z}, кривая начинаетъ падать и, наконецъ, опять очень близко подходитъ къ оси абсциссъ. Теперь понятно, что площадь — нашъ интегралъ — всегда остается конечной, но съ возрастаніемъ ϱ сильно возрастаетъ.

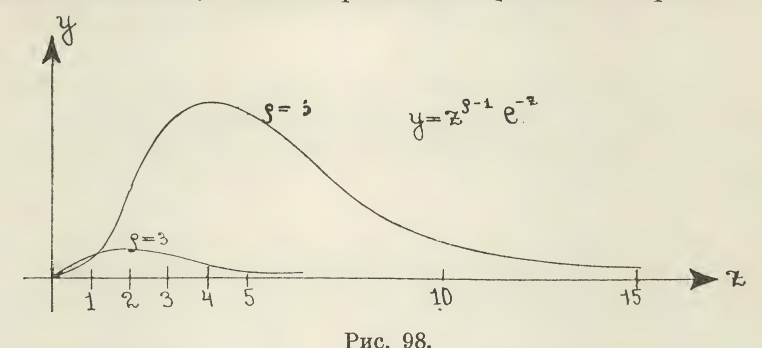


Рис. 98.

2) Пользуясь доказанной формулой, мы теперь легко найдемъ значеніе интеграла Эрмита (4). Если мы раскроемъ скобки и расположимъ подъинтегральную функцію по нисходящимъ степенямъ z, пользуясь разложеніемъ степени многочлена въ строку:

$$\left\{(z-1)(z-2)\dots(z-n)\right\}^p=\left\{z^n+\cdots+(-1)^n n!\right\}^p=$$
$$=z^{np}+\cdots+(-1)^n (n!)^p \ ^{*})$$

(я выписываю здѣсь только высшій и низшій, т. е. свободный отъ z, членъ), то этотъ интегралъ приметъ видъ:

$$M=\frac{(-1)^n (n!)^p}{(p-1!)}\int_0^\infty z^{p-1}e^{-z}dz+\sum_{\varrho=p+1,\,p+2,\dots,p+np}\frac{C_\varrho}{(p-1)!}\int_0^\infty z^{\varrho-1}e^{-z}\,dz;$$

C_ϱ здѣсь постоянныя и притомъ цѣлыя числа, которыя получаются при вышеупомянутомъ разложеніи степени многочлена. Примѣняя формулу (5) къ каждому изъ полученныхъ интеграловъ, мы получимъ:

$$M=(-1)^n (n!)^p+\sum_{\varrho=p+1,\dots,p+np} C_\varrho\frac{(\varrho-1)!}{(p-1)!}.$$

*) Авторъ пишетъ $(-1)^n$ вмѣсто $(-1)^{np}$, такъ какъ p — число простое и >2, — слѣдовательно, нечетное.

Ред.

Всѣ ϱ подъ знакомъ суммы больше p и, значитъ, отношенія $\frac{(\varrho-1)!}{(p-1)!}$ суть цѣлыя числа, содержащія, кромѣ того, множителя p; если его вынести за скобку, то мы получимъ:

$$M=(-1)^n(n!)^p+p\left\{C_{p+1}+C_{p+2}(p+1)+C_{p+3}(p+1)(p+2)+\cdots\right\}.$$

Отсюда мы видимъ, что M дѣлится или не дѣлится на p въ зависимости отъ того, дѣлится или не дѣлится на p первое слагаемое $(-1)^n(n!)^p$. Но такъ какъ p есть число простое, то это слагаемое навѣрное не будетъ дѣлиться на p, если p не входитъ въ составъ ни одного изъ его сомножителей $1, 2, \ldots, n$; а это навѣрное случится, если $p>n$. Этому условію удовлетворяетъ безчисленное множество простыхъ чиселъ; выбравъ одно изъ нихъ, мы достигнемъ того, что $(-1)^n(n!)^p$ и, значитъ, M навѣрное не будутъ дѣлиться на p.

Такъ какъ, по предположенію, $a_0 \neq 0$, то намъ легко сдѣлать такъ, чтобы и a_0 не дѣлилось на p; для этого достаточно только выбрать p бо́льшимъ, чѣмъ a_0, что, какъ слѣдуетъ изъ сказаннаго выше, конечно, возможно. Но тогда произведеніе a_0M также не дѣлится на p, и мы достигли, такимъ образомъ, нашей первой цѣли.

3) Изслѣдуемъ теперь числа M_ν $(\nu=1, 2, \ldots, n)$, опредѣленныя равенствами (4^a) (стр. 388). Внесемъ множителя e^ν подъ знакъ интеграла и введемъ новую перемѣнную $\zeta=z-\nu$, принимающую значенія отъ 0 до ∞, когда z измѣняется отъ ν до ∞; тогда мы получимъ:

$$M_\nu=\int\limits_0^\infty\frac{(\zeta+\nu)^{p-1}\left\{(\zeta+\nu-1)(\zeta+\nu-2)\ldots\zeta\ldots(\zeta+\nu-n)\right\}^p e^{-\zeta}}{(p-1)!}d\zeta.$$

Это интегралъ того же вида, что и раньше разсмотрѣнный интегралъ M, и мы можемъ здѣсь примѣнить аналогичныя преобразованія. Раскрывъ скобки въ числителѣ подъинтегральной функціи, мы получимъ аггрегатъ степеней ζ съ цѣлыми коэффиціентами, при чемъ низшая изъ этихъ степеней есть ζ^p. Интегралъ числителя представится теперь въ видѣ суммы интеграловъ

$$\int\limits_0^\infty\zeta^p e^{-\zeta}d\zeta,\quad \int\limits_0^\infty\zeta^{p+1}e^{-\zeta}d\zeta,\ldots,\int\limits_0^\infty\zeta^{(n+1)p-1}e^{-\zeta}d\zeta,$$

помноженныхъ на цѣлыя числа; а такъ какъ эти послѣдніе интегралы имѣютъ, согласно равенствамъ (5), соотвѣтственно значенія $p!$, $(p+1)!, \ldots$, то эту сумму можно представить въ видѣ числа $p!$, умноженнаго на нѣкоторое цѣлое число A_ν; такимъ образомъ, для каждаго изъ разсматриваемыхъ интеграловъ мы имѣемъ:

$$M_\nu = \frac{p!\,A_\nu}{(p-1)!} = p \cdot A_\nu \quad (\nu = 1,\ 2, \ldots, n),$$

т. е. всѣ они суть цѣлыя числа, кратныя p.

Если мы сопоставимъ это съ доказаннымъ въ n^0 2), то мы увидимъ, что можно примѣнить указанное выше (стр. 388) предложеніе и сказать: $a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n$ навѣрное не дѣлится на p и, слѣдовательно, отлично отъ нуля.

4) Вторая часть доказательства относится къ суммѣ $a_1 \varepsilon_1 + \cdots + a_n \varepsilon_n$, гдѣ, согласно равенству (4^b) (стр. 388),

$$\varepsilon_\nu = \int_0^\nu \frac{z^{p-1}\left\{(z-1)(z-2)\cdots(z-n)\right\}^p e^{-z+\nu}}{(p-1)!}\,dz,$$

и намъ нужно доказать, что, давая p надлежащія значенія, можно сдѣлать эти ε_ν сколь угодно малыми; при этомъ мы воспользуемся тѣмъ, что мы можемъ сдѣлать p сколь угодно большимъ, такъ какъ тѣ условія, которымъ мы пока подчинили простое число p $(p > n,\ p > a_0)$, могутъ быть удовлетворены произвольно большими простыми числами.

Изобразимъ прежде всего геометрически ходъ измѣненія подъинтегральной функціи (рис. 99). При $z = 0$ кривая касается оси z, при $z = 1,\ 2, \ldots, n$ она касается оси z и въ то же время пересѣкаетъ ее (такъ какъ p число нечетное). Мы сейчасъ увидимъ, что подъ вліяніемъ знаменателя $(p-1)!$ кривая во всемъ промежуткѣ $(0, n)$ не подымается высоко надъ осью z, если только взять p достаточно большимъ; такимъ образомъ, очевидно, что интегралъ ε_ν будетъ очень малъ. Внѣ этого промежутка при $z > n$ подъинтегральная функція быстро возрастаетъ и затѣмъ асимптотически приближается къ оси z-овъ, какъ разсмотрѣнная выше функція $z^{\varrho-1} e^{-z}$ (для $\varrho = (n+1)p$); это объясняетъ, какъ получаются эти быстро растущія съ возрастаніемъ p значенія интеграла M, взятаго по всему промежутку отъ 0 до ∞.

Для того, чтобы дѣйствительно оцѣнить предѣлъ интеграловъ ε_ν, оказывается достаточнымъ примѣнить слѣдующій грубый пріемъ. Обозначимъ черезъ G и g_ν наибольшія абсолютныя значенія функцій $z(z-1)\ldots(z-n)$ и $(z-1)(z-2)\ldots(z-n)e^{-z+\nu}$ въ промежуткѣ $(0, n)$, такъ что

$$\left.\begin{array}{l} \left| z(z-1)\ldots(z-n) \right| \leqslant G \\ \left| (z-1)(z-2)\ldots(z-n)e^{-z+\nu} \right| \leqslant g_\nu \end{array}\right\} \text{ для } 0 \leqslant z \leqslant n.$$

Такъ какъ абсолютная величина интеграла никогда не превышаетъ интеграла абсолютной величины подъинтегральной функціи, то для каждаго ε_ν мы имѣемъ:

$$|\varepsilon_\nu| \leqslant \int_0^\nu \frac{G^{p-1} g_\nu}{(p-1)!} dz = \frac{G^{p-1} g_\nu \nu}{(p-1)!}. \qquad (6)$$

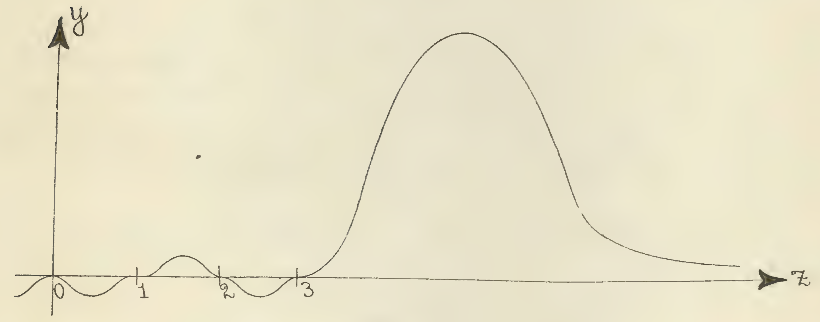


Рис. 99.

Числа G, g_ν, ν не зависятъ отъ p, а стоящій въ знаменателѣ факультетъ $(p-1)!$ возрастаетъ, какъ извѣстно, быстрѣе, чѣмъ степень G^{p-1}, или, точнѣе, при достаточно большомъ p дробь $\dfrac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ дѣлается меньше какого угодно напередъ заданнаго числа, какъ бы мало оно ни было. Равенство (6) показываетъ, такимъ образомъ, что, принимая за p достаточно большое число, мы можемъ сдѣлать сколь угодно малымъ каждое изъ чиселъ ε_ν.

Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что мы можемъ сдѣлать сколь угодно малой сумму $a_1 \varepsilon_1 + \cdots + a_n \varepsilon_n$, состоящую изъ n членовъ; въ самомъ дѣлѣ,

$$|a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \cdots + a_n \varepsilon_n| \leqslant |a_1| . |\varepsilon_1| + |a_2| . |\varepsilon_2| + \cdots + |a_n| . \varepsilon_n$$

и, согласно равенству (6),

$$\leqslant (|a_1| . 1 g_1 + |a_2| . 2 g_2 + \cdots + |a_n| . n g_n) \cdot \frac{G^{p-1}}{(p-1)!};$$

а такъ какъ множитель, заключенный въ скобки, имѣетъ постоянное, не зависящее отъ p значеніе, то благодаря множителю $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ мы можемъ всю правую часть, а, слѣдовательно, и лѣвую, т. е. $|a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \cdots + a_n \varepsilon_n|$, сдѣлать какъ угодно малой, — въ частности, меньше единицы.

Но это приводитъ насъ къ тому противорѣчію съ равенствомъ (3):

$$(a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n) + (a_1 \varepsilon_1 + \cdots + a_n \varepsilon_n) = 0,$$

которое мы выше имѣли въ виду (стр. 387); оно состоитъ въ томъ, что цѣлое число, отличное отъ нуля, по прибавленіи къ нему правильной дроби должно обратиться въ 0. Поэтому послѣднее равенство не можетъ имѣть мѣста, и такимъ образомъ доказана трансцендентность числа e.

Теперь мы перейдемъ къ доказательству трансцендентности числа π.

Доказательство трансцендентности числа π.

Это доказательство, хотя и сложнѣе предыдущаго доказательства, но, въ сущности, очень просто. Надо только — и въ этомъ заключается искусство математическаго творчества — подойти къ вопросу съ надлежащаго конца.

Линдеманъ (Lindemann) поставилъ вопросъ слѣдующимъ образомъ. До сихъ поръ было установлено, что равенство $\sum_{\nu=1,\ldots,n} a_\nu e^\nu = 0$ не можетъ имѣть мѣста, если a_ν и ν суть обыкновенныя цѣлыя раціональныя числа; спрашивается, нельзя ли до-

казать, что это равенство не можетъ имѣть мѣста и при алгебраическихъ значеніяхъ коэффиціентовъ a_ν и показателя ν. Линдеману дѣйствительно удалось это показать, а именно, общая теорема Линдемана о показательной функціи гласитъ такъ: равенство $\sum\limits_{\nu=1,\dots,n} a_\nu e^{b_\nu} = 0$ не можетъ имѣть мѣста, если коэффиціенты a_ν представляютъ любыя, а b_ν — различныя между собой алгебраическія числа. Трансцендентность π является тогда непосредственнымъ слѣдствіемъ этой теоремы; дѣйствительно, какъ извѣстно, имѣетъ мѣсто тождество $1 + e^{i\pi} = 0$; поэтому, если бы π было алгебраическимъ числомъ, то и $i\pi$ было бы такимъ же числомъ, и существованіе послѣдняго тождества противорѣчило бы упомянутой теоремѣ Линдемана.

Я хочу подробно изложить доказательство только одного частнаго случая теоремы Линдемана, который уже заключаетъ въ себѣ и доказательство трансцендентности числа π. При этомъ я буду слѣдовать снова, по существу дѣла, доказательству Гильберта („Mathem. Ann"., Bd. 43), которое существенно проще, чѣмъ доказательство Линдемана и представляетъ собой точное обобщеніе предыдущихъ разсужденій о числѣ e.

Исходнымъ пунктомъ служитъ соотношеніе:

$$1 + e^{i\pi} = 0. \tag{1}$$

Если π удовлетворяетъ какому-нибудь алгебраическому уравненію съ цѣлыми раціональными коэффиціентами, то $i\pi$ тоже удовлетворяетъ подобному же уравненію; обозначимъ черезъ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ всѣ корни этого послѣдняго уравненія, считая въ томъ числѣ и корень $i\pi$. Тождество (1) показываетъ, что должно имѣть мѣсто соотношеніе

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2})\dots(1 + e^{\alpha_n}) = 0.$$

Выполняя умноженіе, получаемъ:

$$1 + (e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \dots + e^{\alpha_n}) + (e^{\alpha_1+\alpha_2} + e^{\alpha_1+\alpha_3} + \dots + e^{\alpha_{n-1}+\alpha_n}) + \dots \\ \dots + (e^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}) = 0. \tag{2}$$

Можетъ случиться, что нѣкоторые изъ входящихъ сюда показателей равны нулю; но во всякомъ случаѣ, если даже это и имѣетъ

мѣсто, лѣвая часть будетъ содержать положительное слагаемое 1, которое вмѣстѣ со слагаемыми вида e^0 дастъ одно цѣлое положительное число a_0, навѣрное отличное отъ нуля. Остальныхъ показателей, неравныхъ нулю, обозначимъ черезъ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$, такъ что равенство (2) можно написать въ такомъ видѣ:

$$a_0 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_N} = 0 \quad (a_0 \neq 0). \qquad (3)$$

Съ другой стороны показатели $\beta_1, \ldots, \beta_N$ служатъ корнями нѣкотораго уравненія съ цѣлыми коэффиціентами. Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія съ цѣлыми коэффиціентами, которому удовлетворяютъ числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, можно, какъ извѣстно, вывести такое же уравненіе, корнями котораго являются всѣ двучленныя суммы $\alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 + \alpha_3, \ldots$; точно такъ же можно вывести подобныя уравненія для трехчленныхъ суммъ $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, \ldots$; наконецъ, сумма $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ равна раціональному числу и, слѣдовательно, удовлетворяетъ линейному цѣлочисленному уравненію. Перемножая всѣ эти уравненія, мы получимъ снова уравненіе съ цѣлыми раціональными коэффиціентами, нѣкоторые корни котораго могутъ равняться нулю, а прочіе равны $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$. Дѣля уравненіе на неизвѣстное въ степени, равной числу первыхъ корней, получимъ для N величинъ β уравненіе съ цѣлыми коэффиціентами какъ разъ N-ой степени и съ постоянымъ членомъ, отличнымъ отъ нуля:

$$b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_N z^N = 0, \qquad (4)$$

гдѣ b_0 и $b_N \neq 0$.

То, что мы имѣли въ виду доказать и что, какъ мы говорили выше, обнимаетъ, между прочимъ, и трансцендентность числа π, составляетъ слѣдующій частный случай теоремы Линдемана: равенство вида (3), съ цѣлымъ и отличнымъ отъ нуля коэффиціентомъ a_0, не можетъ имѣть мѣста, если числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ удовлетворяютъ уравненію N-ой степени (4) съ цѣлыми раціональными коэффиціентами.

Доказательство этой теоремы можно расчленить на такія же части, какъ и предыдущее доказательство трансцендентности

числа e. Подобно тому, какъ тамъ намъ удавалось дать особенно хорошія приближенія цѣлыхъ степеней $e^1, e^2, \ldots, e^n$ при помощи раціональныхъ чиселъ, такъ и здѣсь надо будетъ изслѣдовать вопросъ о возможно лучшемъ приближенномъ выраженіи степеней числа e, входящихъ въ равенство (3). Мы положимъ, сохраняя прежнія обозначенія:

$$e^{\beta_1} = \frac{M_1 + \varepsilon_1}{M}, \quad e^{\beta_2} = \frac{M_2 + \varepsilon_2}{M}, \ldots, e^{\beta_N} = \frac{M_N + \varepsilon_N}{M}; \qquad (5)$$

здѣсь знаменатель M тоже равенъ нѣкоторому обыкновенному цѣлому числу, а $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$ означаютъ очень малыя дроби, тогда какъ $M_1, \ldots, M_N$ представляютъ собой не цѣлыя раціональныя, а цѣлыя алгебраическія числа; въ этомъ именно заключается усложненіе по сравненію съ прежнимъ доказательствомъ. Но сумма всѣхъ чиселъ $M_1, \ldots, M_N$ и въ данномъ случаѣ равна цѣлому раціональному числу, а именно можно распорядиться такъ, что первое слагаемое равенства:

$$\left\{a_0 M + M_1 + M_2 + \cdots + M_N\right\} + \left\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_N\right\} = 0, \qquad (6)$$

въ которое, въ силу соотношеній (5), переходитъ равенство (3) по умноженіи его на M, будетъ представлять собой цѣлое раціональное число, отличное отъ нуля, тогда какъ абсолютная величина второго слагаемого будетъ, во всякомъ случаѣ, меньше 1. Но это и есть какъ разъ то противорѣчіе, которымъ мы воспользовались выше; такимъ образомъ будетъ обнаружена невозможность равенствъ (6) и (3), и наше доказательство будетъ выполнено. Въ частности, мы снова покажемъ, что сумма $M_1 + M_2 + \cdots + M_N$ дѣлится на нѣкоторое простое число p, а произведеніе $a_0 . M$ не дѣлится на него, изъ чего, аналогично прежнему, будетъ вытекать, что первое слагаемое въ равенствѣ (6) отлично отъ нуля. Затѣмъ мы покажемъ, что число p можно выбрать сколько угодно большимъ и при томъ такъ, чтобы второе слагаемое въ равенствѣ (6) было сколь угодно мало.

1) Прежде всего задача заключается въ томъ, чтобы выразить M посредствомъ подходящаго обобщенія интеграла Эрмита. Это обобщеніе основано на томъ замѣчаніи,

что корнями множителя $(z-1)\ldots(z-n)$ интеграла Эрмита являются какъ разъ показатели степеней e въ предполагаемомъ алгебраическомъ уравненіи. Поэтому теперь мы замѣнимъ его произведеніемъ, составленнымъ съ помощью показателей равенства (3), т. е. съ помощью корней уравненія (4):

$$(z-\beta_1)(z-\beta_2)\ldots(z-\beta_N)=\frac{1}{b_N}\left\{b_0+b_1 z+\cdots+b_N z^N\right\}. \quad (7)$$

Но существеннымъ оказывается здѣсь то обстоятельство, что мы присоединяемъ еще надлежащую степень числа b_N въ качествѣ множителя, что̀ раньше было излишне, такъ какъ произведеніе $(z-1)\ldots(z-n)$ и безъ того имѣло цѣлые коэффиціенты. Итакъ, въ концѣ концовъ мы полагаемъ:

$$M=\int_0^\infty \frac{e^{-z}z^{p-1}\,dz}{(p-1)!}\left\{b_0+b_1 z+\cdots+b_N z^N\right\}^p b_N^{(N-1)p-1}.$$

2) Если развернуть, какъ и выше, подъинтегральное выраженіе M по возрастающимъ степенямъ z, то наинизшій членъ, содержащій z^{p-1}, дастъ:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}z^{p-1}\,dz}{(p-1)!}\,b_0^p\,b_N^{(N-1)p-1}=b_0^p\,b_N^{(N-1)p-1},$$

гдѣ интегралъ выраженъ по формулѣ Γ, которую мы постоянно примѣняли выше (стр. 389). Всѣ же дальнѣйшія слагаемыя содержатъ подъ знакомъ интеграла z^p или еще высшія степени z; поэтому въ нихъ входитъ множителемъ $\frac{p!}{(p-1)!}$, умноженное на цѣлыя числа: слѣдовательно, всѣ они дѣлятся на p. Поэтому само M представляетъ собою цѣлое число, не дѣлящееся на p, если первое слагаемое $b_0^p\cdot b_N^{(N-1)p-1}$ не дѣлится на p, т. е. если простое число p не дѣлитъ ни b_0 ни b_N. Такъ какъ $b_0 \neq 0$, $b_N \neq 0$, то p, сообразно этому условію, можно опредѣлить проще всего, если принять, что

$$p>b_0,\quad p>b_N.$$

Такъ какъ $a_0 \neq 0$, то можно сразу же достигнуть того, что $a_0 . M$ не будетъ дѣлиться на p; для этого достаточно подчинить p еще одному условію:

$$p > a_0.$$

Всѣмъ этимъ условіямъ можно удовлетворить безконечнымъ числомъ способовъ, такъ какъ число простыхъ чиселъ безконечно велико.

3) Теперь мы должны перейти къ вопросу о построеніи чиселъ M_ν и ε_ν. Здѣсь дѣло обстоитъ нѣсколько иначе, чѣмъ раньше, такъ какъ мѣсто цѣлыхъ чиселъ ν занимаютъ числа β_ν, которыя могутъ быть комплексными, и одно изъ нихъ должно даже непремѣнно равняться $i\pi$. Поэтому, если мы хотимъ предпринять разложеніе интеграла M, подобное прежнему, то надо сперва установить путь интегрированія въ комплексной плоскости. Къ счастью, выраженіе, стоящее подъ знакомъ нашего интеграла, представляетъ собой повсюду въ конечномъ разстояніи однозначную правильную аналитическую функцію перемѣнной интегрированія z, для которой только значеніе $z = \infty$ является особенной (и именно, существенно особенной) точкой. Вмѣсто того, чтобы интегрировать отъ 0 до ∞ вдоль полуоси вещественныхъ положительныхъ чиселъ, мы можемъ воспользоваться какимъ-нибудь другимъ путемъ интегрированія, идущимъ отъ 0 въ ∞, если только онъ, въ концѣ концовъ, уходитъ въ безконечность, приближаясь, по крайней мѣрѣ, асимптотически къ какой-нибудь параллели къ упомянутой полуоси*); это необходимо для того, чтобы интегралъ вообще имѣлъ смыслъ.

Отмѣтимъ мысленно N точекъ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ въ комплексной плоскости и замѣтимъ, что мы получимъ число M, если будемъ интегрировать сперва по прямой отъ 0 до одной изъ этихъ точекъ β_ν, а затѣмъ отъ β_ν вдоль параллели къ вещественной оси

*) Это значитъ, что путь интегрированія долженъ, начиная съ нѣкотораго мѣста, идти вдоль какой-нибудь параллели къ оси x-овъ до ∞ или, по крайней мѣрѣ, приближаться асимптотически къ такой параллели. *Ред.*

до ∞ (рис. 100). Соотвѣтственно этому пути интегрированія можно разложить M на двѣ характеристическія части: прямо-

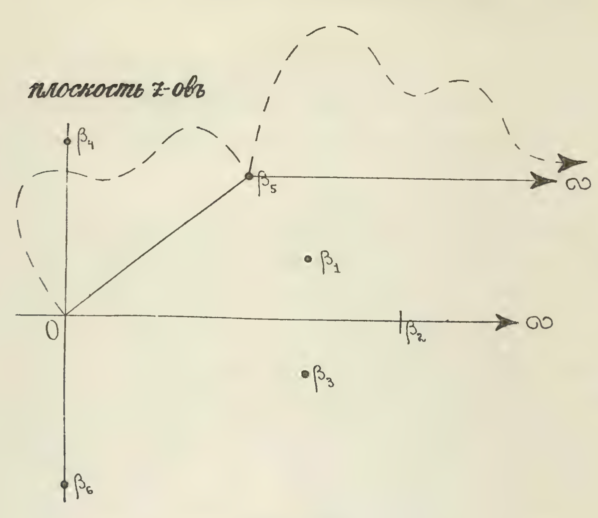


Рис. 100.

линейный путь отъ 0 до β_ν даетъ *) слагаемое ε_ν, становящееся безконечно-малымъ при возрастаніи p, а параллель отъ β_ν до ∞ даетъ *) цѣлое алгебраическое число M_ν:

$$\varepsilon_\nu = e^{\beta_\nu} \int_0^{\beta_\nu} \frac{e^{-z} z^{p-1} dz}{(p-1)!} (b_0 + b_1 z + \cdots + b_N z^N)^p b_N^{(N-1)p-1}, \quad (8^a)$$

$$M_\nu = e^{\beta_\nu} \int_{\beta_\nu}^{\infty} \frac{e^{-z} z^{p-1} dz}{(p-1)!} (b_0 + b_1 z + \cdots + b_N z^N)^p b_N^{(N-1)p-1}. \quad (8^b)$$

Эти выраженія дѣйствительно удовлетворяютъ равенствамъ (5). То обстоятельство, что мы пользуемся при этомъ именно прямолинейными путями, объясняется исключительно соображе-

*) По умноженіи на e^{β_ν}. *Ред.*

ніями удобства; любой криволинейный путь отъ 0 до β_ν далъ бы, конечно, то же самое значеніе для ε_ν, но только прямолинейный путь даетъ возможность проще сдѣлать оцѣнку этой величины. Точно такъ же мы могли бы вмѣсто горизонтали отъ β_ν до ∞ воспользоваться любой кривой, которая асимптотически приближается къ какой-нибудь горизонтали, но только это создало бы ненужныя трудности.

4) Я начну съ оцѣнки величинъ ε_ν, которая не представляетъ ничего новаго по сравненію съ предыдущимъ; нужно только воспользоваться тѣмъ обстоятельствомъ, что модуль комплекснаго интеграла никогда не превосходитъ произведенія наибольшаго значенія модуля подъинтегральнаго выраженія на длину пути интегрированія, которая въ данномъ случаѣ равна β_ν. Такимъ образомъ, мы получаемъ для верхней границы величинъ ε_ν выраженіе $\dfrac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ (гдѣ G означаетъ максимумъ выраженія $|z(b_0+b_1z+\cdots+b_Nz^N)\,b_N^{N-1}|$ въ нѣкоторой области, содержащей всѣ точки β_ν), умноженное на множителей, не зависящихъ отъ p. Изъ этого мы заключаемъ, подобно предыдущему (стр. 392 и 393), что, увеличивая p, можно сдѣлать абсолютную величину каждаго ε_ν, а, слѣдовательно, и суммы $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_N$ сколь угодно малой, — въ частности, меньше 1.

5) Въ существенно новыхъ соображеніяхъ оказывается надобность лишь при изслѣдованіи величинъ M_ν; впрочемъ, это будутъ прямыя обобщенія прежнихъ разсужденій, при чемъ придется лишь принять во вниманіе то обстоятельство, что мѣсто раціональныхъ чиселъ займутъ теперь алгебраическія числа. Разсмотримъ всю сумму:

$$\sum_{\nu=1}^{N} M_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} e^{\beta_\nu}\int_{\beta_\nu}^{\infty}\frac{e^{-z}z^{p-1}dz}{(p-1)!}\left\{b_0+b_1z+\cdots+b_Nz^N\right\}^p b_N^{(N-1)p-1}.$$

Если мы здѣсь въ каждомъ слагаемомъ въ силу равенства (7) (стр. 397) замѣнимъ многочленъ, содержащій z, черезъ произведеніе $(z-\beta_1)\ldots(z-\beta_N)$ и введемъ новую перемѣнную интегрированія $\zeta=z-\beta_\nu$, которая, соотвѣтственно принятому для z пути инте-

грированія, пробѣгаетъ всѣ вещественныя значенія отъ 0 до ∞, то для суммы получится такое выраженіе:

$$\sum_{\nu=1}^{N} M_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta}\,d\zeta}{(p-1)!} (\zeta+\beta_\nu)^{p-1} (\zeta+\beta_\nu-\beta_1)^p \ldots$$

$$\ldots \zeta^p \ldots (\zeta+\beta_\nu-\beta_N)^p\, b_N^{Np-1} = \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta}\,d\zeta}{(p-1)!} \zeta^p\, \Phi(z),$$

гдѣ

$$\Phi(z) = \sum_{\nu=1}^{N} (\zeta+\beta_\nu)^{p-1} (\zeta+\beta_\nu-\beta_1)^p \ldots (\zeta+\beta_\nu-\beta_N)^p\, b_N^{Np-1}.$$

При этомъ въ произведеніи p-ыхъ степеней въ каждомъ слагаемомъ этой суммы недостаетъ по ν-ому множителю ζ^p, который вынесенъ за знакъ суммы.

Въ подъинтегральномъ выраженіи $\Phi(z)$, какъ и каждое изъ N его слагаемыхъ, есть многочленъ относительно ζ; при чемъ въ каждомъ изъ слагаемыхъ, очевидно, одна изъ N величинъ $\beta_1, \ldots, \beta_N$ играетъ исключительную роль. Но въ самой суммѣ $\Phi(\zeta)$, а вмѣстѣ съ тѣмъ и во всѣхъ ея коэффиціентахъ при ζ, всѣ эти N величинъ играютъ одинаковую роль; другими словами, каждый изъ этихъ коэффиціентовъ представляетъ симметрическую функцію величинъ $\beta_1, \ldots, \beta_N$. Выполняя возведеніе въ степень въ отдѣльныхъ множителяхъ по обобщенной теоремѣ бинома, можно убѣдиться въ томъ, что это — цѣлыя раціональныя функціи отъ $\beta_1, \ldots, \beta_N$ съ цѣлыми раціональными численными коэффиціентами. Но, по извѣстной теоремѣ алгебры, раціональныя симметрическія функціи съ раціональными коэффиціентами отъ всѣхъ корней уравненія съ раціональными численными коэффиціентами представляютъ всегда раціональныя числа; а такъ какъ $\beta_1, \ldots, \beta_N$ суть всѣ корни уравненія (4), то коэффиціенты нашего многочлена относительно ζ дѣйствительно раціональны. Но намъ нужно имѣть цѣлыя раціональныя числа; ихъ мы получимъ съ помощью степени числа b_N, входящей множителемъ въ подъинтегральное выраженіе. Мы можемъ распредѣлить ее по

всѣмъ входящимъ въ это выраженіе линейнымъ множителямъ и написать сумму въ такомъ видѣ:

$$\sum_{\nu=1}^{N} M_\nu = \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta}\, d\zeta}{(p-1)!} \zeta^p \cdot \sum_{\nu=1}^{N} (b_N\zeta + b_N\beta_\nu)^{p-1} \cdot (b_N\zeta + b_N\beta_\nu - b_N\beta_1)^p \ldots$$

$$\ldots (b_N\zeta + b_N\beta_\nu - b_N\beta_N)^p. \quad (9)$$

Какъ и раньше, коэффиціенты многочлена относительно ζ, изображаемаго этой суммой, представляютъ цѣлыя раціональныя симметрическія функціи, съ цѣлыми раціональными коэффиціентами, отъ произведеній $b_N\beta_1$, $b_N\beta_2, \ldots, b_N\beta_N$. Но эти N произведеній являются корнями того уравненія, которое можно получить изъ равенства (4), если замѣнить въ немъ z черезъ $\frac{z}{b_N}$:

$$b_0 + b_1 \frac{z}{b_N} + \cdots + b_{N-1}\left(\frac{z}{b_N}\right)^{N-1} + b_N\left(\frac{z}{b_N}\right)^N = 0;$$

умножая это равенство на b_N^{N-1}, получимъ:

$$b_0 b_N^{N-1} + b_1 b_N^{N-2} z + \cdots + b_{N-2} b_N z^{N-2} + b_{N-1} z^{N-1} + z^N = 0,$$

т. е. уравненіе съ одними только цѣлыми коэффиціентами и коэффиціентомъ 1 при высшемъ членѣ.

Такія алгебраическія числа, которыя удовлетворяютъ цѣлочисленному уравненію съ коэффиціентомъ 1 при старшемъ членѣ, называютъ цѣлыми алгебраическими числами; теперь мы можемъ слѣдующимъ образомъ формулировать предыдущую теорему: цѣлыя раціональныя симметрическія функціи, съ цѣлыми коэффиціентами, отъ всѣхъ корней цѣлочисленнаго уравненія съ старшимъ коэффиціентомъ 1,—другими словами, отъ цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ,—сами представляютъ цѣлыя раціональныя числа. Эту теорему вы тоже найдете въ учебникахъ алгебры; если она, быть можетъ, не вездѣ окажется выраженной въ столь точной формѣ, то все же вы легко убѣдитесь въ ея справедливости, если прослѣдите за доказательствомъ.

Но коэффиціенты многочлена, стоящаго въ подъинтегральномъ выраженіи (9), дѣйствительно удовлетворяютъ условіямъ этой тео-

ремы; поэтому они должны быть цѣлыми раціональными числами; мы обозначимъ ихъ черезъ A_0, $A_1, \ldots, A_{Np-1}$:

$$\sum_{\nu=1}^{N} M_\nu = \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta}\zeta^p d\zeta}{(p-1)!}(A_0 + A_1\zeta + \cdots + A_{Np-1}\zeta^{Np-1}).$$

Теперь мы, въ сущности, пришли уже къ нашей цѣли. Въ самомъ дѣлѣ, если выполнить интегрированіе по нашей Γ-формулѣ (стр. 389), то получатся множители $p!$, $(p+1)!$, $(p+2)!, \ldots$, такъ какъ каждый членъ содержитъ множителя ζ въ степени высшей, чѣмъ p; вслѣдствіе этого по раздѣленіи на $(p-1)!$ во всѣхъ членахъ навѣрно останется еще множитель p, а другіе множители представляютъ собой цѣлыя числа (а именно, числа A_0, A_1, $A_2, \ldots$). Поэтому $\sum\limits_{\nu=1}^{N} M_\nu$ представляетъ цѣлое число, которое навѣрно дѣлится на p. Но, съ другой стороны, мы показали (стр. 398), что $a_0 M$ не дѣлится на p; поэтому сумма $a_0 M + \sum\limits_{\nu=1}^{N} M_\nu$ непремѣнно представляетъ цѣлое число, не дѣлящееся на p и, слѣдовательно, во всякомъ случаѣ, неравное нулю. Въ виду этого равенство (6):

$$a_0 M + \sum_{\nu=1}^{N} M_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \varepsilon_\nu = 0$$

тоже не можетъ имѣть мѣста, ибо отличное отъ нуля число по сложеніи его съ числомъ $\sum\limits_{\nu=1}^{N} \varepsilon_\nu$, которое по абсолютной величинѣ навѣрное меньше 1 (стр. 400), не можетъ дать 0. Но этимъ доказана теорема Линдемана въ ея упомянутомъ выше (стр. 396) частномъ случаѣ и вмѣстѣ съ нею и предложеніе о трансцендентности числа π, которое въ ней содержится.

Я хочу отмѣтить еще одинъ интересный частный случай общей теоремы Линдемана, состоящій въ томъ, что въ уравненіи $e^\beta = b$ числа b и β не могутъ быть

одновременно алгебраическими, если не считать тривіальнаго исключительнаго случая, когда $\beta = 0$, $b = 1$. Другими словами, показательная функція отъ алгебраическаго аргумента β и натуральный логариѳмъ алгебраическаго числа b всегда, кромѣ упомянутаго единственнаго исключенія, представляютъ трансцендентныя числа. Изъ этого при $\beta = 1$ вытекаетъ трансцендентность e и при $b = -1$ трансцендентность π (такъ какъ $e^{i\pi} = -1$). Доказательство этой теоремы представляетъ точное обобщеніе послѣднихъ разсужденій, при чемъ исходятъ не отъ $1 + e^{a}$, а отъ $b - e^{\beta}$; надо только принять во вниманіе, наряду со всѣми корнями алгебраическаго уравненія для β, также всѣ корни уравненія для b, чтобы придти къ равенству, подобному равенству (3); вслѣдствіе этого приходится употреблять большее число обозначеній, такъ что доказательство становится болѣе запутаннымъ. Но въ существенно новыхъ идеяхъ надобности не представляется. Вполнѣ аналогично можно провести доказательство общей теоремы Линдемана.

Я не стану входить въ разсмотрѣніе этихъ доказательствъ, но зато я хотѣлъ бы сдѣлать для васъ возможно болѣе нагляднымъ значеніе послѣдней теоремы о показательной функціи. Представьте себѣ, что на оси абсциссъ отмѣчены всѣ точки съ алгебраическими абсциссами x (рис. 101). Какъ мы знаемъ,

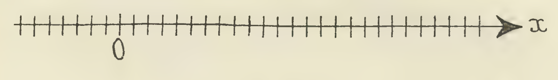


Рис. 101.

уже одни раціональныя и подавно всѣ алгебраическія числа образуютъ на оси абсциссъ сгущенный комплексъ (überall dicht); на первый взглядъ кажется, что алгебраическія числа уже во всякомъ случаѣ исчерпываютъ всѣ вещественныя точки x. И вотъ тутъ-то наша теорема говоритъ, что это не такъ, но что на оси x-овъ между алгебраическими числами помѣщается еще безконечно много другихъ, трансцендентныхъ чиселъ; безконечное число примѣровъ такихъ чиселъ представляютъ числа e^{x} и $\log x$, гдѣ x есть алгебраическое число, а также всякая алгебраическая функція этихъ трансцендентныхъ чиселъ.

Все это станетъ, быть можетъ, еще болѣе яснымъ, если мы напишемъ наше уравненіе въ такомъ видѣ:

$$y = e^x$$

и изобразимъ его въ плоскости xy въ видѣ кривой (рис. 102). Если отмѣтить на оси x-овъ и на оси y-овъ всѣ алгебраическія числа и затѣмъ разсматривать всѣ точки $x|y$, у которыхъ обѣ координаты суть алгебраическія числа, то вся плоскость xy окажется покрытой сгущеннымъ комплексомъ этихъ „алгебраическихъ" точекъ. Но, несмотря на такое сгущенное расположеніе алгебраическихъ точекъ, показательная кривая $y = e^x$ не содержитъ ни одной алгебраической точки, кромѣ точки $x = 0$, $y = 1$, такъ какъ во всѣхъ другихъ случаяхъ, согласно нашей теоремѣ, въ равенствѣ $y = e^x$, по крайней мѣрѣ, одна изъ величинъ x, y имѣетъ трансцендентное значеніе. Это свойство показательной кривой представляетъ, конечно, въ высшей степени удивительное явленіе!

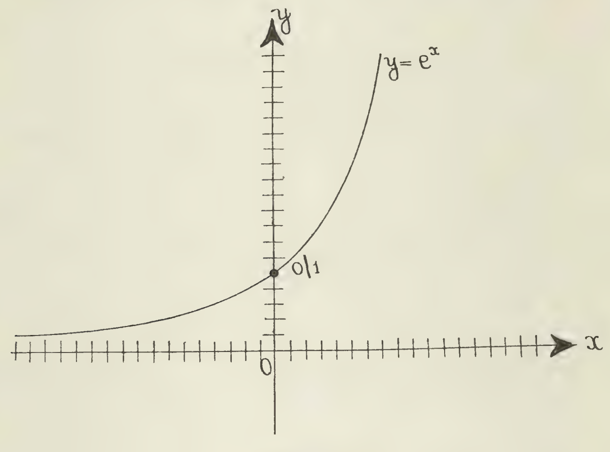


Рис. 102.

Эти теоремы, обнаруживающія существованіе огромнаго количества чиселъ, которыя не только не раціональны, но и вообще не могутъ быть составлены изъ цѣлыхъ чиселъ при помощи алгебраическихъ дѣйствій, имѣютъ для нашихъ представленій о числовомъ континуумѣ громадное значеніе. Какъ бы отпраздновалъ Пиѳагоръ такое открытіе, если открытіе ирраціональныхъ чиселъ казалось ему достойнымъ цѣлой гекатомбы!

Удивительно только то, какъ мало вниманія и пониманія встрѣчаютъ, вообще, эти вопросы о трансцендентности, хотя они оказываются столь простыми, если ихъ хоть разъ хорошенько продумать. На экзаменахъ постоянно приходится наблюдать, что кандидатъ не въ состояніи даже объяснить терминъ „трансцендентность“; большинство просто говоритъ, что трансцендентное число не удовлетворяетъ никакому алгебраическому уравненію, — а между тѣмъ это, вѣдь, совсѣмъ не вѣрно, какъ показываетъ примѣръ: $x - e = 0$. Забываютъ о самомъ главномъ, — о томъ, что коэффиціенты уравненія должны быть раціональными числами.

Если вы еще разъ продумаете наши доказательства трансцендентности, то эти простыя, элементарныя умозаключенія должны будутъ представиться вамъ, какъ нѣчто цѣлое, въ удобопонятномъ видѣ и будутъ вами усвоены надолго. Запомнить надо только интегралъ Эрмита; тогда все остальное вытекаетъ само собой вполнѣ естественнымъ образомъ.

Я хотѣлъ бы еще въ особенности подчеркнуть то обстоятельство, что въ этихъ доказательствахъ мы спокойно пользовались, согласно всѣмъ нашимъ основнымъ идеямъ, понятіемъ объ интегралѣ, — говоря геометрически, понятіемъ о площади, — какъ понятіемъ, совершенно въ сущности элементарнымъ, и я полагаю, что это существеннымъ образомъ способствовало наглядности доказательства. Сравните, напримѣръ, изложеніе въ т. I Вебера-Вельштейна или же въ моемъ собственномъ небольшомъ сочиненіи „Вопросы элементарной геометріи“ *), гдѣ въ духѣ старыхъ учебниковъ избѣгается употребленіе знака интеграла и вмѣсто него прибѣгаютъ къ вычисленію рядовъ, — и вы согласитесь съ тѣмъ, что тамъ ходъ доказательства далеко не столь нагляденъ и не столь легокъ для пониманія.

Послѣднія разсужденія о распредѣленіи алгебраическихъ чиселъ среди вещественныхъ чиселъ приводятъ насъ естественнымъ образомъ ко второй современной дисциплинѣ, на которую я уже не разъ указывалъ въ теченіе этихъ лекцій и которую я хочу теперь изложить болѣе подробно. Я имѣю въ виду ученіе о комплексахъ.

---

*) „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie“; см. цитату на стр. 89.

II. Ученіе о комплексахъ.

Работы основателя этой теоріи, Георга Кантора (Cantor) въ Галле, исходятъ какъ разъ отъ изслѣдованій вопроса о существованіи трансцендентныхъ чиселъ *) и даютъ этому факту совершенно иное освѣщеніе.

Если тотъ краткій обзоръ ученія о комплексахъ, который я намѣренъ вамъ предложить, имѣетъ какую-либо особенность, то послѣдняя заключается въ томъ, что на первый планъ выступаетъ изученіе конкретныхъ примѣровъ вмѣсто отвлеченныхъ разсужденій совершенно общаго характера, благодаря которымъ ученіе о совокупностяхъ часто принимаетъ весьма трудную для пониманія форму, отпугивающую читателя.

1. Мощность комплекса.

Соотвѣтственно сказанному, я прежде всего напомню вамъ, что въ теченіе этихъ лекцій мы не разъ имѣли дѣло съ различными характерными собраніями чиселъ, которыя мы теперь будемъ называть числовыми совокупностями или комплексами. Въ области вещественныхъ чиселъ мы имѣли дѣло съ такими комплексами:

1) натуральныя числа,
2) раціональныя числа,
3) алгебраическія числа,
4) всѣ вещественныя числа.

Каждая изъ этихъ совокупностей содержитъ безконечно много чиселъ. И вотъ прежде всего возникаетъ такой вопросъ: нельзя ли, несмотря на это обстоятельство, въ нѣкоторомъ опредѣленномъ смыслѣ сравнивать между собой эти совокупности по величинѣ или объему; другими словами,

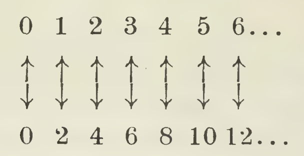
*) „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ (1873), Bd. 77.

нельзя ли „безконечность" одной совокупности считать большей, равной или меньшей, чѣмъ „безконечность" другой совокупности? Великой заслугой Кантора является то обстоятельство, что онъ установилъ точныя понятія и съ помощью ихъ разъяснилъ и разрѣшилъ этотъ, на первый взглядъ, совершенно неопредѣленный вопросъ. А именно, здѣсь на первомъ планѣ стоитъ понятіе о „мощности" или о „количественномъ числѣ": двѣ совокупности имѣютъ „одинаковую мощность" („эквивалентны"), если между ихъ элементами можно установить взаимно-однозначное сопряженіе, т. е. если одну совокупность можно такъ отобразить въ другой, что каждому элементу первой взаимно-однозначно соотвѣтствуетъ нѣкоторый элементъ второй. Если же подобное отображеніе невозможно, то совокупности имѣютъ „различную мощность"; при этомъ оказывается, что въ послѣднемъ случаѣ, какимъ бы образомъ мы ни пытались привести въ сопряженіе элементы обѣихъ совокупностей, всегда останутся лишніе элементы и притомъ всегда отъ одной и той же совокупности, которая имѣетъ поэтому „бóльшую мощность".

Все это мы поясн имъ теперь на 4 упомянутыхъ выше примѣрахъ. Можетъ быть, на первый взглядъ кажется вѣроятнымъ, что мощность совокупности натуральныхъ чиселъ меньше, чѣмъ мощность всѣхъ раціональныхъ чиселъ, а эта послѣдняя, въ свою очередь, меньше мощности всѣхъ алгебраическихъ чиселъ, и что, наконецъ, послѣдняя меньше мощности всѣхъ вещественныхъ чиселъ, — ибо каждая изъ этихъ совокупностей возникаетъ изъ предшествующей путемъ присоединенія новыхъ элементовъ. Но въ дѣйствительности такое заключеніе лишено всякаго основанія: хотя всякая конечная совокупность всегда имѣетъ бóльшую мощность, чѣмъ любая ея часть, но этого предложенія ни въ какомъ случаѣ нельзя переносить на безконечныя совокупности. Въ концѣ концовъ, такія уклоненія не такъ ужъ удивительны, если имѣть въ виду, что здѣсь мы переходимъ въ совершенно новую область.

Убѣдимся же сперва на совсѣмъ простомъ примѣрѣ въ томъ, что часть безконечной совокупности дѣйстви-

тельно можетъ имѣть равную съ нею мощность; для этого мы сравнимъ совокупность всѣхъ натуральныхъ чиселъ съ совокупностью всѣхъ четныхъ чиселъ:



Сопряженіе, указываемое двойными стрѣлками, очевидно, обладаетъ описанными выше свойствами, а именно всякому элементу одной совокупности соотвѣтствуетъ одинъ и только одинъ элементъ другой совокупности. Слѣдовательно, согласно опредѣленію Кантора, совокупность натуральныхъ чиселъ имѣетъ такую же мощность, какъ и ея часть, составляющая совокупность четныхъ чиселъ.

Итакъ, изслѣдованіе мощностей нашихъ 4-хъ совокупностей не такъ уже просто. Тѣмъ поразительнѣе тотъ простой результатъ, который составляетъ содержаніе замѣчательнаго открытія Кантора, сдѣланнаго имъ въ 1873 г.: три совокупности — всѣхъ натуральныхъ, всѣхъ раціональныхъ и всѣхъ алгебраическихъ чиселъ — имѣютъ одинаковую мощность, а совокупность всѣхъ вещественныхъ чиселъ имѣетъ отличную отъ нихъ и именно бо́льшую мощность. Такую совокупность, которая допускаетъ взаимно-однозначное сопряженіе ея элементовъ съ натуральнымъ рядомъ чиселъ (которая, слѣдовательно, имѣетъ съ послѣднимъ одинаковую мощность), называютъ исчислимой (abzählbar). Теперь мы можемъ такъ выразить упомянутую теорему: всѣ раціональныя, а также всѣ алгебраическія числа образуютъ исчислимую совокупность, а совокупность всѣхъ вещественныхъ чиселъ представляетъ неисчислимый комплексъ.

Начнемъ съ доказательства этой теоремы для случая раціональныхъ чиселъ, которое, несомнѣнно, извѣстно многимъ изъ васъ. Всякое раціональное число — положительное или отрицательное — можно представить однозначнымъ образомъ въ видѣ дроби p/q, гдѣ p и q суть взаимно простыя цѣлыя

числа и q, напримѣръ, всегда имѣетъ положительное значеніе (тогда какъ p можетъ быть и отрицательнымъ). Чтобы расположить всѣ эти дроби p/q въ одинъ рядъ, прежде всего отмѣтимъ мысленно въ плоскости pq всѣ точки съ цѣлочисленными координатами p, q и расположимъ ихъ въ исчислимый рядъ, какъ показываетъ спиралеобразный путь на рис. 103. Со-

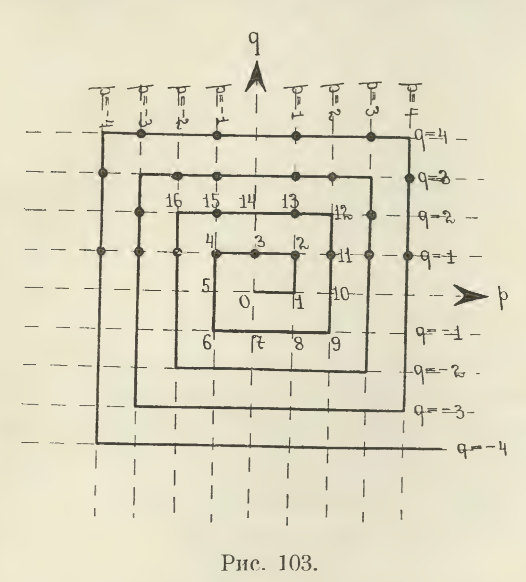


Рис. 103.

отвѣтственно этому мы можемъ перенумеровать всѣ наши числовыя пары (p/q), такъ что каждой парѣ будетъ отвѣчать только одно цѣлое число и въ то же время будутъ исчерпаны всѣ цѣлыя числа. Теперь откинемъ изъ этого ряда всѣ тѣ числовыя пары, которыя не удовлетворятъ высказаннымъ выше условіямъ (отсутствіе общихъ дѣлителей и $q > 0$), и перенумеруемъ только оставшіяся пары (отмѣченныя на рисункѣ точками). Получается такой двойной рядъ:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 ...,
1	0	—1	2	$^1/_2$	—$^1/_2$	—2	3	$^3/_2$	$^2/_3$	$^1/_3$ ...,

въ которомъ каждому раціональному числу соотвѣтствуетъ ровно одно цѣлое число и каждому цѣлому числу—ровно одно раціональное; это дока-

зываетъ исчислимость совокупности раціональныхъ чиселъ. Замѣтимъ, что при этомъ расположеніи раціональныхъ чиселъ въ исчислимый рядъ кореннымъ образомъ разрушается ихъ натуральная послѣдовательность по величинѣ; это видно на рис. 104, въ которомъ рядомъ съ раціональными точками оси абсциссъ написаны ихъ порядковые нумера въ приведенномъ выше искусственномъ расположеніи.

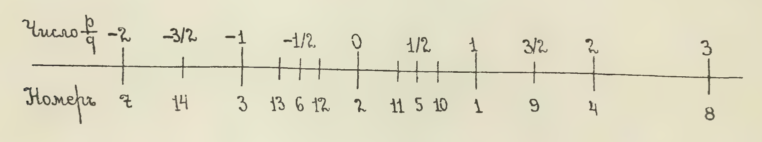


Рис 104.

Теперь мы перейдемъ къ алгебраическимъ числамъ: здѣсь я также хочу ограничиться вещественными числами, хотя разсмотрѣніе комплексныхъ чиселъ, собственно, также не представляетъ существенныхъ затрудненій. Всякое вещественное алгебраическое число ω удовлетворяетъ нѣкоторому вещественному цѣлочисленному уравненію:

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\omega + a_n = 0,$$

которое мы можемъ считать неприводимымъ; другими словами, мы считаемъ, что выдѣлены всѣ, какіе только можно, раціональные множители лѣвой части, а также всѣ общіе дѣлители цѣлыхъ чиселъ $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Предполагаемъ также, что a_0 всегда есть число положительное. При такихъ условіяхъ, всякое алгебраическое число ω, какъ извѣстно, удовлетворяетъ только одному неприводимому уравненію указаннаго вида съ цѣлыми коэффиціентами; обратно, всякому такому уравненію принадлежитъ въ видѣ корней, самое большее, n вещественныхъ алгебраическихъ чиселъ; но ихъ можетъ быть и меньше, чѣмъ n, или ихъ можетъ даже вовсе не быть. Если

бы мы сумѣли расположить въ одинъ исчислимый рядъ всѣ такія алгебраическія уравненія, то этимъ самымъ, очевидно, были бы перечислены и всѣ ихъ корни, а, слѣдовательно, и всѣ вещественныя алгебраическія числа.

Кантору удалось достигнуть этого слѣдующимъ образомъ: онъ относитъ каждому уравненію опредѣленное положительное число, такъ называемую „высоту“ уравненія:

$$N = n - 1 + a_0 + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| + |a_n|$$

и распредѣляетъ уравненія въ исчислимый рядъ классовъ, соотвѣтствующихъ значеніямъ $N = 1, 2, 3, \ldots$ Въ каждомъ такомъ классѣ, согласно опредѣленію числа N, показатель степени n и абсолютная величина каждаго изъ коэффиціентовъ должны быть меньше конечнаго числа N, такъ что каждому классу можетъ принадлежать, вообще, лишь конечное число уравненій и, въ частности, лишь конечное число неприводимыхъ уравненій. Коэффиціенты легко можно опредѣлить путемъ испытанія всѣхъ возможныхъ комбинацій для даннаго значенія N; а первые члены ряда уравненій для низшихъ значеній N можно написать сразу.

Теперь опредѣлимъ для каждой опредѣленной высоты N вещественные корни всѣхъ принадлежащихъ къ этой высотѣ неприводимыхъ уравненій, число которыхъ конечно; число этихъ корней также конечно, и мы можемъ расположить ихъ по ихъ дѣйствительной величинѣ. Теперь возьмемъ расположенныя такимъ образомъ числа съ высотой 1, затѣмъ числа съ высотой 2 и т. д. и перенумеруемъ ихъ въ этомъ порядкѣ. Этимъ будетъ дѣйствительно перенумерована совокупность всѣхъ алгебраическихъ чиселъ, такъ какъ, съ одной стороны, мы такимъ образомъ приходимъ къ каждому алгебраическому числу, а съ другой — всякое цѣлое число служитъ номеромъ для нѣкотораго алгебраическаго числа. Дѣйствительно, если имѣть достаточно терпѣнія, то можно опредѣлить, напримѣръ, 7563-тье число указанной схемы или же найти для всякаго даннаго сколь угодно сложнаго алгебраическаго числа соотвѣтствующій ему номеръ.

Въ этомъ случаѣ расположеніе въ исчислимый рядъ тоже нарушаетъ коренньмъ образомъ естественную послѣдовательность алгебраическихъ чиселъ по ихъ величинѣ, хотя она и сохраняется въ каждой группѣ чиселъ одинаковой высоты. Такъ, напримѣръ, два такихъ близкихъ числа, какъ $\frac{2}{5}$ и $\frac{2001}{5000}$, имѣютъ далеко отстоящія высоты 7 и 7001 между тѣмъ какъ $\sqrt{5}$, какъ корень уравненія $z^2 - 5 = 0$, имѣетъ ту же самую высоту 7, что и $\frac{2}{5}$.

Прежде, чѣмъ перейти къ послѣднему примѣру, я хочу сообщить вамъ небольшую вспомогательную теорему, которая доставитъ намъ дальнѣйшія исчислимыя совокупности и одновременно познакомитъ насъ съ однимъ пріемомъ доказательства, которымъ мы воспользуемся еще впослѣдствіи. Если даны двѣ исчислимыя совокупности:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots \text{ и } b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots,$$

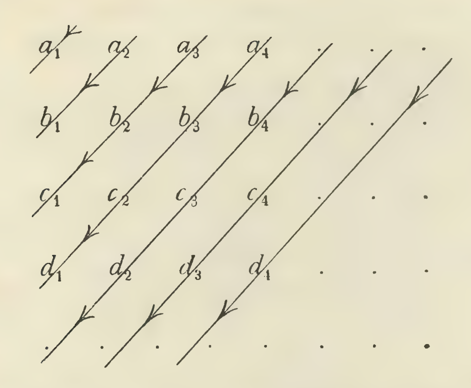
то совокупность всѣхъ a и всѣхъ b, получаемая отъ соединенія обѣихъ этихъ совокупностей въ одну, тоже будетъ исчислимой. Дѣйствительно, ее можно записать въ такомъ порядкѣ:

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3, \ldots$$

и тѣмъ сразу же установить взаимно-однозначное соотвѣтствіе съ натуральнымъ рядомъ чиселъ. Аналогично этому, 3, 4, ... и, вообще, конечное число исчислимыхъ совокупностей образуютъ, вмѣстѣ взятыя, снова исчислимую совокупность. Но не столь очевиднымъ представляется слѣдующій фактъ, составляющій содержаніе нашей вспомогательной теоремы: соединеніе даже безконечнаго, но исчислимаго ряда исчислимыхъ же совокупностей образуетъ тоже исчислимую совокупность.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ черезъ a_1, a_2, $a_3, \ldots$ элементы первой совокупности, черезъ b_1, b_2, $b_3, \ldots$ — элементы второй, черезъ c_1, c_2, $c_3, \ldots$ — элементы третьей и т. д. и представимъ себѣ, что эти совокупности написаны одна подъ другой; тогда стоитъ только расположить всѣ элементы въ такомъ по-

рядкѣ, какой указываютъ послѣдовательныя діагонали въ слѣдующей схемѣ.



Получаемое при этомъ расположеніе элементовъ:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \dots \\ a_1 & a_2 & b_1 & a_3 & b_2 & c_1 & a_4 & b_3 & c_2 & d_1 & a_5 \dots \end{matrix}$$

относитъ всякому числу a, b, c, ... одинъ и только одинъ номеръ, чѣмъ доказывается наше утвержденіе. Этотъ пріемъ можно было бы назвать, имѣя въ виду приведенную схему, „нумераціей по діагоналямъ“.

Огромное количество разнообразныхъ исчислимыхъ совокупностей, получаемыхъ этимъ путемъ, могло бы заставить думать, что всѣ вообще безконечныя совокупности исчислимы. Но, вопреки этому, мы докажемъ теперь вторую часть теоремы Кантора, по которой континуумъ всѣхъ вещественныхъ чиселъ представляетъ неисчислимую совокупность; эту совокупность мы будемъ обозначать знакомъ C_1, такъ какъ позднѣе намъ придется еще говорить о континуумахъ многихъ измѣреній.

Комплексъ C_1 можно, конечно, опредѣлить, какъ совокупность всѣхъ конечныхъ вещественныхъ значеній x, при чемъ x мы можемъ представлять себѣ, например, какъ абсциссу на нѣкоторой оси. Покажемъ, прежде всего, что совокупность всѣхъ внутреннихъ точекъ отрѣзка съ длиною 1 ($0 < x < 1$), имѣетъ точно такую же мощность, какъ C_1. Въ самомъ дѣлѣ, изобразимъ первую совокупность точками оси

x-овъ, вторую—точками отрѣзка-единицы оси y-овъ, перпендикулярной къ оси x-овъ (рис. 105); теперь можно установить между обѣими совокупностями взаимно-однозначное сопряженіе при помощи любой монотонно возрастающей кривой указаннаго на

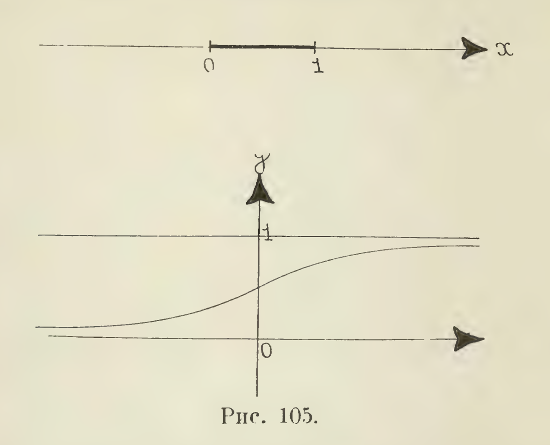


Рис. 105.

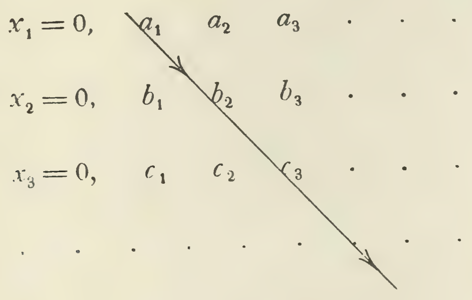
рис. 105 вида, которая имѣетъ асимптотами слѣва прямую $y = 0$, а справа прямую $y = 1$, — напримѣръ, одной изъ вѣтвей кривой $y = -\frac{1}{\pi}$ arc ctg x *). Такимъ образомъ, мы вправѣ замѣнить C_1 совокупностью всѣхъ чиселъ, содержащихся между 0 и 1, что мы и сдѣлаемъ въ дальнѣйшемъ.

Теперь я изложу то доказательство неисчислимости комплекса C_1, которое Канторъ сообщилъ на Съѣздѣ Естествоиспытателей въ Галле въ 1891 году; оно проще и болѣе пригодно для обобщенія, чѣмъ доказательство, опубликованное имъ впервые въ 1873 году. Центральный пунктъ этого новаго доказательства составляетъ одинъ въ высшей степени простой пріемъ, такъ называемый „діаметральный методъ“, который при всякомъ исчислимомъ расположеніи всѣхъ вещественныхъ чиселъ, какое мы могли бы только допустить, доставляетъ веще-

*) Сопряженіе устанавливается, слѣдовательно, такъ, что каждому значенію x соотвѣтствуетъ опредѣленная точка на кривой (имѣющая это значеніе абсциссой); а этой точкѣ соотвѣтствуетъ опредѣленное значеніе на оси y — ея ордината.

ственное число, которое навѣрное не содержится въ этомъ расположенiи; это составляетъ противорѣчiе, и поэтому совокупность C_1 не можетъ быть исчислимой.

Напишемъ всѣ наши числа $0 < x < 1$ въ видѣ десятичныхъ дробей; предположимъ, что всѣ онѣ расположены въ исчислимый рядъ:



гдѣ a, b, c обозначаютъ любыя изъ цифръ $0, 1, \ldots, 9$, взятыя въ любомъ порядкѣ. Прежде, чѣмъ идти дальше, замѣтимъ, что децимальное начертанiе дробей не вполнѣ однозначно, такъ какъ, напримѣръ, $0,999\ldots = 1,000\ldots$, и вообще всякую конечную десятичную дробь можно написать въ видѣ безконечной съ перiодомъ 9; это составляетъ одно изъ основныхъ положенiй счисленiя десятичныхъ дробей (ср. стр. 52). Чтобы установить однозначныя обозначенiя, условимся разъ навсегда употреблять только безконечныя десятичныя дроби, т. е. вмѣсто конечныхъ дробей всегда писать дроби, кончающiяся перiодомъ 9. Предположимъ, что въ предыдущей схемѣ всѣ дроби уже приведены къ такому виду.

Чтобы образовать десятичную дробь x', отличную отъ всѣхъ чиселъ нашей схемы, выдѣлимъ цифры a_1, b_2, $c_3, \ldots$, стоящiя въ отмѣченной на схемѣ дiагонали (отсюда и самое названiе этого метода), и поставимъ на первомъ десятичномъ мѣстѣ числа x' какую-нибудь цифру a_1', навѣрное отличную отъ a_1, на второмъ мѣстѣ—какую-нибудь цифру b_2', отличную отъ b_2, на третьемъ мѣстѣ—цифру c_3', отличную отъ c_3, и такъ далѣе:

$$x' = 0,\ a_1'\ b_2'\ c_3' \ldots$$

Но эти условія относительно выбора цифръ a_1', b_2', c_3', ... предоставляютъ намъ, очевидно, еще нѣкоторый произволъ; мы можемъ поэтому распорядиться такъ, чтобы x' было равно дѣйствительно десятичной дроби, а не $0{,}999\ldots = 1$, напримѣръ, а также чтобы она не прекращалась послѣ нѣкотораго конечнаго числа знаковъ. Но въ такомъ случаѣ x' навѣрное отлично отъ числа x_1, такъ какъ у нихъ первыя цифры не одинаковы, а между тѣмъ двѣ безконечныя дроби могутъ быть равны между собой только въ томъ случаѣ, если у нихъ одинаковы всѣ соотвѣтствующія цифры. Точно такъ же $x' \neq x_2$ вслѣдствіе различія вторыхъ цифръ, $x' \neq x_3$ изъ-за третьихъ цифръ, и, такимъ образомъ, вообще число x', будучи вполнѣ опредѣленной десятичной дробью, оказывается отличнымъ отъ всѣхъ чиселъ $x_1, x_2, x_3, \ldots$ исчислимой схемы. Слѣдовательно, мы пришли къ желательному противорѣчію, и это доказываетъ, что континуумъ C_1 представляетъ неисчислимую совокупность.

Эта теорема a priori обнаруживаетъ существованіе трансцендентныхъ чиселъ, ибо совокупность алгебраическихъ чиселъ исчислима и потому не можетъ исчерпать неисчислимый континуумъ всѣхъ вещественныхъ чиселъ. Но въ то время, какъ всѣ прежнія разсужденія знакомили насъ съ безконечными, но исчислимыми совокупностями трансцендентныхъ чиселъ, теперь мы можемъ утверждать, что ихъ мощность дѣйствительно превосходитъ мощность исчислимыхъ совокупностей, такъ что только теперь мы получаемъ правильное общее представленіе объ ихъ многообразіи. Приведенные выше частные примѣры, въ свою очередь, оживляютъ эту нѣсколько абстрактную картину.

Покончивъ такимъ образомъ съ вопросомъ о континуумѣ одного измѣренія, я считаю послѣдовательнымъ обратиться къ континууму двухъ измѣреній. Прежде всякій, конечно, думалъ, что плоскость содержитъ больше точекъ, чѣмъ прямая; поэтому всѣ были крайне удивлены, когда Канторъ показалъ*), что мощность двухмѣрнаго континуума C_2 въ точности равна мощности континуума одного измѣ-

*) „Journal für die reine u. angewandte Mathematik", Bd. 84 (1878).

ренія C_1. Если вмѣсто C_2 возьмемъ квадратъ со стороной 1, а вмѣсто C_1 — отрѣзокъ единицы длины, то должно оказаться возможнымъ установить между точками обоихъ образовъ взаимно-однозначное сопряженіе (рис. 106).

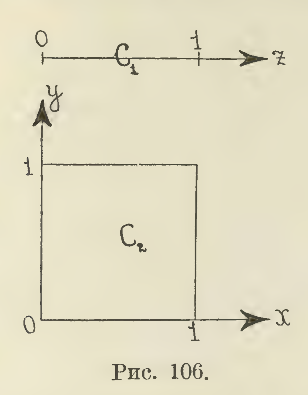


Рис. 106.

Причина того, что это утвержденіе представляется такимъ парадоксальнымъ, заключается, вѣроятно, въ трудности освободиться отъ представленія объ извѣстной непрерывности сопряженія, а между тѣмъ въ дѣйствительности то сопряженіе, которое мы хотимъ установить, оказывается въ высшей мѣрѣ разрывнымъ или, если хотите, неорганическимъ. Оно въ такой же мѣрѣ разрушаетъ, кромѣ „мощности", все, что является характернымъ для плоскаго и для линейнаго образа, какъ таковыхъ, какъ если бы всѣ точки квадрата насыпали въ мѣшокъ и затѣмъ самымъ основательнымъ образомъ перемѣшали ихъ.

Совокупность точекъ квадрата совпадаетъ съ совокупностью всѣхъ паръ десятичныхъ дробей вида:

$$x = 0,\ a_1 a_2 a_3 \ldots, \quad y = 0,\ b_1 b_2 b_3 \ldots,$$

которыя мы, какъ и раньше, предполагаемъ написанными въ безконечномъ видѣ. Слѣдовательно, мы исключаемъ тѣ пограничныя точки, для которыхъ одна изъ координатъ x, y обращается въ 0, — другими словами, исключаемъ обѣ стороны квадрата, примыкающія къ началу координатъ O, между тѣмъ какъ обѣ остальныя стороны мы сохраняемъ. Но нетрудно убѣдиться въ томъ, что

это нисколько не измѣняетъ мощности комплекса точекъ. И вотъ основная идея доказательства Кантора заключается въ томъ, чтобы слить обѣ эти десятичныя дроби въ одну новую десятичную дробь z, по которой, въ свою очередь, можно было бы однозначно опредѣлить x, y и которая принимала бы ровно по одному разу всѣ значенія $0 < z \leqslant 1$, когда точка $x | y$ однажды пробѣгаетъ по всему квадрату. Если разсматривать z, какъ абсциссу, то получимъ дѣйствительно желаемое взаимно-однозначное сопряженіе квадрата C_2 и отрѣзка-единицы C_1; при этомъ, соотвѣтственно предложеніямъ относительно квадрата, у этого отрѣзка принимаемъ во вниманіе только одну конечную точку $z = 1$.

Такое соединеніе мы попытаемся сперва получить тѣмъ, что положимъ

$$z = 0,\ a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots;$$

дѣйствительно, изъ этой дроби можно, отдѣляя четные и нечетные десятичные знаки, возстановить однозначнымъ образомъ x и y. Но тутъ, въ виду двоякаго способа написанія десятичныхъ дробей, возникаетъ слѣдующее возраженіе: такое z не пробѣгаетъ всего ряда значеній C_1, когда за $x | y$ принимаемъ послѣдовательно всѣ пары безконечныхъ десятичныхъ дробей, т. е. всю совокупность точекъ C_2; дѣйствительно, хотя при этомъ для z всегда получается безконечная дробь, но существуютъ такія безконечныя дроби, какъ, напримѣръ,

$$z = 0,\ c_1 c_2 0 c_4 0 c_6 0 c_8 \ldots,$$

которыя получаются только изъ конечной дроби x или y, — въ нашемъ примѣрѣ изъ

$$x = 0,\ c_1 000 \ldots, \quad y = 0,\ c_2 c_4 c_6 c_8 \ldots.$$

Обойти это затрудненіе легче всего при помощи слѣдующаго видоизмѣненія метода Кантора, предложеннаго Кёнигомъ (J. König) изъ Будапешта. А именно, Кёнигъ понимаетъ подъ a, b, c не отдѣльныя цифры, а извѣстные числовые комплексы, я бы сказалъ—„молекулы“ десятичной дроби, соединяя въ одно цѣлое всякую значащую цифру,

отличную отъ 0, со всѣми непосредственно ей предшествующими нулями, выдѣляя такимъ образомъ роль нулей. Тогда всякая десятичная безконечная дробь должна имѣть безконечно много молекулъ, такъ какъ въ ней появляются все снова и снова отличныя отъ нуля цифры, и наоборотъ. Напримѣръ, въ дроби

$$x = 0,\ 3208007000302405\ldots$$

за такія „молекулы“ слѣдуетъ считать:

$$a_1 = [3],\ a_2 = [2],\ a_3 = [08],\ a_4 = [007],\ a_5 = [0003],\ a_6 = [02],\ a_7 = [4], \ldots$$

Пусть теперь въ вышеприведенномъ правилѣ сопряженія $x|y$ и z символы a, b, c обозначаютъ такія молекулы. Тогда всякой парѣ $x|y$ будетъ снова однозначно соотвѣтствовать безконечная дробь z, которая, въ свою очередь, опредѣлитъ x и y. Но теперь всякая дробь z распадается на двѣ дроби x и y, съ безконечнымъ числомъ „молекулъ“ каждая, и можетъ возникнуть только однажды, когда мы за $x|y$ будемъ принимать послѣдовательно всѣ пары безконечныхъ десятичныхъ дробей. Но это дѣйствительно даетъ взаимно-однозначное отображеніе отрѣзка и квадрата одного въ другомъ; слѣдовательно, они имѣютъ одинаковую мощность.

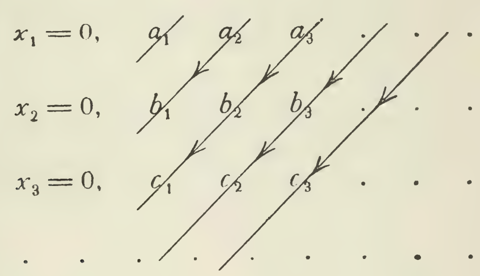
Конечно, совершенно аналогичнымъ образомъ можно показать, что континуумы трехъ, четырехъ,... измѣреній имѣютъ такую же мощность, какъ и одномѣрный континуумъ. Но замѣчательно то, что и континуумъ C_∞ безконечно многихъ измѣреній, — точнѣе говоря, исчислимой совокупности измѣреній, — имѣетъ такую же мощность; о такомъ пространствѣ безконечно большого числа измѣреній теперь особенно много говорятъ въ Гёттингенѣ. Его опредѣляютъ, какъ совокупность всѣхъ тѣхъ числовыхъ системъ, какія только можетъ принимать исчислимая безконечная совокупность перемѣнныхъ

$$x_1,\quad x_2, \ldots,\quad x_n, \ldots,$$

если каждая изъ нихъ пробѣгаетъ весь рядъ вещественныхъ значеній. Это представляетъ, собственно говоря, только новый спо-

собъ выраженія понятій, давно уже примѣняемыхъ въ математикѣ. Въ самомъ дѣлѣ, вѣдь всегда разсматривали совокупность всѣхъ степенныхъ или тригонометрическихъ рядовъ; исчислимая безконечная совокупность коэффиціентовъ этихъ представляетъ, въ сущности, не что иное, какъ такую же совокупность безконечнаго числа независимыхъ перемѣнныхъ, которыя, впрочемъ, всегда подчинены еще извѣстнымъ условіямъ сходимости ряда.

Здѣсь мы снова ограничимся разсмотрѣніемъ „куба-единицы“ континуума C_∞, — другими словами, совокупностью всѣхъ точекъ, удовлетворяющихъ условію $0 < x_n \leqslant 1$, и покажемъ, что эти точки можно привести во взаимно-однозначное соотвѣтствіе съ точками отрѣзка-единицы $0 < x \leqslant 1$ континуума C_1. При этомъ снова, ради удобства, отбрасываемъ всѣ тѣ пограничныя точки, для которыхъ одна изъ координатъ x_n равна нулю, и, соотвѣтственно, точку $x = 0$, — всѣ же остальныя пограничныя точки сохраняемъ. Исходимъ, какъ и раньше, изъ изображенія координатъ точекъ континуума C_∞ при помощи десятичныхъ дробей:



при чемъ всѣ эти дроби должны быть написаны въ безконечномъ видѣ, а символы a, b, c, ... должны обозначать „молекулы десятичныхъ дробей“ въ установленномъ выше смыслѣ, т. е. такіе комплексы цифръ, которые состоятъ изъ одной значащей цифры съ предшествующими ей нулями. Теперь все это безконечное количество десятичныхъ дробей мы должны соединить въ одну такую новую дробь, которая, въ свою очередь, позволяла бы возстановить ея составныя части, или, сохраняя химическое уподобленіе, скажемъ такъ: мы должны образовать такое нестойкое соединеніе всѣхъ этихъ молекулярныхъ аггрегатовъ, чтобы его легко можно было разложить на составныя

части. Этого удается достичь сразу же при помощи „способа діагоналей“, который мы уже примѣняли выше (стр. 415). Напишемъ наши „молекулы“ въ томъ порядкѣ, какой указываютъ послѣдовательныя косыя линіи въ предыдущей схемѣ:

$$x = 0, a_1 a_2 b_1 a_3 b_2 c_1 a_4 b_3 c_2 d_1 a_5 \ldots;$$

такимъ образомъ, со всякой точкой въ C_∞ однозначно сопрягается нѣкоторая точка въ C_1. Обратно, такимъ образомъ можно получить всякую точку континуума C_1; въ самомъ дѣлѣ, зная ея изображеніе въ видѣ безконечной десятичной дроби, можно, пользуясь указанной схемой, однозначно опредѣлить безконечное число безконечныхъ десятичныхъ дробей x_1, x_2, x_3, ..., изъ которыхъ данная дробь получается посредствомъ указаннаго пріема. Такимъ образомъ, намъ дѣйствительно удалось установить взаимно-однозначное отображеніе куба-единицы пространства C_∞ на отрѣзкѣ-единицѣ континуума C_1.

Въ результатѣ всего сказаннаго до сихъ поръ мы убѣждаемся въ томъ, что существуютъ, во всякомъ случаѣ, двѣ различныя между собой мощности: 1) мощность исчислимыхъ совокупностей, 2) мощность всѣхъ континуумовъ (непрерывныхъ протяженій) C_1, C_2, C_3, ..., вплоть до C_∞.

Теперь естественно возникаетъ вопросъ о томъ, существуютъ ли еще бо́льшія мощности; оказывается, что, дѣйствительно, возможно указать еще бо́льшую мощность и притомъ не только при помощи абстрактныхъ разсужденій, но даже оставаясь исключительно въ предѣлахъ тѣхъ понятій, которыя и безъ того всегда примѣняются въ математикѣ; а именно, такой еще бо́льшей мощностью обладаетъ 3) совокупность всевозможныхъ вещественныхъ функцій $f(x)$ вещественной перемѣнной x.

Здѣсь достаточно ограничиться измѣненіемъ перемѣнной въ промежуткѣ $0 < x < 1$. Прежде всего приходитъ въ голову, что рѣчь идетъ о совокупности непрерывныхъ функцій $f(x)$. Однако, здѣсь имѣетъ мѣсто слѣдующая замѣчательная теорема: совокупность всѣхъ непрерывныхъ функцій обла-

даетъ мощностью континуума и, слѣдовательно, принадлежитъ группѣ 2). Новую бо́льшую мощность мы получимъ только въ томъ случаѣ, если примемъ во вниманіе также совершенно разрывныя функціи самаго общаго вида, какія только можно себѣ представить; иными словами, если со всякой точкой x будемъ сопрягать совершенно произвольное значеніе функціи, не обращая никакого вниманія на сосѣднія значенія ея.

Сперва я докажу упомянутую теорему относительно совокупности непрерывныхъ функцій; мнѣ придется для этого повторить тѣ соображенія, которыя служили намъ выше (стр. 336) для того, чтобы выяснить возможность разложенія „произвольныхъ" функцій въ тригонометрическіе ряды; впрочемъ, я долженъ буду мѣстами придать этимъ разсужденіямъ болѣе тонкій характеръ. Тамъ я уже показалъ, что

a) непрерывная функція $f(x)$ вполнѣ опредѣляется ея значеніями $f(r)$ во всѣхъ раціональныхъ точкахъ r (рис. 107).

b) Съ другой стороны, намъ извѣстно, что всѣ раціональныя значенія r можно расположить въ одинъ исчислимый рядъ $r_1, r_2, r_3, \ldots$

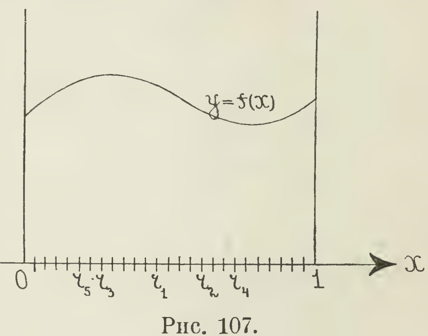


Рис. 107.

c) Поэтому функція $f(x)$ оказывается вполнѣ опредѣленной, если извѣстна исчислимая безконечная совокупность ея значеній $f(r_1)$, $f(r_2)$, $f(r_3), \ldots$. Впрочемъ, эти значенія нельзя, конечно, выбирать совершенно произвольно, если желаемъ получить непрерывную функцію. Но совокупность всѣхъ возможныхъ системъ значеній $f(r_1)$, $f(r_2), \ldots$ содержитъ, во всякомъ случаѣ, какъ часть, такую совокупность, которая имѣетъ одинаковую мощность съ совокупностью всѣхъ непрерывныхъ функцій.

d) Величины $f_1 = f(r_1)$, $f_2 = f(r_2), \ldots$ можно разсматривать, какъ координаты въ пространствѣ C_∞, такъ какъ онѣ вѣдь представляютъ исчислимую безконечную совокупность непрерывно измѣ-

няющихся величинъ. Слѣдовательно, согласно доказанной раньше теоремѣ, совокупность всевозможныхъ системъ значенiй функцiй имѣетъ мощность континуума.

e) Являясь частью этой совокупности, допускающей взаимнооднозначное сопряженiе съ континуумомъ, сама совокупность всѣхъ непрерывныхъ функцiй можетъ быть взаимно-однозначно сопряжена съ нѣкоторой совокупностью, составляющей часть континуума.

f) Далѣе, мы безъ труда можемъ убѣдиться въ томъ, что и, наоборотъ, весь континуумъ можно взаимно-однозначно отобразить въ нѣкоторой части совокупности непрерывныхъ функцiй. Для этого стоитъ только разсмотрѣть функцiи $f(x) = k = \text{const.}$, опредѣляемыя условiями $f_1 = f_2 = \cdots = k$, гдѣ k есть вещественный параметръ. Когда k пробѣгаетъ континуумъ C_1, $f(x) = k$ дѣйствительно пробѣгаетъ часть совокупности всѣхъ непрерывныхъ функцiй, отображенную взаимно-однозначнымъ образомъ въ C_1.

g) Теперь мы должны воспользоваться такъ называемой теоремой объ эквивалентности, которую почти одновременно доказали Ф. Бернштейнъ (F. Bernstein) и Э. Шрёдеръ (E. Schröder): если каждая изъ двухъ совокупностей эквивалентна нѣкоторой части другой совокупности, то эти двѣ совокупности эквивалентны между собой. Эта теорема представляется въ высокой степени очевидной; ея подробное доказательство завело бы насъ слишкомъ далеко.

h) Континуумъ C_1 и совокупность всѣхъ непрерывныхъ функцiй находятся между собой, согласно пунктамъ e) и f), какъ разъ въ томъ отношенiи, какое предполагаетъ теорема объ эквивалентности; слѣдовательно, они обладаютъ одинаковой мощностью, и, такимъ образомъ, наша теорема доказана.

Теперь перейдемъ къ интересному доказательству нашего второго утвержденiя, что совокупность всевозможныхъ, дѣйствительно „вполнѣ произвольныхъ“ функцiй обладаетъ большей мощностью, чѣмъ континуумъ; это доказательство представляетъ точное примѣненiе дiагональнаго метода Кантора.

a) Допустимъ, что наше *утвержденіе ложно*, т. е. что совокупность всѣхъ функцій можно взаимно-однозначнымъ образомъ отобразить въ континуумѣ C_1. Предположимъ, что при этомъ отображеніи *всякой точкѣ* $x=r$ въ C_1 *соотвѣтствуетъ нѣкоторая функція* $f(x, r)$ отъ x, такъ что, когда r пробѣгаетъ весь континуумъ, $f(x, r)$ изображаетъ послѣдовательно всевозможныя функціи отъ x. Мы приведемъ это допущеніе къ нелѣпости тѣмъ, что *построимъ функцію* $F(x)$, *отличную отъ всѣхъ функцій* $f(x, r)$.

b) Для этого образуемъ „*діагональную функцію*" схемы функцій $f(x, r)$, — другими словами, такую функцію, которая во всякой точкѣ $x=x_0$ принимаетъ такое же значеніе, какое въ этой же точкѣ $x=x_0$ принимаетъ функція $f(x, x_0)$, соотвѣтствующая значенію параметра $r=x_0$, т. е. значеніе $f(x_0, x_0)$. Какъ функція отъ x, это есть попросту *функція* $f(x, x)$.

c) Теперь построимъ такую *функцію* $F(x)$, *которая отличается во всякой точкѣ* x *отъ функціи* $f(x, x)$:

$F(x) \neq f(x, x)$ для всякаго отдѣльнаго значенія x.

Достигнуть этого можно самыми разнообразными способами, такъ какъ мы вѣдь допускаемъ совершенно разрывныя функціи, значеніе которыхъ въ каждой точкѣ можетъ быть опредѣлено самымъ произвольнымъ образомъ. *Примѣромъ* можетъ служить функція $F(x)=f(x, x)+1$.

d) *Эта функція* $F(x)$ *дѣйствительно отлична отъ каждой изъ функціи* $f(x, r)$. Въ самомъ дѣлѣ, если бы $F(x)=f(x, r_0)$ для какого-нибудь опредѣленнаго значенія параметра $r=r_0$, то это равенство значеній функцій должно было бы имѣть мѣсто, въ частности, и въ точкѣ $x=r_0$, и, слѣдовательно, было бы $F(r_0)=f(r_0, r_0)$. Но это противорѣчитъ допущенію c) относительно функціи $F(x)$.

Этимъ опровергается предположеніе a), будто функціями $f(x, r)$ можно исчерпать всю совокупность функцій; слѣдовательно, *наше утвержденіе доказано*.

Интересно сравнить это доказательство съ вполнѣ аналогичнымъ доказательствомъ неисчислимости континуума. Подобно тому, какъ тамъ мы допускали возможность расположенія всѣхъ десятичныхъ дробей въ одну исчислимую схему, такъ и здѣсь мы

разсматриваемъ схему функцій $f(x, r)$; тамъ мы выдѣляли діагональные элементы; здѣсь этому соотвѣтствуетъ построеніе діагональной функціи $f(x, x)$; то и другое находитъ затѣмъ одинаковое примѣненіе въ образованіи новой, не содержащейся въ схемѣ, десятичной дроби и, соотвѣтственно, новой функціи.

Вы легко можете себѣ представить, что при помощи подобныхъ разсужденій можно восходить къ безконечнымъ совокупностямъ все большей и большей мощности, высшей, чѣмъ тѣ три мощности, съ которыми мы познакомились до сихъ поръ. Но самымъ замѣчательнымъ изъ всѣхъ этихъ результатовъ представляется то, что между различными безконечными совокупностями существуютъ вообще такія различія и градаціи, которыя сохранялись, несмотря на то, что мы примѣняли къ нимъ самыя радикальныя средства, какія только можно себѣ представить; мы разрушали всѣ ихъ особенности, какъ, напримѣръ, ихъ расположеніе и тому подобное, и сохраняли только ихъ отдѣльные элементы, своего рода ихъ атомы, какъ вещи, существующія совершенно независимо другъ отъ друга и допускающія произвольную перетасовку между собой. Важно еще и то, что три изъ этихъ градацій мы смогли установить, оставаясь въ рамкахъ обычныхъ въ математикѣ вещей —цѣлыхъ чиселъ, континуумовъ (непрерывныхъ протяженій) и функцій.

Этимъ я закончу первую часть моего изложенія теоріи совокупностей, посвященную понятію о мощности. Въ такой же конкретной формѣ, но только еще болѣе кратко, я хочу сообщить вамъ теперь кое-что изъ второй части ученія о совокупностяхъ.

2. Расположеніе элементовъ совокупности.

Здѣсь на первый планъ выступаетъ какъ разъ то, что мы до сихъ поръ принципіально оставляли въ сторонѣ, а именно вопросъ о томъ, какъ отличаются между собой отдѣльныя совокупности одинаковой мощности по взаимнымъ отношеніямъ расположенія, натурально имъ принадлежащаго. Вѣдь тѣ взаимно-однозначныя отображенія самаго общаго вида, которыя мы до сихъ поръ допускали, разрушали всѣ эти

соотношенія, — вспомните хотя бы только объ отображеніи квадрата на отрѣзкѣ! Я бы хотѣлъ особенно подчеркнуть значеніе именно этого, второго отдѣла ученія о совокупностяхъ; вѣдь не можетъ же это ученіе имѣть своею цѣлью устранить, посредствомъ введенія новыхъ, болѣе общихъ понятій, тѣ различія, которыя съ давнихъ поръ вошли въ обиходъ математики; скорѣе, наоборотъ, это ученіе должно и можетъ служить тому, чтобы съ помощью общихъ понятій познать эти различія въ ихъ самой глубокой сущности.

Теперь наша цѣль заключается въ томъ, чтобы выяснить себѣ на опредѣленныхъ, общеизвѣстныхъ примѣрахъ понятія о различныхъ возможныхъ расположеніяхъ. Если начинать съ исчислимыхъ совокупностей, то мы знаемъ три совершенно разныя формы расположенія такихъ совокупностей, столь различныя между собой, что равенство ихъ мощностей составляло, какъ мы видѣли, особую и ни въ какомъ случаѣ не самоочевидную теорему; это слѣдующія совокупности:

1) совокупность натуральныхъ чиселъ;

2) совокупность всѣхъ (отрицательныхъ и положительныхъ) цѣлыхъ чиселъ;

3) совокупность всѣхъ раціональныхъ чиселъ и совокупность всѣхъ алгебраическихъ чиселъ.

Расположеніе элементовъ во всѣхъ этихъ трехъ совокупностяхъ имѣетъ одно общее свойство, въ силу котораго оно называется простымъ расположеніемъ совокупности. Это свойство состоитъ въ слѣдующемъ: изъ каждыхъ двухъ элементовъ одинъ опредѣленный элементъ всегда предшествуетъ другому, т. е., выражаясь алгебраически, всегда извѣстно, который элементъ меньше и который больше; и далѣе, если изъ трехъ элементовъ a, b, c элементъ a предшествуетъ элементу b, а элементъ b — элементу c, то всегда a предшествуетъ элементу c (если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$).

Но, съ другой стороны, имѣютъ мѣсто такія характерныя различія: въ первой совокупности существуетъ первый эле-

ментъ (нуль), который предшествуетъ всѣмъ остальнымъ, но нѣтъ послѣдняго элемента, который слѣдовалъ бы за всѣми другими; во второй совокупности нѣтъ ни перваго ни послѣдняго элемента. Но въ обѣихъ этихъ совокупностяхъ есть то общее, что за всякимъ элементомъ непосредственно слѣдуетъ опредѣленный ближайшій элементъ, и всякому элементу непосредственно предшествуетъ опредѣленный другой элементъ. Въ противоположность этому, у третьей совокупности между каждыми двумя элементами всегда лежитъ, какъ мы уже видѣли выше (стр. 46 и 47), безконечно много другихъ элементовъ; такое свойство совокупности мы обозначили терминомъ „сгущенная совокупность“, такъ что, въ частности, среди всѣхъ раціональныхъ или алгебраическихъ чиселъ, лежащихъ между a и b, если не считать самихъ этихъ чиселъ, нѣтъ ни наименьшаго ни наибольшаго числа. Такимъ образомъ, способы расположенія въ этихъ трехъ примѣрахъ, ихъ типы расположенія (Anordnungstypen) (терминъ Кантора „типы порядка“, Ordnungstypen, кажется мнѣ не столь характернымъ) всѣ между собою различны, хотя самыя совокупности имѣютъ одинаковыя мощности. Съ этимъ можно связать — и это дѣйствительно дѣлаютъ теоретики ученія о совокупностяхъ — вопросъ о всѣхъ вообще возможныхъ типахъ расположенія исчислимыхъ совокупностей.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію совокупностей съ мощностью континуума; здѣсь намъ извѣстна одна совокупность простого расположенія, а именно континуумъ C_1 всѣхъ вещественныхъ чиселъ. Но наряду съ нею въ двумѣрномъ и многомѣрныхъ типахъ C_2, $C_3, \ldots$ мы имѣемъ примѣры совокупностей, съ расположеніемъ элементовъ, отличнымъ отъ того, который мы назвали „простымъ“. Такъ, въ случаѣ совокупности C_2 для того, чтобы опредѣлить взаимное расположеніе двухъ точекъ, необходимы уже не одно, а два соотношенія.

Здѣсь наиболѣе важно проанализировать понятіе о непрерывности одномѣрнаго континуума; открытіе того обстоятельства, что это понятіе дѣйствительно основано только

лишь на простыхъ свойствахъ расположенія, свойственнаго совокупности C_1, является первой замѣчательной заслугой ученія о множествахъ въ дѣлѣ выясненія основныхъ математическихъ понятій. А именно, оказывается, что всѣ свойства непрерывности континуума проистекаютъ изъ того обстоятельства, что послѣдній представляетъ совокупность простого расположенія со слѣдующими двумя свойствами:

1) Если раздѣлить совокупность на какія-либо двѣ части A, B, но такимъ образомъ, чтобы всякій элементъ принадлежалъ какой-либо одной изъ этихъ частей, и чтобы всѣ элементы, входящіе въ группу A, предшествовали всѣмъ элементамъ группы B, то въ такомъ случаѣ либо A имѣетъ послѣдній элементъ, либо B имѣетъ первый элементъ. Вспоминая опредѣленіе ирраціональныхъ чиселъ Дедекинда*) (стр. 51 и сл.), мы можемъ выразить это свойство еще такъ: всякое „сѣченіе" въ нашей совокупности дѣйствительно производится однимъ изъ ея элементовъ.

2) Между любыми двумя элементами совокупности всегда лежитъ еще безконечно много другихъ элементовъ.

Этимъ вторымъ свойствомъ обладаютъ одинаково континуумъ и исчислимая совокупность всѣхъ раціональныхъ чиселъ; первое же свойство указываетъ на существенное различіе между этими совокупностями. Всякую совокупность простого расположенія, обладающую обоими этими свойствами, въ ученіи о совокупностяхъ называютъ непрерывной, по той причинѣ, что для нея дѣйствительно можно доказать всѣ теоремы, которыя имѣютъ мѣсто для континуума въ силу его непрерывности.

Я хочу еще указать на то, что эти свойства непрерывности можно формулировать также нѣсколько иначе, а именно — исходя изъ т. н. „основныхъ" рядовъ Кантора. Основнымъ рядомъ называютъ исчислимый рядъ простого расположенія, состо-

---

*) См. Р. Дедекиндъ, „Непрерывность и ирраціональныя числа". Одесса, Mathesis, 1910. Изъ серіи „Библіотека классиковъ точнаго знанія".

ящій изъ такихъ элементовъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ данной совокупности, что въ самой совокупности каждый изъ нихъ либо всегда предшествуетъ элементу, слѣдующему за нимъ въ основномъ ряду, либо всегда слѣдуетъ за нимъ; такъ что

$$\text{либо } a_1 < a_2 < a_3 < \ldots, \text{ либо } a_1 > a_2 > a_3 \ldots.$$

Нѣкоторый элементъ a совокупности называютъ предѣльнымъ элементомъ основного ряда, если—въ первомъ случаѣ—въ основномъ ряду всегда найдутся элементы, бóльшіе всякаго элемента, лежащаго въ данной совокупности до a, но вовсе нѣтъ элементовъ, бóльшихъ хотя бы одного элемента, расположеннаго послѣ a; аналогично опредѣляютъ предѣльный элементъ во второмъ случаѣ. Если совокупность обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что всякому входящему въ ея составъ основному ряду соотвѣтствуетъ въ ней свой предѣльный элементъ, то совокупность называютъ замкнутой (abgeschlossen); если же, наоборотъ, всякій элементъ совокупности является предѣльнымъ элементомъ нѣкотораго основного ряда, выдѣленнаго изъ нея, то совокупность называютъ сгущенной. Непрерывность совокупностей съ мощностью континуума состоитъ, существеннымъ образомъ, въ соединеніи обоихъ этихъ свойствъ.

Попутно я хочу здѣсь напомнить, что при бесѣдѣ о дифференціальномъ и интегральномъ исчисленіяхъ мы говорили еще и о другомъ континуумѣ—о континуумѣ Веронезе (Veronese), который возникаетъ изъ обыкновеннаго континуума посредствомъ присоединенія актуально безконечно-малыхъ величинъ. Хотя такимъ путемъ получается тоже совокупность простого расположенія въ томъ смыслѣ, что вопросъ о послѣдовательности всякихъ двухъ элементовъ разрѣшается опредѣленно, но тѣмъ не менѣе этотъ континуумъ обладаетъ, конечно, совершенно инымъ типомъ расположенія, чѣмъ обычный континуумъ C_1; теорема о томъ, что всякій основной рядъ имѣетъ предѣльный элементъ, здѣсь уже не имѣетъ мѣста.

Теперь мы приходимъ къ важному вопросу о томъ, при какихъ отображеніяхъ сохраняется различіе между континуумами различнаго числа измѣреній $C_1, C_2, \ldots$. Дѣло въ томъ, что взаимно-однозначное отображеніе са-

маго общаго вида, какъ намъ уже извѣстно, уничтожаетъ между ними всякое различіе. Отвѣтъ даетъ слѣдующая важная теорема: число измѣреній континуума инваріантно по отношенію ко всѣмъ взаимно-однозначнымъ и непрерывнымъ отображеніямъ; другими словами, невозможно отобразить одинъ въ другомъ взаимно-однозначно и непрерывно два континуума C_m и C_n, если $m \neq n$. Быть можетъ, вы склонны принять эту теорему безъ дальнихъ разговоровъ, какъ самоочевидную; но вы не должны забывать того, что наивное представленіе, повидимому, исключало также возможность взаимно-однозначнаго сопряженія C_1 и C_2 вообще, и это побуждаетъ насъ быть осмотрительными по отношенію къ тому, что намъ представляется очевиднымъ.

Я хочу здѣсь подробнѣе разобрать только простѣйшій случай, въ которомъ рѣчь идетъ о сопряженіи одномѣрнаго континуума съ двумѣрнымъ, и затѣмъ укажу лишь вкратцѣ, какія трудности стоятъ на пути распространенія этого доказательства на наиболѣе общій случай. Итакъ, мы хотимъ доказать, что взаимно-однозначное и непрерывное сопряженіе между континуумами C_1 и C_2 невозможно. Здѣсь всякое слово

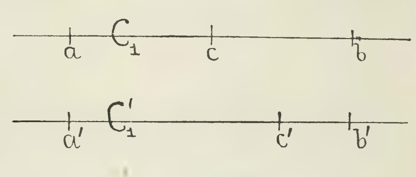


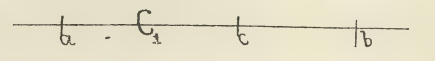
Рис. 108.

имѣетъ существенное значеніе: мы уже знаемъ, что здѣсь нельзя опустить требованія непрерывности; съ другой стороны, примѣръ извѣстной, конечно, многимъ изъ васъ „кривой Пеано“ показываетъ, что и взаимная однозначность не можетъ быть опущена.

Прежде всего установимъ лемму: если два одномѣрныхъ континуума C_1 и C_1' непрерывнымъ образомъ отображены одинъ въ другомъ и притомъ именно такъ, что всякому элементу изъ C_1' всегда соотвѣтствуетъ одинъ и только одинъ элементъ изъ C_1, а всякому элементу изъ C_1 отвѣчаетъ, самое большее, одинъ элементъ изъ C_1', если, далѣе, a и b суть два элемента изъ C_1, которымъ дѣйствительно соотвѣтствуютъ въ C_1' два эле-

мента a' и b', то всякому элементу c изъ C_1, который лежитъ между a и b, дѣйствительно отвѣчаетъ въ C_1' нѣкоторый элементъ c', лежащій между a' и b' (рис. 108). Эта лемма соотвѣтствуетъ извѣстной теоремѣ, согласно которой непрерывная функція $f(x)$, которая принимаетъ въ точкахъ $x=a', b'$ значенія a и b, принимаетъ также всякое значеніе c, лежащее между a и b, въ нѣкоторой точкѣ c', заключенной между a' и b'. Дѣйствительно, нашу лемму можно доказать, какъ точное обобщеніе этой теоремы, исключительно на основаніи опредѣленнаго выше понятія о непрерывности, если только самую непрерывность отображенія непрерывныхъ совокупностей опредѣлить вполнѣ аналогично извѣстному опредѣленію непрерывности функціи; это удается сдѣлать на основаніи одного только понятія о расположеніи. Но здѣсь не мѣсто подробнѣе развивать эти указанія.

Теперь перейдемъ къ нашему доказательству. Предположимъ, что одномѣрный отрѣзокъ C_1 и квадратъ C_2 сопряжены между собой взаимно-однозначно и непрерывно (рис. 109). Пусть при этомъ двумъ элементамъ a, b отрѣзка C_1 отвѣчаютъ элементы A, B квадрата C_2. Эти элементы A, B мы можемъ соединить внутри совокупности C_2 двумя различными путями,—напримѣръ, указанными на рисункѣ ломаными C_1', $\overline{C_1}'$. При этомъ намъ не нужно предполагать никакихъ особыхъ свойствъ совокупности C_2 въ родѣ опредѣленія координатами и т. п.; мы должны лишь воспользоваться понятіемъ о двумѣрной совокупности C_2. Но тогда, конечно, какъ C_1', такъ и $\overline{C_1}'$ представляютъ континуумы простого расположенія одного измѣренія, подобные C_1; въ силу же предположеннаго взаимно-однозначнаго и непрерывнаго сопряженія комплексовъ C_1 и C_2 всякому элементу C_1' или $\overline{C_1}'$ должна отвѣчать ровно одна точка на C_1, а всякому элементу на C_1 долженъ отвѣчать, самое большее, одинъ



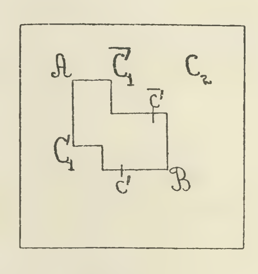


Рис. 114.

элементъ на C_1' или на $\overline{C_1}'$. Такимъ образомъ, какъ разъ выполнены предположенія нашей леммы: слѣдовательно, всякой точкѣ c на C_1, лежащей между a и b, должна отвѣчать какъ точка c' на C_1', такъ и точка $\overline{c}'$ на $\overline{C_1}'$, — но это противорѣчитъ предположенной взаимной однозначности отображенія, имѣющаго мѣсто между C_1 и C_2. Такимъ образомъ, мы видимъ, что такое отображеніе невозможно, такъ что доказательство исчерпано.

Чтобы распространить это доказательство на 2 любыхъ континуума C_m, C_n, надо предварительно знать, каковы могутъ быть различные континуумы 1, 2, 3, ..., $m-1$ измѣреній самаго общаго вида, содержащіеся въ C_m; если m и $n \geqq 2$, то оказывается, что одного только понятія „между“, какъ только-что въ простѣйшемъ случаѣ, недостаточно для того, чтобы провести доказательство. Эти случаи приводятъ къ крайне сложнымъ изслѣдованіямъ, которыя уже съ самаго начала обнимаютъ собой очень трудные вопросы, лишь въ послѣднее время нѣсколько выясненные и имѣющіе основное значеніе въ геометріи, а именно вопросы о наиболѣе общихъ непрерывныхъ одномѣрныхъ совокупностяхъ точекъ въ плоскости, — въ особенности, вопросъ о томъ, когда именно такую совокупность можно назвать кривой линіей.

Этимъ я закончу изложеніе ученія о совокупностяхъ и прибавлю еще лишь нѣсколько замѣчаній общаго характера. Прежде всего нѣсколько словъ о тѣхъ общихъ идеяхъ, которыя выработалъ Канторъ по вопросу о положеніи, занимаемомъ ученіемъ о совокупностяхъ по отношенію къ геометріи и анализу; эти идеи выставляютъ въ особенномъ свѣтѣ значеніе ученія о совокупностяхъ. Черезъ всю исторію математики, такъ же, какъ и черезъ всѣ философскія разсужденія о ея природѣ, проходитъ, какъ извѣстно, красной нитью различіе между дискретной величиной ариѳметики и непрерывной величиной геометріи. Въ новѣйшее время особенно стали выдвигать на первый планъ дискретную величину, какъ наиболѣе легкую для пониманія; на цѣлыя натуральныя числа стали смотрѣть, какъ на данныя простѣйшія понятія, выводя изъ нихъ по извѣстному способу раціональныя и ирраціональныя

числа; такимъ образомъ, въ концѣ концовъ, былъ полученъ весь аппаратъ, необходимый для господства анализа въ геометріи, т. е. аналитическая геометрія. Эту тенденцію современнаго развитія метематики можно назвать ариѳметизаціей геометріи: геометрическая идея непрерывности оказывается сведенной къ идеѣ цѣлыхъ чиселъ. Этого же направленія мы придерживались, въ главномъ, и въ настоящихъ лекціяхъ.

И вотъ, въ противовѣсъ этому одностороннему предпочтенію цѣлыхъ чиселъ, Канторъ желаетъ, — какъ онъ самъ мнѣ говорилъ на Съѣздѣ Естествоиспытателей въ Касселѣ, — достигнуть „истиннаго слiянiя ариѳметики и геометріи" въ ученіи о совокупностяхъ,—другими словами, онъ желаетъ представить ученіе о цѣлыхъ числахъ, съ одной стороны, и теорію различныхъ образовъ, непрерывно составленныхъ изъ точекъ, съ другой стороны, а также еще многое другое, какъ равноправныя и объединенныя главы общаго ученія о совокупностяхъ.

Я хотѣлъ бы еще присоединить сюда же кое-какія общія замѣчанія объ отношеніи ученія о совокупностяхъ къ геометріи. Въ ученіи о совокупностяхъ мы разсматривали:

1) Мощность совокупностей, какъ нѣчто такое, что сохраняется при всѣхъ взаимно-однозначныхъ отображеніяхъ.

2) Типы расположенія совокупностей, соотвѣтствующіе различнымъ комбинаціямъ элементовъ въ отношеніи ихъ порядка. Здѣсь мы имѣли возможность охарактеризовать понятіе о непрерывности, различныя многократныя расположенія, или континуумы различнаго числа измѣреній и т. п.; такимъ образомъ, въ конечномъ счетѣ сюда принадлежатъ, вообще, инваріанты непрерывныхъ отображеній. При перенесеніи въ геометрію это образуетъ дисциплину, обозначенную со времени Римана терминомъ Analysis situs (Анализъ положенія); это — наиболѣе абстрактная глава геометріи; она изслѣдуетъ только тѣ свойства геометрическихъ образовъ, которыя сохраняются при самыхъ общихъ непрерывныхъ взаимно-однозначныхъ отображеніяхъ. Впрочемъ, уже Риманъ употреблялъ слово „Mannigfaltigkeit" (многообразіе) въ весьма общемъ смыслѣ. Этимъ же самымъ словомъ пользовался вначалѣ и Канторъ, и лишь позднѣе онъ замѣнилъ его болѣе

краткимъ и потому болѣе удобнымъ терминомъ „Menge" (множество, совокупность), который къ тому же имѣетъ одинаковый съ первымъ словесный корень. Въ настоящее время употребленіе слова „Menge" настолько укоренилось, что считается совершенно отсталымъ всякій, кто еще говоритъ „Mannigfaltigkeit" *).

3) Переходя къ конкретной геометріи, мы встрѣчаемся съ различіемъ между метрической и проективной геометріей. Здѣсь мало знать, что, напримѣръ, прямая имѣетъ одно измѣреніе, а плоскость — два измѣренія; здѣсь нужно строить или сравнивать фигуры, при чемъ желательно имѣть въ своемъ распоряженіи постоянный масштабъ или, по крайней мѣрѣ, умѣть прокладывать прямыя въ плоскости и плоскости въ пространствѣ. Конечно, для каждой изъ этихъ конкретныхъ областей необходимо къ общимъ свойствамъ асположенія присоединить спеціальную аксіоматику. Это означаетъ, слѣдовательно, дальнѣйшее развитіе ученія о непрерывныхъ совокупностяхъ въ простомъ, двойномъ и вообще кратномъ расположеніи.

Въ мою задачу не можетъ входить болѣе подробное разсмотрѣніе этихъ вещей, о которыхъ мнѣ къ тому же придется подробно говорить въ своихъ лекціяхъ по геометріи въ ближайшемъ семестрѣ. Я бы хотѣлъ только указать литературу, въ которой вы можете получить нѣкоторыя свѣдѣнія. Здѣсь прежде всего приходится назвать соотвѣтствующіе рефераты „Математической Энциклопедіи": „Основанія геометріи" Энрикеса **) и „Понятія «линія» и «поверхность» Мангольдта" ***) по спеціальной аксіоматикѣ, а также „Analysis situs" Дена-Гегарда (Dehn-Heegaard) (III. A. B. 3). Послѣдняя статья написана очень абстрактно; она начинается съ весьма общихъ, установленныхъ самимъ Деномъ формулировокъ понятій и основныхъ фактовъ Analisis situs, изъ которыхъ за-

---

*) Въ русской литературѣ, напротивъ, мы встрѣчаемъ весьма разнообразные термины для выраженія того же понятія: многообразіе, множество, комплексъ, ансамбль, совокупность и т. п.

**) Enriques, „Principien der Geometrie". Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, III, A, B. 1.

***) Mangoldt, „Die Begriffe «Linie» und «Fläche»". Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, III, A, B, 2.

тѣмъ все прочее вытекаетъ посредствомъ чисто логической дедукціи. Это представляетъ полную противоположность съ тѣмъ индуктивнымъ методомъ изложенія, который я всегда рекомендую. Эта статья предполагаетъ, собственно говоря, для полнаго пониманія весьма подготовленнаго читателя, который уже продумалъ всю эту область, пожалуй, столь же основательно, какъ и самъ авторъ.

Что касается литературы, посвященной ученію о совокупностяхъ, то я прежде всего долженъ указать на докладъ, представленный Германскому Союзу математиковъ Шёнфлисомъ (A. Schönflies): „Развитіе ученія о точечныхъ многообразіяхъ“ *); первая часть этого сообщенія появилась въ VIII томѣ журнала „Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, а вторая появилась лишь недавно — въ видѣ второго дополнительнаго тома къ „Jahresberichte“. Эта книга дѣйствительно представляетъ рефератъ по всей теоріи совокупностей, въ которомъ вы найдете отвѣтъ на весьма многіе спеціальные вопросы. Наряду съ этимъ я долженъ назвать первый и единственный систематическій учебникъ по теоріи совокупностей, это — „Теорія совокупностей точекъ“ Юнга и его супруги **).

Въ заключеніе этихъ замѣчаній о теоріи совокупностей мы должны снова поставить тотъ же самый вопросъ, который сопровождалъ всѣ наши лекціи: чѣмъ изъ всего этого можно воспользоваться въ школѣ? Здѣсь этотъ вопросъ можно, пожалуй, счесть за совершенно излишній, такъ какъ вѣдь всякій долженъ согласиться съ тѣмъ, что къ ученику нельзя подходить съ такими абстрактными и трудными вещами. Однако, не всѣ держатся такого мнѣнія; могу подтвердить это однимъ примѣромъ. Вскорѣ послѣ того, какъ Канторъ выступилъ со своей теоріей, его другъ Фридрихъ Майеръ (F. Mayer), тоже выдающійся математикъ, написалъ свои „Начала ариѳметики и алгебры“ ***); въ этомъ сочиненіи онъ имѣлъ въ виду изло-

*) „Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten“, 2 Teile, Leipzig 1900 и 1908.

**) W. H. Joung and G. Ch. Joung: „The theory of sets of points“. Cambridge 1906.

***) Friedrich Meyer: „Elemente der Arithmetik und Algebra“, 2 Aufl. Halle 1885.

жить въ систематическомъ видѣ всю ариѳметику алгебры, т. е. учебный матеріалъ, которымъ пользуется школа. На первый планъ онъ поставилъ ученіе о совокупностяхъ и все остальное построилъ на немъ: съ первой страницы онъ уже говоритъ объ общей идеѣ мощности совокупности, на 6-ой страницѣ онъ вводитъ символъ ω для обозначенія мощности исчислимой безконечной совокупности (1, 2, 3, ...), а на 21-ой страницѣ авторъ доходитъ въ своей дедукціи до такъ называемой малой таблицы умноженія! Въ дальнѣйшемъ изложеніи книга даетъ огромное количество матеріала, но его выборъ и группировка какъ разъ противоположны тѣмъ предложеніямъ, которыя выдвигаютъ приверженцы реформы. Исчисленія безконечно-малыхъ нѣтъ, конечно, и слѣда; но ни наглядныя пространственныя представленія ни „генетическіе" методы, вообще, не занимаютъ принадлежащаго имъ по праву положенія. Само предисловіе содержитъ характерное выраженіе, что анализъ и алгебра не нуждаются болѣе въ „геометрическихъ костыляхъ" послѣ того, какъ ученіе о совокупностяхъ сдѣлало возможнымъ чисто логическое обоснованіе континуума.

Мы не можемъ, конечно, съ нашей точки зрѣнія на методику математики одобрить преподаваніе, которое держится такихъ отвлеченныхъ и чисто дедуктивныхъ формъ изложенія, какія предлагаетъ эта книга *). Быть можетъ, иной юноша, особенно одаренный математическими и логическими способностями, можетъ благодаря этому получить импульсъ къ дальнѣйшимъ занятіямъ; но существенная цѣль нашего школьнаго преподаванія состоитъ не только въ томъ, чтобы культивировать такіе особенно выдающіеся таланты, но и въ томъ, чтобы существенно содѣйствовать развитію среднихъ учениковъ, и въ этомъ отношеніи, на мой взглядъ, невозможно найти болѣе нецѣлесообразное средство, чѣмъ такой абстрактный, систематическій методъ.

Я хотѣлъ бы точнѣе выразить мое отношеніе къ этому вопросу, а именно сослаться на тотъ біогенетическій основной законъ, по которому индивидъ въ своемъ развитіи пробѣгаетъ въ сокращенномъ видѣ всѣ стадіи развитія вида; эти

*) Ср. „Дополненія ко второму изданію".

идеи стали въ настоящее время общимъ достоянiемъ образованнаго человѣка. Этому основному закону, я полагаю, должно было бы слѣдовать—по крайней мѣрѣ, въ общихъ чертахъ—и преподаванiе математики, какъ и вообще всякое преподаванiе. Мы должны приспособляться къ природнымъ склонностямъ юношей, медленно вести ихъ къ высшимъ вопросамъ и лишь въ заключенiе ознакомить ихъ съ абстрактными идеями; преподаванiе должно идти по тому же самому пути, по которому все человѣчество, начиная со своего наивнаго первобытнаго состоянiя, дошло до вершинъ современнаго знанiя! Необходимо всегда повторять это требованiе, такъ какъ всегда находятся люди, которые по примѣру средневѣковыхъ схоластиковъ начинаютъ свое преподаванiе съ самыхъ общихъ идей и защищаютъ этотъ методъ, какъ якобы единственный научный. А между тѣмъ и это основанiе неправильно: научно обучать—значитъ научать человѣка научно думать, а не оглушать его съ самаго начала холодной, научно наряженной систематикой. Существенное препятствiе къ распространенiю такого естественнаго и поистинѣ научнаго метода обученiя представляетъ, несомнѣнно, недостатокъ въ знакомствѣ съ исторiей математики. Чтобы съ этимъ бороться, я особенно охотно вплеталъ въ мое изложенiе многочисленные историческiе моменты. Пусть это покажетъ вамъ, какъ медленно возникали всѣ математическiя идеи, какъ онѣ почти всегда всплывали сперва, скорѣе, въ видѣ догадки и лишь послѣ долгаго развитiя прiобрѣтали неподвижную, выкристаллизованную форму систематическаго изложенiя. Пусть это знанiе—этимъ пожеланiемъ я хотѣлъ бы закончить мои лекцiи—окажетъ продолжительное влiянiе на характеръ вашего собственнаго преподаванiя въ школѣ!

ДОПОЛНЕНІЯ

КО ВТОРОМУ ИЗДАНІЮ.

I. Новыя коммиссіи для изученія вопросовъ преподаванія.

(Къ стр. 2-ой)

Интересъ къ различнаго рода вопросамъ преподаванія продолжалъ возрастать въ широкихъ кругахъ и въ послѣдніе годы. Это подтверждается особенно тѣмъ, что теперь цѣлый рядъ большихъ союзовъ и спеціально назначенныхъ коммиссій изучаютъ на самыхъ широкихъ основахъ современную постановку и проблемы преподаванія. Желая дать самый бѣглый обзоръ этихъ организацій, я прежде всего долженъ назвать „Германскую Коммиссію по вопросамъ преподаванія математики и естественныхъ наукъ" („Deutscher Ausschuss für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht"); вмѣсто этого длиннаго названія мы образовали изъ его начальныхъ буквъ названіе „DAMNU"; эту коммиссію избрало „Общество германскихъ естествоиспытателей и врачей" совмѣстно со многими другими союзами, заинтересованными въ различныхъ сторонахъ преподаванія указанныхъ предметовъ, съ тѣмъ, чтобы продолжить разработку плановъ реформы, намѣченныхъ прежними „коммиссіями по вопросамъ преподаванія" этихъ же обществъ, и содѣйствовать ихъ проведенію въ жизнь.*) Наряду съ нею работаетъ „Германская Коммиссія по вопросу о техническихъ школахъ" („Deutscher Ausschuss für technisches Schulwesen" или „DATSCH"), спеціально назначенная для разработки вопросовъ техническаго образованія „Обществомъ германскихъ инженеровъ"**).

---

*) Ср. „Schriften des Deutschen Ausschusses für der mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht" (Leipzig, Teubner, 1908 ff.); до сихъ поръ вышли въ свѣтъ 6 тетрадей.

**) Ср. „Abhandlungen und Berichte über technisches Schulwesen", veranl. u. herausgeg. vom „Deutschen Ausschusse für technisches Schulwesen".—Пока появился I томъ (Leipzig, Teubner, 1910).

Особенный интересъ для насъ, какъ математиковъ, представляетъ затѣмъ еще одна коммиссія, имѣющая интернаціональный характеръ; это —„Международная Коммиссія по вопросамъ преподаванія математики“ („Internationale mathematische Unterrichtskommission“, или, сокращенно, „IMUK“), избранная на Международномъ Математическомъ Конгрессѣ въ Римѣ (1908) по предложенію американца Смита (D. E. Smith). Эта Коммиссія должна представить ближайшему математическому конгрессу (имѣющему состояться въ 1912 г. въ Кэмбриджѣ) отчетъ о положеніи преподаванія математики во всѣхъ культурныхъ странахъ; съ этой цѣлью она предприняла во всѣхъ относящихся сюда странахъ обработку всѣхъ вопросовъ, принадлежащихъ къ области преподаванія математики. Оффиціальныя сообщенія этой Коммиссіи, которая состоитъ изъ делегатовъ всѣхъ культурныхъ государствъ, помѣщаются въ женевскомъ журналѣ „L'Enseignement Mathématique“; съ другой стороны, подкоммиссіи, образованныя для отдѣльныхъ странъ изъ делегатовъ и „Національнаго Совѣщанія“, публикуютъ самостоятельно результаты своихъ работъ *).

Я хотѣлъ бы въ особенности обратить ваше вниманіе на работы нашей германской подкоммиссіи, которая, съ одной стороны, непрерывно публикуетъ въ журналѣ „Zeitschrift für mathematische u. naturwissenschaftliche Unterricht“ краткіе „Отчеты и сообщенія“ („Berichte und Mitteilungen, veranlasst durch die I. M. U. K.“ **), а съ другой стороны — помѣщаетъ также болѣе подробные отчеты въ изданіи „Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlasst durch die IMUK ***)“. Въ этомъ изданіи въ многочисленныхъ отдѣльныхъ выпускахъ, цѣлый рядъ которыхъ уже вышелъ въ свѣтъ, содержится монографическое всестороннее изслѣдованіе современнаго положенія преподаванія математики. Выпуски сгруппированы по ихъ содержанію въ томы, которые должны обнять слѣдующія области:

Томъ I трактуетъ объ организаціи, учебномъ матеріалѣ и методахъ преподаванія въ среднихъ школахъ (Höhere Schu-

*) Подробныя свѣдѣнія о дѣятельности Коммиссіи можно найти въ „Вѣстникѣ Опытной Физики“, №№ 475 — 476, 481, 485 — 486, 487, 488, 498, 502, 505, 514, 524, 525, 545.

**) Также въ отдѣльномъ изданіи (Leipzig, Teubner), выходящемъ, начиная съ 1909 года.

***) Издается Ф. Клейномъ (Leipzig, Teubner), начиная съ 1909 г.

len) Сѣверной Германіи, а также о постановкѣ государственныхъ экзаменовъ и практической подготовкѣ ихъ преподавательскаго персонала.

Томъ II разбираетъ тѣ же вопросы для средней и южной Германіи.

Томъ III содержитъ отчеты общаго характера относительно преподаванія математики въ среднихъ школахъ: развитіе движенія въ пользу реформы преподаванія, имѣвшее мѣсто до настоящаго времени; положеніе математики въ преподаваніи другихъ областей (физики, черченія и т. д.); изученіе математики въ университетахъ и т. д.

Томъ IV содержитъ отчеты о преподаваніи математики въ различнаго рода техническихъ среднихъ и высшихъ школахъ (Mittel- und Hochschulen).

Томъ V будетъ посвященъ вопросу о положеніи математики въ народныхъ школахъ.

Эти работы, основанныя на тщательномъ спеціальномъ изученіи дѣла, въ высшей степени пригодны для того, чтобы во многихъ отношеніяхъ дополнить и углубить тѣ общія указанія на современное положеніе преподаванія, которыя содержатся въ моихъ лекціяхъ. Прежде всего я хотѣлъ бы указать въ этомъ отношеніи на два первыхъ выпуска I-го тома; онѣ написаны Лицманомъ (W. Lietzmann) и касаются, главнымъ образомъ, положенія дѣлъ въ Пруссіи; вотъ ихъ заглавія: „Матеріалъ и методъ преподаванія математики въ сѣверо-германскихъ среднихъ школахъ; составлено на основаніи существующей учебной литературы“*) и „Организація преподаванія математики въ мужскихъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ въ Пруссіи“**). Въ нихъ содержится, съ одной стороны, цѣнный обзоръ учебной литературы, а съ другой—отчетъ, составленный

*) „Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbüchern“, Leipzig 1909.

**) „Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preussen“. Leipzig 1910.

на основаніи программъ и посѣщенія многочисленныхъ учебныхъ заведеній, о томъ, какую форму въ настоящее время въ дѣйствительности принимаетъ преподаваніе математики.

Что же касается работъ подкоммиссій въ другихъ странахъ, то достаточно будетъ указать на тѣ отчеты, которые недавно были доложены на первомъ международномъ совѣщаніи въ Брюсселѣ (9 и 10 авг. 1911 г.), созванномъ Международной Коммиссіей; они сведены воедино въ третьемъ циркулярѣ Главной Коммиссіи ея Главнымъ Секретаремъ Феромъ (H. Fehr, „Enseignement mathématique“, 12 (1910), стр. 353 и сл.).

---

2. Новѣйшая литература по преподаванію математики.

(Къ стр. 7-ой)

Къ упомянутымъ въ текстѣ книгамъ со времени перваго изданія настоящихъ лекцій присоединилось, подъ вліяніемъ всеобщаго интереса къ реформѣ преподаванія математики, большое число новыхъ сочиненій; изъ нихъ я упомяну лишь для примѣра о нѣкоторыхъ. На первомъ мѣстѣ здѣсь стоитъ новая „Дидактика преподаванія математики“ *) Гёфлера (профессора въ Вѣнѣ), главнаго представителя реформы преподаванія въ Австріи; въ этой книгѣ даны подробныя указанія относительно постановки преподаванія въ согласіи съ нашей Меранской программой.

Наряду съ этимъ слѣдуетъ назвать нѣсколько руководствъ, которыя имѣютъ своею цѣлью представить учителю въ научной обработкѣ учебный матеріалъ школы. Сюда относится въ первую очередь „Руководство по элементарной математикѣ для учителей“ Шверинга**), стоящее въ тѣсномъ отношеніи къ школьному преподаванію, затѣмъ „Руководство по преподаванію математики“ Киллинга и Говстэда ***); пока вышелъ въ свѣтъ только первый томъ этого сочиненія, посвященный геометріи; наконецъ, — болѣе обширный

---

*) A. Höfler, „Didaktik des mathematischen Unterrichts“, Leipzig 1910.

**) K. Schwering. „Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer“, Leipzig 1907.

***) W. Killing und H. Hovestadt. „Handbuch des mathematischen Unterrichts“, Bd. I, Leipzig 1910.

трудъ Нетто, Фербера, Мейера и Тиме подъ заглавіемъ „Основныя ученія математики для студентовъ и учителей“ *). Это сочиненіе будетъ состоять изъ 4 томовъ, изъ которыхъ пока появились два: „Элементы геометріи“ Тиме **) и „Ариѳметика“ Фербера ***); въ немъ будетъ изложенъ на широкихъ основахъ весь матеріалъ школьнаго преподаванія въ строго-научной и пригодной для школьнаго преподаванія формѣ. Я охотно назову еще переводы двухъ французскихъ сочиненій, — тѣмъ болѣе, что французы опередили насъ на нѣсколько лѣтъ въ дѣлѣ проведенія современныхъ идей въ преподаваніи математики. Я имѣю въ виду, во-первыхъ, элементарные учебники Бореля (Borel), которые по-нѣмецки переработаны Штекkelемъ (P. Stäckel) подъ названіемъ „Elemente der Mathematik“ въ двухъ томахъ****); во-вторыхъ, — „Элементы математики“ Жюля Таннери *****). Въ то время, какъ первые учебники излагаютъ въ очень интересной и современной формѣ учебный матеріалъ для низшихъ классовъ, „Элементы“ Таннери имѣютъ цѣлью сдѣлать основные методы и идеи „высшей математики“ доступными для всякаго, кто знакомъ съ обычной „элементарной математикой“.

3. Къ великой теоремѣ Ферма.

(Къ стр. 75-ой)

Попытки доказать великую теорему Ферма или, вѣрнѣе, получить премію Вольфскеля (Wolfskehl), о которой опубликовало Гёттингенское Научное Общество въ іюнѣ 1908 года ******), продол-

*) E. Netto, C. Färber, W. F. Meyer und H. Tieme, „Grundlehren der Mathematik für Studierende und Lehrer“.

**) H. Tieme, „Elemente der Geometrie“, Bd. I des zweiten Teiles, Leipzig 1909.

***) C. Färber, „Arithmetik“, Bd. II. des ersten Teiles, Leipzig 1911.

****) I. „Arithmetik und Algebra“ (Leipzig 1908); II. „Geometrie“ (1909). Имѣется русскій переводъ подъ редакціей прив.-доцента В. Ф. Кагана: Борель-Штеккель, „Элементарная Математика“. Часть I—„Ариѳметика и Алгебра“. Часть II—„Геометрія“. Одесса „Mathesis“.

*****) Jules Tannery, „Elemente der Mathematik“, deutsch von P. Klaess, Leipzig 1909.

******) Подробныя условія относительно полученія преміи опубликованы въ „Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen“,

жаются со стороны математиковъ-неучей столь же неустанно, сколь и безуспѣшно; ко всѣмъ этимъ работамъ, которыя кучами появляются также на книжномъ рынкѣ, приложимо сказанное въ текстѣ, такъ что онѣ поистинѣ не имѣютъ рѣшительно никакого значенія для рѣшенія проблемы. О тѣхъ абсурдахъ, которые вызваны этимъ на свѣтъ Божій, можно судить по критическимъ обзорамъ такихъ „доказательствъ", которые регулярно и въ большомъ числѣ печатаетъ теперь журналъ „Archiv für Mathematik und Physik". Любопытно наблюдать это массовое закланіе, какъ ни печальна, собственно говоря, его необходимость.

Но и серьезная математическая работа получила, благодаря всему этому, новый толчекъ къ тому, чтобы заняться теоремой Ферма; дѣйствительно, здѣсь можно уже отмѣтить нѣкоторые успѣхи, хотя самое рѣшеніе проблемы все еще остается очень далекимъ. Такъ, Виферихъ*) нашелъ очень простой признакъ (критерій), состоящій въ томъ, что уравненіе Ферма $x^p + y^p = z^p$ при нечетномъ простомъ показателѣ p только въ томъ случаѣ можетъ быть разрѣшимо въ простыхъ относительно p цѣлыхъ числахъ, если $2^p - 1$ дѣлится на p^2. Болѣе краткія доказательства и обобщенія этой теоремы дали Фробеніусъ**) и Д. Мирimановъ***). Съ другой стороны, слѣдуетъ еще назвать замѣтки Ф. Бернштейна****), Гекке*****) и Фуртвенглера******), которые исходятъ изъ теоріи алгебраическихъ числовыхъ корпусовъ.

Geschäftliche Mitteilungen", 1908, p. 103 и сл., а также перепечатаны во многихъ математическихъ журналахъ (напримѣръ, въ „Mathematische Annalen", 66, S. 143 и въ „Journal für Mathematik", 134, S. 313; на русскомъ языкѣ — въ „Вѣстникѣ Опытной Физики", № 475 — 476.

*) A. Wieferich, „Journal für Mathematik", 136 (1909), S. 293.

**) G. Frobenius, „Sitzungsberichte der Kaiserlichen Preussischen Akademie", Berlin, 2 Dez. 1909 und 24 Febr. 1910, а также „Journal für Mathematik", 137 (1910), S. 314.

***) D. Mirimanoff, „L'Enseignement Mathématik", 15 Nov. 1909. „Comptes Rendus de l'Academie des Sciences", Paris, 24 Jan. 1910; Journal. für Mathematik", 139 (1911), S. 309.

****) F. Bernstein, „Nachrichten der Kaiserlichen Gesellschaft der Wissenschaften", Göttingen, math.-phys. Kl., 1910, S. 482 und S. 507.

*****) E. Hecke. тамъ же, 1910, S. 240.

******) Ph. Furtwängler, тамъ же, 1910, S. 554.

4. Къ доказательству невозможности построенія правильнаго семиугольника.

(Къ стр. 79).

Болѣе простое изложеніе этого доказательства дали, въ соотвѣтствіи съ первымъ изданіемъ, П. Монтель (P. Montel) и Ф. Мароттъ (F. Marotte) въ журналѣ „Revue de l'Enseignement des Sciences", 3. Année (1909), стр. 49. Въ текстѣ сохранено старое изложеніе, чтобы имѣть примѣръ приложенія леммы Гаусса. Я укажу лишь, какъ можно безъ ея помощи показать, что уравненіе $x^3+x^2-2x-1=0$ должно было бы имѣть корень ± 1, если бы оно было приводимымъ. Дѣйствительно, оно имѣло бы тогда раціональный корень $x=\frac{p}{q}$, гдѣ p и q суть взаимно простыя числа; но это значило бы, что $p^3+p^2q-2pq^2-q^3=0$, такъ что p^3, а, слѣдовательно, и само p, дѣлилось бы на q. Но точно такъ же можно видѣть, что q^3 и, слѣдовательно, q должно было бы дѣлиться на p; изъ этого вытекало бы, что $p=\pm q$ и корень x дѣйствительно равнялся бы ± 1.

---

5. Вращенія съ растяженіями четырехмѣрнаго пространства и трансформаціи Лоренца въ современной электродинамикѣ.

(Къ стр. 111).

Какъ уже указано было въ текстѣ, понятіе о вращеніи съ растяженіемъ въ четырехмѣрномъ пространствѣ R_4 находится въ самомъ тѣсномъ отношеніи къ основаніямъ „принципа относительности" въ электродинамикѣ, который вотъ ужъ нѣсколько лѣтъ самымъ живымъ образомъ занимаетъ физиковъ. А именно,— какъ я вкратцѣ покажу,—тѣ „преобразованія Лоренца", на изученіи которыхъ основаны изслѣдованія, относящіяся къ „принципу относительности", представляютъ не что иное, какъ вращенія нѣкотораго пространства R_4, и могутъ быть даже представлены самымъ удобнымъ образомъ съ помощью формулъ исчисленія кватерніоновъ.

Какъ извѣстно, подъ преобразованіемъ Лоренца понимаютъ такую линейную однородную подстановку трехъ координатъ въ пространствѣ x, y, z и времени t съ вещественными коэффиціентами:

$$\left\{\begin{array}{l} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t, \end{array}\right. \qquad (1)$$

которая преобразовываетъ квадратичную форму $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ (гдѣ c есть скорость свѣта) въ самое себя, такъ что

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2, \tag{2}$$

и у которой послѣднiй коэффицiентъ

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=a_{44}>0. \tag{3}$$

При этомъ, ради краткости, не принято во вниманiе могущее имѣть мѣсто смѣщенiе начальной точки $x=y=z=t=0$.

Оказывается, что въ исчисленiи кватернiоновъ легко можно указать такую подстановку, которая удовлетворяетъ условiю (2), если только на первое время оставить безъ вниманiя требованiе вещественности коэффицiентовъ и неравенство (3). А именно, стоитъ только разсматривать такiе кватернiоны, компонентами которыхъ являются не вещественныя, а обыкновенныя комплексныя числа, образованныя съ помощью обыкновенной мнимой единицы $\sqrt{-1}$ (которую слѣдуетъ, конечно, отличать отъ спецiальныхъ единицъ исчисленiя кватернiоновъ i, j, k). Замѣтимъ прежде всего, что полученные такимъ образомъ кватернiоны

$$\begin{cases} q=\sqrt{-1}\cdot c\cdot t+ix+jy+kz, \\ q'=\sqrt{-1}\cdot c\cdot t'+ix'+jy'+kz' \end{cases} \tag{I^a}$$

имѣютъ своими тензорами какъ разъ квадратные корни изъ квадратичныхъ формъ (2). Поэтому можно точно такъ же, какъ въ текстѣ (стр. 107—110), доказать, что формула

$$q'=\frac{p\cdot q\cdot \pi}{M} \tag{I^b}$$

изображаетъ линейную подстановку, удовлетворяющую условiю (2), если p и π представляютъ любые кватернiоны, тоже съ комплексными слагающими, а M означаетъ корень квадратный изъ произведенiя ихъ тензоровъ.

Чтобы получить вещественные коэффицiенты и удовлетворить условiю (3), надо только взять для p и π нѣкоторымъ образомъ сопряженные кватернiоны, а именно, вводя подхо-

дящіе параметры, мы получимъ слѣдующія крайне простыя раціональныя формулы *).

Пусть $A, A', \ldots, D, D'$ означаютъ восемь вещественныхъ величинъ, связанныхъ такимъ уравненіемъ:

$$AA' + BB' + CC' + DD' = 0 \qquad (\mathrm{II^a})$$

и такимъ неравенствомъ:

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 > A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2. \qquad (\mathrm{II^b})$$

Тогда мы получимъ:

$$\left.\begin{aligned} p &= (D+\sqrt{-1}\,D') + i\,(A+\sqrt{-1}\,A') + j\,(B+\sqrt{-1}\,B') + k\,(C+\sqrt{-1}\,C'),\\ \pi &= (D-\sqrt{-1}\,D') - i\,(A-\sqrt{-1}\,A') - j\,(B-\sqrt{-1}\,B') - k\,(C-\sqrt{-1}\,C'),\\ M &= (A^2+B^2+C^2+D^2) - (A'^2+B'^2+C'^2+D'^2). \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II^c})$$

Формулы (I) совмѣстно съ условіями (II) даютъ изображеніе всѣхъ преобразованій Лоренца.

Самъ Минковскій (Minkowski), впрочемъ, пользуется въ своихъ работахъ вмѣсто исчисленія кватерніоновъ символикой матрицъ Кэли (Cayley), которая позволяетъ наряду съ преобразованіями Лоренца изобразить инваріанты, принадлежащіе къ ихъ группѣ **).

---

6. Къ дискриминантной поверхности биквадратнаго уравненія.

(Къ стр. 157).

Нитяная модель Гартенштейна (Hartenstein) выпущена въ свѣтъ тѣмъ временемъ фирмой Шиллинга (M. Schilling) въ Лейпцигѣ (Серія XXXIII, №№ 2, 3); одна модель показываетъ дискриминантную поверхность, другая изображаетъ, кромѣ того, еще 2 ея касательная плоскости; это даетъ подраздѣленіе пространства, соотвѣтствующее чертежамъ на стр. 152, 153. Сравните относящуюся къ модели статью: R. Hartenstein, „Die Diskriminantenfläche der Gleichung vierten Grades“ (Leipzig, Schilling, 1909).

---

*) См. мой рефератъ „О геометрическихъ основаніяхъ группы Лоренца“ въ журналѣ „Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung“ 19 (1910), стр. 299.

**) „Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern“. „Nachr. der K. Gesellschaft der Wissenschaften“, Göttingen, math.-phys. Kl. 1908, S. 53; „Mathematische Annalen“ 68, S. 472.

7. Къ уравненіямъ шестой степени.

(Къ стр. 229).

Рѣшеніе уравненій 6-ой степени, соотвѣтственно приведеннымъ въ текстѣ принципамъ сведенія уравненія 5-ой степени къ теоріи икосаэдра, было, въ связи съ упомянутой моей работой 1905 года, успѣшно изслѣдовано Горданомъ (P. Gordan) въ двухъ работахъ въ 61-омъ (1905, стр. 50) и 68-омъ (1910, стр. 1) томахъ журнала „Mathematische Annalen". Упрощенную и продолженную дальше разработку этой проблемы содержитъ работа A. B. Coble, имѣющая появиться въ ближайшемъ времени въ „Mathematische Annalen".

8. Къ исторіи логариѳмовъ.

(Къ стр. 241).

Въ сущности, натуральные логариѳмы появились еще до Непера по поводу одного весьма важнаго успѣха въ картографіи: открытіе „меркаторской проекціи" Гергардомъ Меркаторомъ (около 1550 года) можно считать первымъ графическимъ открытіемъ логариѳмовъ *). Достаточно будетъ сослаться на III главу второй части второго тома этихъ лекцій, гдѣ выяснена связь меркаторской проекціи съ логариѳмической функціей. Если хотятъ, не зная послѣдней, вывести меркаторскую проекцію при помощи подходящаго предѣльнаго перехода, то неявно появляется (натуральный) логариѳмъ съ совершенно такой же точки зрѣнія, какъ у Непера изъ логариѳмовъ Бюрги.

Что же касается работъ Непера и Бюрги, то въ текстѣ указаны только ихъ руководящія основныя идеи; для полнаго вычисленія своихъ таблицъ они пользовались, конечно, наряду съ опредѣленіемъ послѣдовательныхъ степеней числа $(1 + 1/10^4)$ и, соотвѣтственно, числа $(1 - 1/10^7)$ на основаніи разностныхъ уравненій, также интерполяціонными методами. Кромѣ того, Неперъ владѣлъ уже идеей предѣльнаго перехода къ натуральнымъ логариѳмамъ въ собственномъ смыслѣ, т. е. — выражаясь современнымъ языкомъ — перехода къ дифференціальному уравненію $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$; именно онъ разсматриваетъ движеніе, скорость котораго растетъ пропорціонально разстоянію отъ исходной точки; этимъ представленіемъ онъ даже пользовался при вычисленіи своихъ

*) По письменному сообщенію Коппе (M. Koppe, Berlin).

таблицъ. Подробное изложеніе вы найдете у Коппе: „Die Behandlung der Logarithmen und der Sinus im Unterricht“ (Progr. d. Andreas-Realgymnasium, Berlin 1893), а также въ одной работѣ того же автора въ „Sitzungsberichte d. Berliner mathematische-Gesellschaft“, Bd. 3 (1904), S. 48.

9. Къ школьному изложенію ученія о логариѳмахъ.

(Къ стр. 255).

Подобныя же варіаціи обычнаго способа изложенія предлагаютъ и другіе авторы. Такъ, Жюль Таннери въ своихъ „Элементахъ математики“ *) опредѣляетъ съ самаго начала логариѳмъ посредствомъ площади гиперболы (стр. 265); точно такъ же поступалъ еще въ 1903 году Bradshaw, какъ тамъ же цитируетъ Таннери. Дѣйствительно, такой способъ изложенія представляетъ точное и послѣдовательное проведеніе точки зрѣнія „высшей“ математики.

Включеніе въ преподаваніе опредѣленія Непера-Бюрги, при постоянной иллюстраціи на конкретныхъ примѣрахъ, рекомендуетъ, напримѣръ, Коппе въ своей только-что упомянутой программѣ 1893 года.

10. Къ ученію о колебаніяхъ маятника.

(Къ стр. 308).

Критическое разсмотрѣніе „элементарныхъ“ способовъ изложенія ученія о маятникѣ содержится въ очень интересномъ этюдѣ Тимердинга, озаглавленномъ „Математика въ учебникахъ физики“ **) (стр. 49 и сл.). Въ немъ содержатся вообще подробныя изслѣдованія математическихъ методовъ, по традиціи сохраняющихся въ преподаваніи физики: при этомъ все снова и снова обнаруживается, до чего всякое разсужденіе здѣсь затрудняетъ; даже удовлетворительное изложеніе становится часто совершенно невозможнымъ благодаря такому искусственному исключенію исчисленія безконечно-малыхъ изъ элементарнаго преподаванія.

*) Ср. стр. 447.

**) H. E. Timerding, „Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern“. Bd. III. Heft 2 цитированныхъ выше „Abhandlungen der IMUK“ (Leipzig u. Berlin, 1910).

11. Къ развитію исчисленія безконечно-малыхъ.

(Къ стр. 339).

Въ только-что названномъ изслѣдованіи „Математика въ учебникахъ физики“ Тимердингъ слѣдующимъ образомъ группируетъ тѣ наиболѣе существенные методы и воззрѣнія, которые выступаютъ въ исторіи возникновенія анализа безконечно малыхъ и которые входятъ также въ наше изложеніе:

1) Методъ истощенія въ томъ видѣ, какъ его выработали Евклидъ и Архимедъ. Въ дополненіе къ сказанному въ текстѣ, я замѣчу здѣсь еще, что этотъ методъ позволяетъ, напримѣръ, опредѣлить площадь круга (и подобнымъ же образомъ разрѣшить аналогичныя проблемы исчисленія безконечно-малыхъ) находя послѣдовательныя приближенія къ площади круга при помощи площадей вписанныхъ и описанныхъ многоугольниковъ съ возрастающимъ числомъ сторонъ.

Существенное различіе по сравненію съ современными взглядами состоитъ въ томъ, что существованіе площади круга, какъ нѣкотораго числа, — или, на языкѣ древнихъ, „отношенія“ ($\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$, ср. стр. 49 и сл.) между площадью круга и квадратомъ радіуса, — принимается молча, какъ нѣчто самоочевидное; между тѣмъ современное исчисленіе безконечно-малыхъ совершенно пренебрегаетъ именно этой наглядной очевидностью и, напротивъ, опредѣляетъ величину площади на основаніи абстрактнаго понятія о предѣлѣ, и именно о предѣлѣ чиселъ, измѣряющихъ площади вписанныхъ многоугольниковъ. Но разъ существованіе площади принято, то методъ исчерпыванія представляетъ удовлетворяющій даже современнымъ требованіямъ вполнѣ точный пріемъ для приближеннаго опредѣленія величины площади при помощи раціональныхъ чиселъ, хотя для каждаго отдѣльнаго случая этотъ пріемъ долженъ быть особо приноровленъ и потому является нѣсколько громоздкимъ.

2) Ученіе о недѣлимыхъ, въ томъ видѣ, напримѣръ, какой оно получило у Кавальери (Cavalieri) (см. стр. 350). Согласно этому ученію подъ площадью, ограниченною кривою $y = y(x)$ надъ осью абсциссъ, называется просто сумма всѣхъ отдѣльныхъ ординатъ y; слѣдствіемъ такого взгляда является то, что Лейбницъ въ своемъ первомъ манускриптѣ объ интегральномъ исчисленіи (1675) пишетъ $\int y$, а не $\int y\,dx$.

3) Методъ приближенія, который Тимердингъ обозначаетъ именемъ Гюйгенса (Huygens). Это тѣ же самыя разсужденія, которыя мы нашли у Кеплера (стр. 341 и сл.) и у Делопиталя (стр. 352).

4) Исчисленіе флюксій Ньютона, основанное на непосредственной наглядности понятія о скорости (см. стр. 346).

5) Въ заключеніе слѣдуетъ, наконецъ, методъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій въ собственномъ смыслѣ, который на первый планъ выдвигаетъ понятіе о предѣлѣ и примѣняетъ окончательныя обозначенія Лейбница.

---

12. Къ разсужденіямъ объ основаніяхъ исчисленія безконечно-малыхъ.

(Къ стр. 357)

Здѣсь будетъ умѣстно, быть можетъ, сказать еще нѣсколько словъ о томъ различіи мнѣній относительно основаній исчисленія безконечно-малыхъ, какое мы еще и теперь часто встрѣчаемъ, лишь только выйдемъ за предѣлы узкаго круга спеціалистовъ-математиковъ. Я полагаю, что основанія для взаимнаго пониманія здѣсь можно найти въ разсужденіяхъ, совершенно аналогичныхъ тѣмъ, какія мы указали въ текстѣ по поводу обоснованія ариѳметики (стр. 20 и слѣд.).

Во всякой математической дисциплинѣ слѣдуетъ строго отличать внутреннюю логическую послѣдовательность ея строенія отъ вопроса о правильности тѣхъ или иныхъ примѣненій этихъ „аксіоматически" и, такъ сказать, „произвольно" установленныхъ понятій и относящихся къ нимъ теоремъ къ предметамъ нашего внѣшняго или внутренняго воспріятія. Георгъ Канторъ различаетъ *) въ цѣлыхъ числахъ имманентную реальность, принадлежащую имъ на основаніи ихъ логической опредѣлимости, отъ транзіэнтной реальности (transiente Realität), которой они обладаютъ въ силу ихъ примѣнимости къ дѣйствительнымъ вещамъ,

Въ примѣненіи къ исчисленію безконечно-малыхъ первая проблема разрѣшается вполнѣ съ помощью теорій, основанныхъ на поня-

*) Georg Cantor, „Mathematische Annalen", Bd. 21. (1883), стр. 562.

тіи о предѣлѣ, которыя теперь разработаны математической наукой въ логически законченномъ видѣ. Второй вопросъ принадлежитъ вполнѣ теоріи познанія, и математикъ можетъ лишь содѣйствовать точной его формулировкѣ тѣмъ, что отдѣляетъ и исчерпываетъ первую часть; для разрѣшенія же самаго вопроса чисто математическія работы по самой своей природѣ не могутъ имѣть никакого прямого значенія (ср. совершенно аналогичныя разсужденія по поводу ариѳметики, стр. 20 и слѣд.). Всѣ споры по вопросу объ обоснованіи исчисленія безконечно-малыхъ страдаютъ тѣмъ, что эти двѣ совершенно отдѣльныя части проблемы недостаточно рѣзко разграничены; въ дѣйствительности первая, чисто математическая часть здѣсь такъ же хорошо обоснована, какъ и во всѣхъ другихъ дисциплинахъ математики, и вся трудность заключается здѣсь, какъ и тамъ, во второй, философской части. Эти соображенія показываютъ, какое большое значеніе имѣютъ серьезныя изслѣдованія, направленныя на эту вторую сторону дѣла; но только представляется необходимымъ основывать ихъ на точномъ знаніи разультатовъ чисто математическихъ работъ, относящихся къ первой проблемѣ.

---

13. Къ ученію о совокупностяхъ.

(Къ стр. 408),

Какъ показалъ Корсельтъ въ только-что опубликованной работѣ (A. Korselt, „Mathematische Annalen“ 70 (1911), стр. 294), въ доказательствѣ теоремы объ эквивалентности, принадлежащемъ Шрёдеру (Schröder), содержится ошибка, такъ что въ дѣйствительности первое доказательство этой теоремы, принадлежащей, въ сущности, Кантору, дано Бернштейномъ (Bernstein).

---

14. Къ вопросу о числѣ измѣреній совокупности.

(Къ стр. 408).

Прямое доказательство инваріантности числа измѣреній, т. е. невозможности установить непрерывное взаимно-однозначное сопряженіе между C_m и C_n (при $m \neq n$), далъ недавно Бруверъ (L. E. F. Brouwer, „Mathematische Annalen“ 70 (1911), стр. 161); въ той же тетради „Mathematische Annalen“ (стр. 166) помѣщено еще одно доказательство, принадлежащее Лебегу (H. Lebesgue).

---

15. О Фр. Майерѣ.

(Къ стр. 437).

Вопреки одному замѣчанію въ первомъ изданіи этихъ лекцій по поводу „Элементовъ ариѳметики и алгебры“ Ф. Майера (Meyer) мнѣ съ разныхъ сторонъ было указано *), что Фридрихъ Майеръ самъ былъ выдающимся учителемъ и имѣлъ на всѣхъ своихъ учениковъ большое вліяніе, умѣя вызвать въ нихъ интересъ къ работѣ. Дѣйствительно, въ своей очень интересно написанной программной работѣ: „Сообщенія изъ учебнаго плана по математикѣ городской гимназіи въ Галле“ **) онъ является энтузіастомъ-педагогомъ, относясь съ большимъ пониманіемъ и интересомъ къ психологическимъ моментамъ преподаванія. Конечно, какъ восторженный гуманистъ стараго направленія, онъ хочетъ сохранить рѣшительно весь старый учебный матеріалъ и стоитъ далеко отъ всѣхъ позднѣйшихъ реформаторскихъ тенденцій. Во всякомъ случаѣ его преподаваніе нисколько не имѣло того абстрактнаго, догматическаго отпечатка, какимъ отличается его учебникъ; по крайней мѣрѣ, изъ его программы нельзя усмотрѣть, насколько онъ придерживался этой книги при преподаваніи.

---

*) Ср. рецензію W. Lorey въ „Deutsche Litteraturzeitung“ за 1909 г., стр. 3129.

**) „Mitteilungen aus dem mathematischen Lehrplan des Stadtgymnasiums zu Halle a. S.“, 1891. Progr. № 230.

ДОПОЛНЕНІЯ РЕДАКТОРА.

I. Планъ II части („Алгебры“).

Планъ, по которому выбранъ авторомъ матеріалъ, вошедшій въ составъ второй части этого тома („Алгебры“), можетъ, какъ намъ кажется, представиться читателямъ неяснымъ, и мы считаемъ полезнымъ его нѣсколько выяснить.

При рѣшеніи алгебраическихъ уравненій общихъ типовъ, существенную роль играютъ, конечно, буквенные коэффиціенты, въ нихъ входящіе. Иными словами, въ общихъ уравненіяхъ коэффиціенты являются перемѣнными параметрами, отъ значенія которыхъ зависятъ значенія корней. Число параметровъ, отъ которыхъ зависитъ уравненіе, часто можетъ быть уменьшено. Такъ, въ общемъ уравненіи 3-ей степени число параметровъ равно 3, но можетъ быть сведено къ двумъ. Точно такъ же Чирнгаузеновскимъ преобразованіемъ, надлежащимъ образомъ выбраннымъ, число параметровъ уравненія 5-й степени также можетъ быть сведено къ двумъ *). Вотъ почему Клейнъ и классифицируетъ уравненія по числу входящихъ въ него параметровъ. Эта точка зрѣнія отличается значительно большей общностью, чѣмъ обыкновенное выраженіе уравненія въ буквенныхъ коэффиціентахъ, такъ какъ самые коэффиціенты могутъ чрезвычайно разнообразно выражаться въ тѣхъ или иныхъ параметрахъ; число параметровъ можетъ иногда даже превышать число коэффиціентовъ и съ такого рода случаями постоянно приходится встрѣчаться. Клейнъ разсматриваетъ только уравненія, содержащія одинъ или два параметра.

Итакъ, положимъ, что намъ дано уравненіе, содержащее одинъ параметръ или нѣсколько. Въ чемъ заключается задача рѣшенія уравненія? Очевидно, въ томъ, чтобы выразить корни уравненія въ функціи этихъ параметровъ. Этому порядку идей алгебра слѣдуетъ и въ классическомъ ея изложеніи. Въ уравненіяхъ первой степени корень непосредственно выражается раціонально въ тѣхъ параметрахъ, отъ которыхъ уравненіе зави-

*) Правда, при этомъ уравненіе 5-ой степени распадается на нѣсколько типовъ уравненій о двухъ параметрахъ.

ситъ. Слѣдующій шагъ заключается въ рѣшеніи двучленныхъ уравненій вида $x^n = a$, содержащихъ одинъ параметръ a. Съ давнихъ временъ были указаны методы вычисленія корней этихъ уравненій въ зависимости отъ параметра, и въ этомъ смыслѣ функціональная зависимость, выражаемая этимъ уравненіемъ, была изучена. Это формулировали такъ, что извлеченіе корня должно быть отнесено къ числу операцій, хорошо извѣстныхъ. Классическая постановка задачи объ алгебраическомъ рѣшеніи уравненій въ томъ именно и заключалась, что старались свести рѣшеніе всякаго уравненія къ рѣшенію двучленныхъ уравненій. Какъ извѣстно, это удалось для уравненій 2-ой, 3-ей и 4-ой степени. Относительно же уравненій болѣе высокихъ степеней было обнаружено, что ихъ рѣшеніе, вообще говоря, не можетъ быть сведено къ извлеченію корней, т. е. къ рѣшенію двучленныхъ уравненій. Когда это вполнѣ выяснилось, то дальнѣйшее развитіе теоріи алгебраическаго рѣшенія уравненій, естественно, пошло двумя путями. Во-первыхъ, старались выдѣлить тѣ алгебраическія уравненія высшихъ степеней, которыя все же могутъ быть разрѣшены въ радикалахъ. Это теченіе идетъ отъ Абеля и Галуа и въ работахъ Кронекера до извѣстной степени получило свое завершеніе. Другое теченіе ставитъ себѣ задачу болѣе широкую. Если прежнія средства отказались служить, то нужно найти новыя. Подобно тому, какъ были изучены двучленныя уравненія, нужно подыскать новую категорію уравненій, найти непосредственные пути къ вычисленію ихъ корней, изучить такимъ образомъ опредѣляемую этими уравненіями функціональную зависимость и попытаться свести обширныя группы уравненій къ этимъ новымъ основнымъ типамъ. Къ этому направленію относится извѣстная работа Клейна объ икосаэдрѣ. Здѣсь разобранъ рядъ такихъ основныхъ уравненій; общіе результаты этого изслѣдованія приведены во II главѣ „Алгебры".

Но для того, чтобы искать новые основные типы уравненій, нужна руководящая нить. Этой руководящей нитью служило изображеніе функціональной зависимости, опредѣляемой этими уравненіями, на Римановыхъ поверхностяхъ. Эта зависимость въ случаѣ двучленныхъ уравненій приводитъ къ раздѣленію сферы на двусторонники (сферическіе вырѣзки). Если мы разрѣжемъ эти двусторонники по экватору и станемъ искать уравненія, которыя

приводятъ къ этому подраздѣленію, то придемъ къ уравненію діэдра. Дальнѣйшее развитіе этой идеи, которое читатель найдетъ въ текстѣ, приводитъ къ уравненіямъ многогранниковъ. Клейнъ указываетъ категорію уравненій, которыя приводятся къ этимъ типамъ, но, къ сожалѣнію, эти категоріи гораздо менѣе обширны, нежели тѣ, которыя сводятся къ двучленнымъ уравненіямъ. Вотъ почему эти замѣчательныя изслѣдованія, глубокія по замыслу и необычайно талантливыя по своему выполненію, все же носятъ спеціальный характеръ.

II. О Римановыхъ поверхностяхъ.

1. Положимъ, что w есть независимая перемѣнная въ области комплексныхъ чиселъ, а z—однозначная функція отъ w:

$$z = f(w). \tag{1}$$

Возьмемъ двѣ плоскости и, выбравъ на каждой начало, полуось положительныхъ чиселъ и единицу длины, будемъ обычнымъ способомъ наносить на одной плоскости значенія независимой перемѣнной w, а на второй — соотвѣтствующія значенія функціи z.

Допустимъ для простоты, что значенія независимой перемѣнной покрываютъ всю числовую плоскость. Тогда зависимость (1) относитъ каждой точкѣ плоскости w одну опредѣленную точку на плоскости z. Двумъ различнымъ точкамъ на плоскости w можетъ иногда отвѣчать одна и та же точка на плоскости z; напримѣръ, если соотношеніе (1) имѣетъ видъ $z = w^2$, то точкамъ w и $-w$ всегда отвѣчаетъ одна и та же точка z. Но одной и той же точкѣ на плоскости независимой перемѣнной всегда отвѣчаетъ только одна точка на плоскости z.

Въ этомъ заключается геометрическій смыслъ однозначности функціи z; на это опираются и всѣ методы геометрическаго изслѣдованія однозначныхъ функцій комплексной перемѣнной.

2. Положимъ, что z есть непрерывная функція отъ w. Если w описываетъ непрерывную линію на плоскости w, то и z описываетъ непрерывную же линію на своей плоскости; если при этомъ движеніи w возвращается къ исходной точкѣ w_0, то и функція z возвращается къ исходной точкѣ z_0; это обусловливается однозначностью функціи и непрерывностью преобразованія.

Замкнутому контуру по плоскости w отвѣчаетъ замкнутый же контуръ на плоскости z,

Это свойство непрерывной однозначной функціи нѣкоторые авторы называютъ ея монодромностью *). Что это свойство однозначной функціи играетъ основную роль въ теоріи функцій, слѣдуетъ уже изъ того, что на ней существенно основывается доказательство теоремы Коши объ интегралѣ по замкнутому контуру. Монодромность функціи z отъ независимой перемѣнной w заключается въ томъ, что при полномъ обходѣ непрерывнаго замкнутаго контура на плоскости w мы всегда возвращаемся къ исходной точкѣ и на плоскости z.

3. Положимъ теперь, что соотношеніе (1) замѣняется уравненіемъ

$$z^2 = w. \tag{2}$$

Теперь z также является функціей независимой перемѣнной w, но не однозначной, а двузначной: каждому значенію w отвѣчаютъ два значенія z, которыя сливаются въ одно при $w = 0$. Теперь каждой точкѣ на плоскости независимой перемѣнной уже отвѣчаетъ не одна, а двѣ точки на плоскости z. Двузначная функція, естественно, даетъ и двузначное отображеніе плоскости w на плоскости z. Это обстоятельство лишаетъ насъ возможности непосредственно примѣнять къ изученію двузначныхъ и вообще многозначныхъ функцій комплексной перемѣнной тѣ геометрическіе методы, которые примѣняются къ изученію однозначной функціи. Если, напримѣръ, мы возьмемъ нѣкоторый контуръ на плоскости w и станемъ разсматривать интегралъ $\int z\,dw$, взятый по этому контуру, то онъ не будетъ имѣть никакого значенія, ибо мы не знаемъ, какое значеніе z нужно взять въ каждой точкѣ контура w. Казалось бы, что возникающія въ этомъ отношеніи затрудненія можно устранить безъ труда, разбивъ двузначную функцію на двѣ однозначныя. Иногда это дѣйствительно бываетъ возможно въ томъ смыслѣ, что

*) Терминъ „монодромность“ принадлежитъ Коши. Нужно, однако, сказать, что въ значеніяхъ близкихъ другъ другу терминовъ „монодромность“, „моногенность“, „синектичность“ и т. д. въ настоящее время царитъ большая путаница. Но, насколько мы можемъ судить, терминъ „монодромность“ всегда употреблялся именно въ томъ значеніи, которое ему придано въ текстѣ.

двузначную функцію можно разбить на двѣ монодромныя однозначныя функціи. Напримѣръ, функція

$$z = \sqrt{e^w} \tag{3}$$

разбивается на двѣ монодромныя функціи

$$z_1 = e^{\frac{w}{2}},\ z_2 = -e^{\frac{w}{2}}, \tag{4}$$

гдѣ $e^{\frac{w}{2}}$, какъ и e^w, выражается извѣстнымъ экспоненціальнымъ рядомъ. Монодромность сохраняется здѣсь благодаря тому, что двѣ функціи 4) ни при какомъ конечномъ значеніи w не имѣютъ общаго значенія. Въ самомъ дѣлѣ, равенство

$$e^{\frac{w}{2}} = -e^{\frac{w}{2}}$$

не можетъ имѣть мѣста, ибо $e^{\frac{w}{2}}$ не обращается въ нуль ни при какомъ конечномъ значеніи w. Наша двузначная функція представляетъ собой какъ бы искусственное соединеніе двухъ несвязанныхъ между собой монодромныхъ однозначныхъ функцій; съ такого рода случаями намъ еще придется встрѣчаться ниже.

Однако, обыкновенно такое расчлененіе не удается въ томъ смыслѣ, что составляющія функціи оказываются не монодромными. Мы выяснимъ это на примѣрахъ.

4. Остановимся для этого нѣсколько подробнѣе на функціональной зависимости (2).

Пусть ϱ и ω будутъ модуль и аргументъ независимой перемѣнной w, такъ что

$$w = \varrho(\cos\omega + i\sin\omega). \tag{5}$$

Тогда два значенія z будутъ:

$$z_1 = \sqrt{\varrho}\left[\cos\frac{\omega}{2} + i\sin\frac{\omega}{2}\right] \text{ и } z_2 = \sqrt{\varrho}\left[\cos\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right], \tag{6}$$

гдѣ $\sqrt{\varrho}$ есть ариѳметическое значеніе корня.

Положимъ теперь $w^{(0)} = 1$; тогда $z_1^{(0)} = 1$. Представимъ себѣ, что точка w будетъ двигаться, какъ указано на рисункѣ 1, по

окружности радіуса 1 въ направленіи, обратномъ часовой стрѣлкѣ*), начиная со значенія $w^{(0)}$; положимъ, что одновременно на второй плоскости перемѣщается соотвѣтствующая точка z, исходя отъ значенія $z_1^{(0)}$ и мѣняя это значеніе непрерывно. Въ такомъ случаѣ, когда точка w пройдетъ небольшую дугу ϑ и w пріобрѣтетъ значеніе $\cos\vartheta + i\sin\vartheta$, то z пріобрѣтетъ значеніе $\cos\frac{\vartheta}{2} + i\sin\frac{\vartheta}{2}$, ибо только это значеніе будетъ служить непрерывнымъ продолженіемъ начальнаго значенія $z_1^{(0)} = 1$; второе значеніе отличается весьма мало отъ -1 и не можетъ служить непрерывнымъ продолженіемъ значенія $z_1^{(0)}$. При дальнѣйшемъ движеніи, когда точка w пройдетъ дугу ω, соотвѣтствующая точка z пройдетъ дугу $\frac{\omega}{2}$. Когда точка w пройдетъ полуокружность, т. е. приметъ значеніе $w^{(1)} = -1$, то z дойдетъ до точки $z_1^{(1)} = i$. Когда точка w обойдетъ цѣлую окружность, т. е. приметъ значеніе $w^{(2)} = w^{(0)} = 1$, то z дойдетъ до точки $z_1^{(2)} = -1$.

Рис. 1.

Итакъ, когда независимая перемѣнная обойдетъ полную окружность и возвратится въ точку исхода, то точка z сдѣлаетъ только полъ-оборота и въ точку исхода, слѣдовательно, не возвратится. Монодромность нарушена.

*) Мы принимаемъ, что въ этомъ направленіи аргументъ ω возрастаетъ; мы будемъ называть его направленіемъ положительнаго вращенія.

Когда точка w станетъ продолжать свой путь по той же окружности, то точка z, непрерывно перемѣщаясь отъ значенія $z^{(2)} = -1$, опишетъ вторую полуокружность и возвратится въ исходную точку лишь послѣ того, какъ точка w д в а ж д ы обойдетъ свою окружность.

5. Въ разсмотрѣнномъ выше примѣрѣ точка w обошла окружность радіуса 1. Результатъ будетъ, однако, такой же, если точка w обойдетъ какую угодно замкнутую кривую, внутри которой расположено начало $w = 0$. Это значитъ: когда точка w обойдетъ всю кривую и возвратится въ точку исхода, то точка z опишетъ разомкнутую дугу. Оно и понятно: при непрерывномъ передвиженіи w по кривой $w^{(0)} w^{(1)} w^{(2)} w^{(3)} w^{(4)}$ (рис. 2) точка z бу-

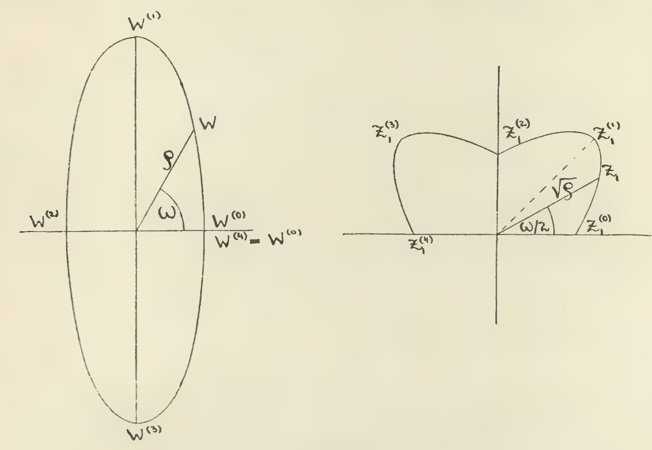


Рис. 2.

детъ перемѣщаться такъ, что ея разстояніе отъ начала будетъ равно $\sqrt{\varrho}$, а пройденное относительно положительной полуоси угловое разстояніе $z^{(0)} 0 z$ будетъ равно $\omega/2$, т. е. половинѣ углового разстоянія $w^{(0)} 0 w$, пройденнаго точкой w. Такимъ образомъ, когда точка w возвратится въ точку $w^{(2)} = w^{(1)}$ положительной полуоси, то точка z придетъ въ точку $z^{(4)}$ на отрицательной полуоси и, слѣдовательно, опишетъ разомкнутую дугу; эта дуга замкнется, когда точка w еще разъ опишетъ ту же или другую замкнутую кривую вокругъ начала.

Но дѣло обстоитъ иначе, если точка w описываетъ замкнутую кривую, не огибающую начала (рис. 3). Когда точка w вы-

ходитъ изъ $w^{(0)}$, имѣющей полярный уголъ ω_0, то точка z находится въ $z_1^{(0)}$ при полярномъ углѣ $\omega_0/2$. Когда точка w доходитъ до w_2, гдѣ начинается поворотъ, то точка z находится въ $z^{(2)}$ при полярномъ углѣ $\omega_2/2$. Теперь вмѣстѣ съ радіусомъ-векторомъ точки w поворачиваетъ въ обратную сторону и радіусъ-векторъ точки z_1; и когда w приходитъ въ начальную точку $w^{(0)}$, то и z_1 возвращается въ $z_1^{(0)}$.

6. Почему же начало играетъ здѣсь такую исключительную роль? Какъ обнаруживаетъ изслѣдованіе, причина заключается здѣсь въ томъ, что это есть точка развѣтвленія, т. е.

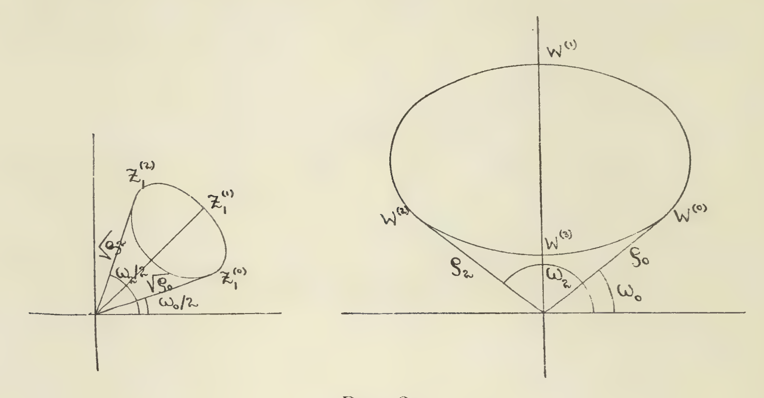


Рис. 3.

такая точка, въ которой два значенія функціи сливаются въ одно. Кромѣ точекъ развѣтвленія, функція можетъ имѣть еще другія особенныя точки, въ которыхъ функція не имѣетъ вовсе опредѣленныхъ значеній или обращается въ безконечность. Во всякомъ случаѣ, если независимая перемѣнная описываетъ замкнутую кривую, внутри которой вовсе нѣтъ особенныхъ точекъ, то и непрерывно измѣняющаяся функція описываетъ замкнутую кривую; но если независимая перемѣнная обходитъ особенныя точки, то функція можетъ не возвратиться (и обыкновенно не возвращается) къ исходному значенію. Доказательство этого предложенія, а также точное установленіе критеріевъ, когда функція возвращается при обходѣ особенной точки къ первоначальному значенію и когда не воз-

вращается, составляетъ одну изъ серьезныхъ задачъ теоріи функцій, разрѣшенную, впрочемъ, до конца. Мы, конечно, не имѣемъ возможности останавливаться здѣсь подробно на этомъ вопросѣ; мы ограничимся только примѣромъ точки развѣтвленія, при обходѣ которой функція возвращается къ исходному значенію.

Возьмемъ функцію

$$z = (1 - w)\sqrt{w}, \tag{7}$$

гдѣ радикалъ имѣетъ двойное значеніе; она имѣетъ двѣ точки развѣтвленія: $w = 0$ и $w = 1$. При $w = 1$ оба значенія функціи равны нулю. Эта функція представляетъ собой произведеніе двухъ функцій: $z_1 = 1 - w$ и $z_2 = \sqrt{w}$. Первая функція однозначная и, слѣдовательно, возвращается къ исходному значенію всякій разъ, какъ независимая перемѣнная дѣлаетъ полный оборотъ по какой бы то ни было замкнутой кривой; но и функція же z_2, какъ мы уже знаемъ, возвращается въ точку исхода, если независимая перемѣнная дѣлаетъ полный оборотъ по кривой, не огибающей нулевой точки.

Положимъ теперь, что независимая перемѣнная w обойдетъ кривую, огибающую точку $w = 1$, но не огибающую точки $w = o$ (рис. 4). Такъ какъ при этомъ и z_1 и z_2 возвратятся къ начальнымъ своимъ значеніямъ, то и произведеніе $z_1 z_2 = z$ возвратится къ начальному значенію. Замѣтимъ, что нѣкоторые авторы такихъ точекъ вовсе не называютъ точками развѣтвленія. Мы будемъ называть такую точку *точкой схожденія*: два значенія функціи здѣсь какъ бы сходятся безъ развѣтвленія.

Рис. 4.

7. Разсмотримъ еще двузначную функцію, имѣющую нѣсколько точекъ развѣтвленія, напримѣръ функцію

$$z = \sqrt{(w-1)(w+1)}. \tag{7}$$

Точки развѣтвленія здѣсь будутъ, очевидно, $w = +1$, $w = -1$. При обходѣ каждой изъ нихъ порознь функція переходитъ отъ одного значенія къ другому, т. е. мѣняетъ знакъ. Что будетъ,

если функція обогнетъ обѣ точки развѣтвленія? Легко понять, что функція возвратится къ первоначальному значенію. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что независимая перемѣнная w (рис. 5) обходитъ замкнутую кривую $w^{(0)} w^{(1)} w^{(2)} w^{(3)} w^{(0)}$, огибая обѣ точки развѣтвленія -1 и $+1$. Соединимъ точки $w^{(0)}$ и $w^{(2)}$ линіей раздѣляющей точки -1 и $+1$. Точка w движется отъ $w^{(0)}$ къ $w^{(1)}$, отъ $w^{(1)}$ черезъ $w^{(2)}$ къ $w^{(3)}$ и, наконецъ, обратно къ $w^{(0)}$. Ясное дѣло, что ничто не измѣнится, если точка w прежде, чѣмъ пройти дугу $w^{(2)} w^{(3)}$, пробѣжитъ дугу $w^{(2)} w^{(0)}$ и затѣмъ обратно $w^{(0)} w^{(2)}$: она придетъ въ $w^{(2)}$ во второй разъ съ тѣмъ же значеніемъ функціи, что и въ первый разъ. Теперь ясно, что замкнутый путь $w^{(0)} w^{(1)} w^{(2)} w^{(3)} w^{(0)}$ эквивалентенъ двумъ замкнутымъ же путямъ: $w^{(0)} w^{(1)} w^{(2)} w^{(0)}$ и $w^{(0)} w^{(2)} w^{(3)} w^{(0)}$; первая кривая огибаетъ только точку развѣтвленія -1, вторая — только точку развѣтвленія $+1$. При каждомъ обходѣ функція мѣняетъ знакъ, а потому въ конечномъ результатѣ она возвращается къ первоначальному своему значенію.

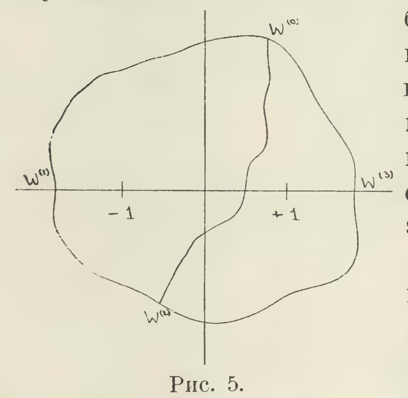


Рис. 5.

8. Мы разсматривали до сихъ поръ только двузначныя функціи: въ точкахъ развѣтвленія сходились два значенія этой функціи; такія точки развѣтвленія называются **точками развѣтвленія первой кратности**. Обратимся теперь къ трехзначнымъ функціямъ.

Возьмемъ сначала простѣйшую функцію:

$$z = \sqrt[3]{w}. \tag{8}$$

Если выразить снова независимую перемѣнную w черезъ модуль и аргументъ по формулѣ (5), положивъ

$$z_1 = \sqrt[3]{\varrho}\left(\cos\frac{\omega}{3} + i\sin\frac{\omega}{3}\right), \quad z_2 = \varepsilon z_1, \quad z_3 = \varepsilon^2 z_1, \tag{9}$$

гдѣ

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \tag{10}$$

есть одинъ изъ комплексныхъ корней 3-ей степени изъ 1, то это и будутъ 3 значенія нашей функціи. Эта функція имѣетъ точку развѣтвленія $z=0$; въ ней сходятся всѣ 3 значенія функціи; она называется **точкой развѣтвленія второй кратности**.

Если здѣсь радіусъ-векторъ точки w поворачивается на небольшой уголъ w, то при непрерывномъ измѣненіи аргументъ функціи нарастаетъ на $\frac{w}{3}$. При полномъ обходѣ вокругъ точки развѣтвленія аргументъ начальнаго значенія увеличивается на $\frac{2\pi}{3}$; поэтому значеніе z_1 переходитъ въ z_2, значеніе z_2 въ z_3, значеніе z_3 въ z_1. Это выражаютъ схематически такъ:

$$\left|\begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{matrix}\right|. \tag{11}$$

Если мы обойдемъ точку развѣтвленія въ положительномъ направленіи 2 раза, то послѣ перваго обхода z_1, перейдетъ въ z_2; послѣ второго—z_2 перейдетъ въ z_3; такимъ образомъ, послѣ двухъ обходовъ z_1 перейдетъ въ z_3. Вообще результатъ двойного обхода можно схематически выразить такъ:

$$\left|\begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_3 & z_1 & z_2 \end{matrix}\right|. \tag{12}$$

9. Теперь разсмотримъ функцію

$$z=\sqrt[3]{1+w}+\sqrt{1-w}; \tag{13}$$

первый радикалъ $u=\sqrt[3]{1+w}$ имѣетъ три значенія u_1, $u_2=\varepsilon u_1$ и $u_3=\varepsilon^2 u_1$; второй радикалъ $v=\sqrt{1-w}$ имѣетъ два значенія v_1 и $v_2=-v_1$. Функція $z=u+v$ имѣетъ шесть значеній:

$$z_1=u_1+v_1,\ z_2=u_2+v_1,\ z_3=u_3+v_1,$$
$$z_4=u_1+v_2,\ z_5=u_2+v_2,\ z_6=u_3+v_2,$$

Функція имѣетъ двѣ точки развѣтвленія $w=1$ и $w=-1$. Въ точкѣ $w=-1$ сливаются значенія u_1, u_2, u_3; это—точка развѣтвленія второй кратности; при ея обходѣ значеніе второго

слагаемаго не мѣняется, а u_1 переходитъ въ u_2, u_2 въ u_3, u_3 въ u_1. Поэтому схема измѣненія функціи z будетъ такая:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \\ z_2 & z_3 & z_1 & z_5 & z_6 & z_4 \end{array}\right|. \qquad (14)$$

Шесть значеній функціи распадаются на двѣ тройныя группы, внутри которыхъ происходятъ замѣщенія. Въ точкѣ $w = 1$ сливаются значенія v_1 и v_3; при ея обходѣ v_1 переходитъ въ v_2, а первое слагаемое возвращается къ первоначальному значенію. Поэтому схема замѣщенія значеній функціи z будетъ такая

$$\left|\begin{array}{cc} z_1 & z_4 \\ z_4 & z_1 \end{array}\right| \; \left|\begin{array}{cc} z_2 & z_5 \\ z_5 & z_2 \end{array}\right| \; \left|\begin{array}{cc} z_3 & z_6 \\ z_6 & z_3 \end{array}\right|. \qquad (15)$$

Здѣсь 6 значеній функціи распадаются на 3 группы, по два значенія въ каждой, при чемъ значенія одной и той же группы замѣщаютъ другъ друга.

Въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ 6-значной функціи ни въ одной изъ точекъ развѣтвленія не сливаются всѣ 6 значеній функціи; но въ каждой точкѣ они разбиваются на группы, при чемъ замѣщеніе происходитъ внутри группы; общее же число значеній, сливающихся въ каждой точкѣ развѣтвленія группами, равно шести. Это суть точки развѣтвленія 5-го порядка.

Вообще, точкѣ развѣтвленія присваивается порядокъ μ, если общее число значеній, которыя сливаются въ одно значеніе или группами въ нѣсколько кратныхъ значеній, равно $\mu + 1$.

10. Въ рубрикахъ 4, 5, 7 мы разсмотрѣли двузначныя функціи, и ихъ точки развѣтвленія были 1-го порядка; въ рубрикѣ 8 мы разсмотрѣли 3-значную функцію, и ея точка развѣтвленія была 2-го порядка. Наконецъ, развѣтвленія 6-значной функціи, разсмотрѣнной въ рубрикѣ 9, были 5-го порядка. Отсюда можетъ составиться представленіе, будто вообще функція, имѣющая $(\mu + 1)$ значеній, можетъ имѣть только точки развѣтвленія μ-го порядка. Однако, это не такъ; мы въ этомъ убѣдимся на слѣдующемъ примѣрѣ.

Положимъ, что z опредѣляется въ функціи отъ w изъ уравненія

$$z^3 - 3wz + 2w = 0. \qquad (16)$$

Если мы обратимся къ общему уравненію 3-ей степени

$$z^3 + pz + q = 0, \qquad (17)$$

то корни его, какъ извѣстно, выражаются по формулѣ Кардана слѣдующимъ образомъ.

Полагаемъ:

$$R = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad R' = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}; \qquad (18)$$

значеніе внутренняго и внѣшняго радикала въ выраженіи R могутъ быть выбраны произвольно, а въ выраженіи R' внутренній радикалъ долженъ имѣть то же значеніе, что и въ первомъ, внѣшній же долженъ быть выбранъ такъ, чтобы

$$RR' = -\frac{p}{3}. \qquad (19)$$

Тогда корни уравненія (17) выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$z_1 = R + R', \; z_2 = \varepsilon R + \varepsilon_2 R', \; z_3 = \varepsilon^2 R + \varepsilon R', \qquad (20)$$

гдѣ

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}.$$

Примѣняя эти формулы къ уравненію (16), мы получимъ:

$$R = \sqrt[3]{w(-1 + \sqrt{1-w})}, \; R' = \sqrt[3]{w(-1 - \sqrt{1-w})}, \qquad (21)$$

$$RR' = w, \qquad (22)$$

$$z_1 = R + R', \; z_2 = \varepsilon R + \varepsilon^2 R', \; z_3 = \varepsilon^2 R + \varepsilon R'. \qquad (23)$$

Теперь изъ состава радикаловъ RR' мы видимъ, что наша трехзначная функція имѣетъ двѣ точки развѣтвленія: $w = 0$ и $w = 1$. При $w = 0$ всѣ три значенія функціи обращаются въ нуль; это — точка развѣтвленія 2-го порядка. При $w = 1$ имѣемъ:

$$R' = R = \sqrt[3]{-w} = -1; \; z_1 = -2; \; z_2 = z_3 = -(\varepsilon + \varepsilon^2) = 1.$$

Такимъ образомъ, $w = 1$ есть точка развѣтвленія первой кратности; въ ней сливаются только два значенія функціи: z_2 и z_3.

Посмотримъ, что происходитъ, когда мы обходимъ каждую изъ точекъ развѣтвленія. Легко видѣть, что при обходѣ одной точки $w = 0$ радикалъ R переходитъ въ εR; въ самомъ дѣлѣ, его можно представить въ видѣ

$$R = \sqrt[3]{w} \cdot \sqrt[3]{-1 + \sqrt{1 - w}};$$

при обходѣ точки $w = 0$ первый радикалъ, какъ мы видѣли въ рубрикѣ 8, пріобрѣтаетъ множителя ε; второй радикалъ возвращается къ первоначальному значенію, такъ какъ для него $w = 0$ точкой развѣтвленія не служитъ. Поэтому радикалъ R переходитъ въ εR; но въ такомъ случаѣ R' переходитъ въ $\varepsilon^2 R'$, такъ какъ должно остаться въ силѣ соотношеніе (22). Слѣдовательно, при обходѣ точки $w = 0$ происходятъ слѣдующія замѣщенія:

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix}. \qquad (25)$$

При обходѣ точки развѣтвленія $w = 1$ происходитъ замѣщеніе значеній z_2 и z_3 другъ другомъ, а z_1 возвращается къ первоначальному значенію. Наконецъ, при обходѣ обѣихъ точекъ развѣтвленія происходитъ замѣщеніе точекъ z_1 и z_3 другъ другомъ, а z_2 остается безъ измѣненія.

---

11. Теперь мы можемъ обратиться собственно къ идеямъ Римана. Задача, которую онъ себѣ поставилъ, заключается въ томъ, чтобы создать для многозначныхъ функцій геометрическое изображеніе, аналогичное обычному изображенію однозначной функціи, но только съ сохраненіемъ непрерывности и монодроміи.

Основная мысль, положенная въ основу рѣшенія этой задачи, необычайно проста; она сводится къ слѣдующему. Положимъ, что намъ нужно отобразить двузначную функцію,—положимъ, функцію $z = \sqrt{w}$, разсмотрѣнную въ рубрикахъ 3-ей и 4-ой. Для этой цѣли представимъ себѣ, что плоскость w замѣняется двумя плоскими листами, наложенными одинъ на другой. Каждому значенію независимой перемѣнной w отвѣчаетъ по точкѣ на каждомъ листѣ, одна точка на верхнемъ, другая на нижнемъ; эти

двѣ точки расположены непосредственно одна надъ другой. Если значенію w на однолистной плоскости отвѣчаетъ точка M, то на двулистной этому значенію соотвѣтствуютъ двѣ точки: M_1 на верхнемъ листѣ и M_2 на нижнемъ листѣ. Этимъ двумъ точкамъ мы и отнесемъ два значенія (6) z_1 и z_2 нашей функціи порознь. Иными словами, мы будемъ считать, что значеніе z_1 отвѣчаетъ точкѣ M_1, а значеніе z_2 — точкѣ M_2. Теперь ясно, что двузначная функція геометрически претворена въ однозначную, униформирована; это значитъ, что каждой отдѣльной точкѣ на двулистной поверхности w (M_1 или M_2) отвѣчаетъ одна опредѣленная точка на плоскости z.

Совершенно ясно, что такимъ же образомъ для униформированія трехзначной функціи придется плоскость w расщепить на 3 листа и т. д. Эти многолистныя плоскости и называются Римановыми поверхностями.

12. Однако, эта простая идея далеко еще не рѣшаетъ задачи во всемъ ея объемѣ; этимъ достигается униформированіе, но обыкновенно не достигается монодромія.

Разсмотримъ функцію (3), распадающуюся на два значенія (4). Будемъ относить значеніе z_1 точкѣ M_1 и значеніе z_2 точкѣ M_2. Этимъ цѣль будетъ достигнута вполнѣ. Когда мы будемъ двигаться по непрерывной кривой на верхнемъ листѣ, то соотвѣтствующее значеніе функціи (3) будетъ непрерывно измѣняться, и когда мы возвратимся въ точку исхода, то и $z_1 = e^{\frac{w}{2}}$ возвратится къ исходному значенію, ибо это есть однозначная, непрерывная (и потому монодромная) функція отъ w. И то же самое будетъ имѣть мѣсто, когда мы будемъ перемѣщаться на второмъ листѣ. Здѣсь Риманова поверхность, состоящая изъ двухъ различныхъ листовъ, сполна разрѣшаетъ задачу униформированія съ сохраненіемъ непрерывности. Функція распадается на двѣ непрерывныя, не связанныя между собою, отдѣльныя функціи. Такое распаденіе особенно уясняется, когда мы подойдемъ къ вопросу съ другой стороны. Положимъ, что мы имѣемъ 3 однозначныя функціи, непрерывныя каждая во всей плоскости:

$$z_1 = f_1(w),\ z_2 = f_2(w),\ z_3 = f_3(w).$$

Теперь построимъ трехзначную функцію $z = f(w)$ такимъ образомъ, чтобы для каждаго значенія w первое значеніе функціи было $f_1(w)$, второе — $f_2(w)$, третье — $f_3(w)$. Мы механически соединили 3 однозначныя функціи въ одну трехзначную; естественно, что послѣдняя можетъ быть, обратно, расчленена на 3 отдѣльныя непрерывныя функціи.

13. Однако, такое расчлененіе далеко не всегда удается. Обратимся вновь къ двузначной функціи, которую мы разсматривали въ рубрикѣ 4. Предположимъ, что значенія двузначной функціи удалось такъ распредѣлить между двумя листами плоскости w, что непрерывному передвиженію по каждому листу соотвѣтствуетъ непрерывное измѣненіе функціи z. Начнемъ тогда обходить нѣкоторую замкнутую кривую, расположенную въ первомъ листѣ и огибающую точку $w = 0$. Если мы выйдемъ изъ точки M_1 съ начальнымъ значеніемъ z_1, то, какъ мы видѣли въ рубрикѣ 4-ой, изъ непрерывности измѣненія функціи z слѣдуетъ, что, по совершеніи полнаго обхода точки развѣтвленія $w = 0$, мы возвратимся въ M_1 не съ исходнымъ значеніемъ z_1, а со вторымъ значеніемъ z_2. Но значеніе z_2 не принадлежитъ точкѣ M_1, — оно принадлежитъ точкѣ M_2, лежащей на второмъ листѣ. Отсюда слѣдуетъ, что распредѣлить между раздѣльными листами значенія двузначной функціи такъ, чтобы сохранить непрерывность и связанную съ нею монодромію, невозможно. Коренное отличіе этого случая отъ того, который былъ разсмотрѣнъ въ предыдущей рубрикѣ, состоитъ въ томъ, что функція $\sqrt{e^w}$ точекъ развѣтвленія не имѣетъ, между тѣмъ какъ функція $\sqrt{w}$ таковую имѣетъ ($w = 0$). Чтобы униформировать эту функцію съ сохраненіемъ непрерывности, нужно принять еще другія мѣры — нужно *установить связь между двумя листами плоскости* w.

14. Это мы осуществимъ слѣдующимъ образомъ. Мы представимъ себѣ два листа плоскости w лежащими непосредственно одинъ на другомъ такимъ образомъ, что точки M_1 и M_2, соотвѣтствующія на обоихъ листахъ одному и тому же значенію независимой перемѣнной w, всегда расположены непосредственно одна надъ другой, Въ точкѣ развѣтвленія $w = 0$ мы оба листа скрѣпимъ. Мы сольемъ здѣсь двѣ точки обоихъ листовъ въ одну, и это можно сдѣлать потому, что этой точкѣ на одномъ и на дру-

гомъ листѣ отвѣчаетъ одно и то же значеніе функціи. Теперь распредѣлимъ значенія двузначной функціи между двумя листами слѣдующимъ образомъ: изъ двухъ значеній (6) (стр. 465), отвѣчающихъ данному значенію w, мы отнесемъ значеніе z_1 точкѣ M_1 на верхнемъ листѣ, значеніе z_2 — точкѣ M_2 на нижнемъ листѣ. Само собой разумѣется, что мы этимъ еще ничего не сдѣлали для спасенія монодроміи; для этого понадобилась еще одна своеобразная идея, указанная Риманомъ и, несомнѣнно, составляющая въ этомъ дѣлѣ главную его заслугу.

Разрѣжемъ оба листа по одной линіи,—напримѣръ, по оси вещественныхъ чиселъ, начиная съ точки $w = 0$. На каждомъ листѣ по разрѣзу образуются два свободныхъ края,—скажемъ, нижній и верхній. Теперь скрѣпимъ нижній край верхняго листа съ верхнимъ краемъ нижняго, какъ показано на рисункѣ 6-мъ. Оба листа теперь связаны, и точка, огибающая начало въ положительномъ направленіи, достигнувъ разрѣза, перейдетъ изъ перваго листа во второй.

Пріемъ, который мы произвели до сихъ поръ, можетъ быть осуществленъ даже реально, если наши два листа сдѣланы, скажемъ, изъ бумаги. Дальнѣйшее развитіе этого пріема носитъ уже, однако, идеально-геометрическій характеръ и реальнаго осуществленія не допускаетъ. Мы представимъ себѣ и верхній край перваго листа скрѣпленнымъ по разрѣзу съ нижнимъ краемъ второго листа; получаются два геометрическихъ листа, проникающихъ одинъ сквозь другой. Изъ какой бы точки M_1 верхняго листа мы ни исходили и въ какомъ бы направленіи мы ни обогнули начала, сдѣлавъ полный оборотъ, мы возвратимся не въ исходную точку M_1, а въ точку M_2 нижняго листа (рис. 6). Наоборотъ, если мы обойдемъ замкнутую кривую, N_1PQN_1, не огибающую начала, то мы необходимо возвратимся

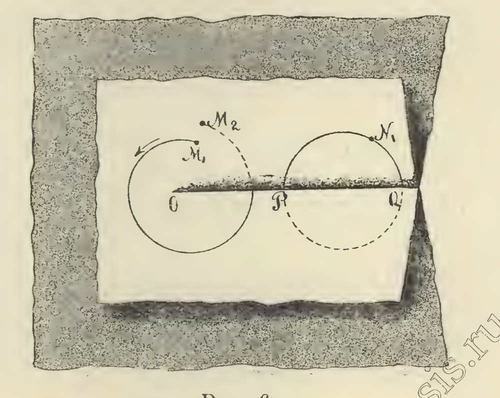


Рис. 6.

въ точку исхода N_1; въ самомъ дѣлѣ, такая кривая либо вовсе не пересѣкаетъ разрѣза, либо пересѣкаетъ его четное число разъ и потому послѣ полнаго оборота всегда возвращаетъ насъ въ тотъ листъ, изъ котораго мы исходили. Теперь нетрудно видѣть, что эта связь между листами возстанавливаетъ монодромію. Въ самомъ дѣлѣ, если мы, исходя изъ точки M_1 со значеніемъ z_1, обойдемъ замкнутую кривую, не огибающую начала, то, какъ мы знаемъ, мы вернемся къ тому же значенію z_1, но въ то же время придемъ и въ ту же точку M_1. Если мы сдѣлаемъ полный оборотъ и обогнемъ начало, то мы придемъ къ значенію z_2, но зато мы не возвратимся въ точку M_1, а вернемся въ точку M_2, которой и соотвѣтствуетъ это значеніе z_2. Монодромія возстановлена благодаря тому, что кривая, которая была бы замкнутой на обыкновенной плоскости, можетъ оказаться разомкнутой на двулистной Римановой поверхности указанной связности. На этой поверхности кривая будетъ замкнутой, если она отъ точки M_1 приводитъ опять къ M_1, или отъ точки M_2 приводитъ опять къ M_2; но въ такомъ случаѣ она приводитъ къ тому же значенію функціи, отъ котораго исходили. Если мы обогнемъ начало 2 раза, то на двулистной плоскости всегда вернемся въ тотъ же листъ и въ ту же точку M_1; кривая становится замкнутой и приводитъ къ тому же значенію функціи—въ полномъ согласіи съ предыдущей теоріей.

Линію, по которой мы провели разрѣзъ, называютъ *линіей развѣтвленія*.

15. Обратимся теперь къ трехзначной функціи, разсмотрѣнной въ рубрикѣ 8-ой, имѣющей одну точку развѣтвленія $w=0$. Чтобы ее униформировать, мы расщепимъ плоскость w на 3 листа, которые скрѣпимъ въ точкѣ $w=0$. Теперь каждому значенію w отвѣчаетъ точка M_1 на первомъ листѣ, точка M_2—на второмъ, точка M_3—на третьемъ листѣ. Мы отнесемъ точкѣ M_1 значеніе функціи z_1, точкѣ M_2—значеніе z_2, точкѣ M_3—значеніе z_3, установленныя равенствами (9). Теперь черезъ точку развѣтвленія произведемъ разрѣзъ и установимъ связность поверхности слѣдующимъ образомъ (рис. 7): нижній край перваго листа скрѣпимъ съ верхнимъ краемъ второго листа, нижній край второго—съ верхнимъ краемъ третьяго, нижній край третьяго—съ верхнимъ краемъ перваго. Если мы теперь выйдемъ изъ точки M_2 на первомъ листѣ и въ положительномъ направленіи обойдемъ точку

развѣтвленія одинъ разъ, то мы придемъ въ точку M_2 на второмъ листѣ, при слѣдующемъ оборотѣ придемъ въ точку M_3 на третьемъ листѣ и послѣ третьяго оборота возвратимся въ исходную точку M_1. Такъ какъ это вполнѣ совпадаетъ съ замѣщеніемъ значеній (11) и (12), то монодромія возстановлена такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

Въ разсмотрѣнныхъ двухъ примѣрахъ мы проводили разрѣзъ по оси вещественныхъ чиселъ; но въ дѣйствительности его можно провести въ какомъ угодно направленіи, лишь бы онъ вы-

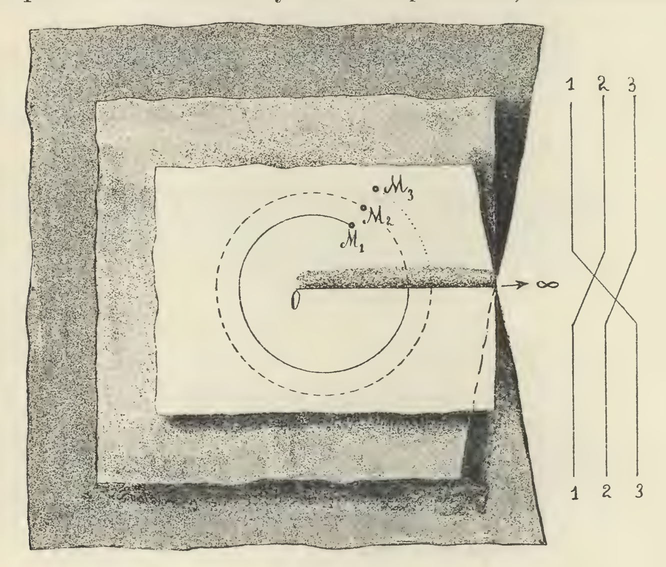


Рис. 7.

ходилъ изъ точки развѣтвленія и уходилъ въ безконечность. Для насъ важно только, чтобы полный обходъ вокругъ точки развѣтвленія привелъ насъ въ другой листъ. Разрѣзъ не долженъ даже необходимо имѣть прямолинейную форму — его можно провести какъ угодно, лишь бы сохранить ту же связность листовъ. На слѣдующихъ примѣрахъ эти разсужденія выясняются еще лучше.

16. Возьмемъ функцію

$$z = \sqrt{(w-1)\ (w+1)},$$

разсмотрѣнную въ рубрикѣ 7-ой, имѣющую двѣ точки развѣтвленія. Сообразно этому мы расщепимъ плоскость w на два листа, которые скрѣпимъ въ обѣихъ точкахъ развѣтвленія (рис. 8); точ-

ки -1 и $+1$ отмѣчены черезъ a и b. Изъ каждой точки проведемъ разрѣзъ, но только такъ, чтобы эти разрѣзы не пересѣкались; затѣмъ по каждому разрѣзу установимъ связь такъ, какъ

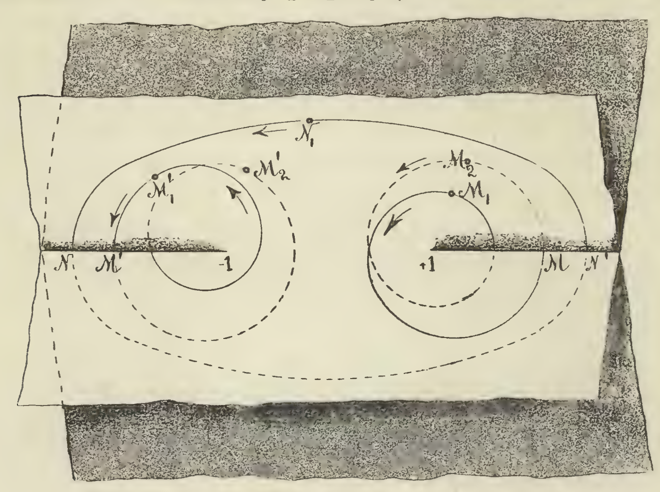


Рис. 8.

это было выполнено въ рубрикѣ 14-ой для функціи съ одной точкой развѣтвленія; но при каждомъ разрѣзѣ нижній край перваго

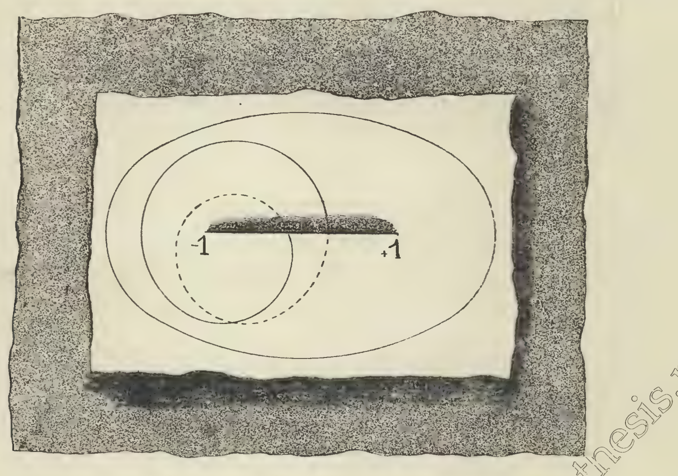


Рис. 9.

листа соединимъ съ верхнимъ краемъ второго и обратно. Если мы обогнемъ одинъ разъ одну изъ точекъ развѣтвленія, то пе-

рейдемъ изъ перваго листа во второй, какъ показываютъ отмѣченные пути. Если прослѣдимъ за дальнѣйшимъ движеніемъ этихъ линій, то увидимъ, что послѣ второго оборота мы возвращаемся въ исходную точку. Если кривая,—напримѣръ, $N_1 N N', N_1$ огибаетъ обѣ точки развѣтвленія, то она возвращается въ исходную точку въ полномъ согласіи съ указаннымъ въ рубрикѣ ходомъ измѣненія функціи. Монодромія, такимъ образомъ, сохранена.

Однако, того же результата можно достигнуть и инымъ путемъ. Соединимъ просто точки -1 и $+1$ (рис. 9), проведемъ по линіи $(-1, +1)$ разрѣзъ и края этого разрѣза соединимъ такъ, какъ мы ихъ соединяли выше: верхній край перваго листа съ нижнимъ краемъ второго и обратно. Если теперь обогнемъ одну изъ точекъ развѣтвленія, то перейдемъ изъ одного листа въ другой; кривая же, огибающая обѣ точки развѣтвленія, на всемъ своемъ протяженіи останется въ предѣлахъ одного и того же листа.

Для функціи

$$z = \sqrt{(w-a)(w-b)(w-c)}$$

сѣченія могутъ быть проведены такъ, какъ это показано на рис. 10, гдѣ A, B и C суть изображенія чиселъ a, b, c. Но сѣченія, или линіи развѣтвленія, можно было бы провести и многими другими способами. Можно было бы провести линіи развѣтвленія изъ всѣхъ трехъ точекъ въ безконечность; можно соединить любыя двѣ точки развѣтвленія, а изъ третьей провести сѣченіе въ безконечность.

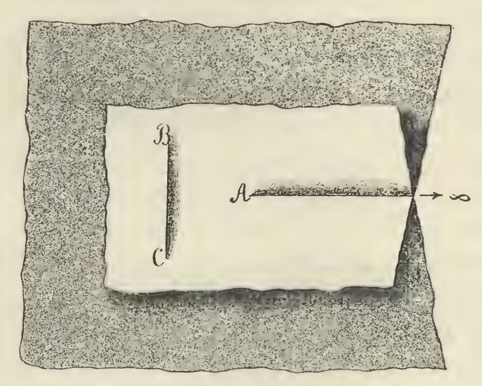
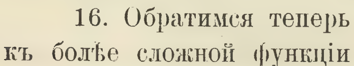


Рис. 10.


16. Обратимся теперь къ болѣе сложной функціи (18), разсмотрѣнной въ рубрикѣ 9-ой. Здѣсь мы имѣемъ 2 точки развѣтвленія: $+1$ и -1. Функція 6-значная и потому мы расщепимъ плоскость w на 6 листовъ. Въ точкѣ развѣтвленія $w = -1$, значенія z_1 z_2, z_3 сливаются въ одно, значенія z_4, z_5, z_6 также сливаются въ одно. Сообразно этому мы здѣсь скрѣпимъ листы

1-ый, 2-ой и 3-iй между собой, а листы 4-ый, 5-ый и 6-ой между собой. Черезъ первые три листа мы проведемъ разрѣзъ и соединимъ нижнiй край 1-го листа съ верхнимъ краемъ 2-го, нижнiй 2-го —съ верхнимъ 3-го, нижнiй 3-го—съ верхнимъ перваго. Такимъ же образомъ мы проведемъ разрѣзы черезъ 4-ый, 5-ый и 6-ой листы и скрѣпимъ нижнiй край 4 го съ верхнимъ краемъ 5-го, нижнiй край 5-го—съ верхнимъ 6-го, нижнiй 6-го—съ верхнимъ 4-го. Эта связь схематически изображается рисункомъ 11. Въ точкѣ $w = 1$ совпадаютъ значенiя 1-ое съ 4-ымъ, 2-ое съ 5-ымъ, 3-е съ 6-ымъ. Сообразно этому мы и скрѣпимъ 1-ый листъ съ 4-ымъ краями накрестъ, 2-ой—съ 5-ымъ, 3-iй —съ 6-ымъ. Схема эта двумя способами изображена на рисункѣ 12. Второе изображенiе нагляднѣе показываетъ, что листы соединены только по 2. Насъ не должно смущать, что мы скрѣпляемъ 2-ый листъ съ 4-мъ, такъ сказать, сквозь 1-ой и 3-й; мы съ этимъ уже встрѣчались: это соединенiе идеально-геометрическое, оно не осуществляется реально. Если мы теперь обогнемъ точку развѣтвленiя, (-1), выходя изъ 1-аго листа, то мы придемъ во 2-ой листъ; если обогнемъ ее еще разъ, то придемъ въ 3-iй листъ, а послѣ третьяго оборота возвратимся въ 1-ый листъ. Если мы выйдемъ изъ точки на 1-омъ листѣ и обогнемъ обѣ точки развѣтвленiя, то первый разрѣзъ приведетъ насъ во 2-ой листъ, отсюда при переходѣ черезъ 2-ой разрѣзъ мы перейдемъ въ 5-ый листъ. Это вполнѣ совпадаетъ съ ходомъ замѣщенiй (14) и (15).

Рис. 11.

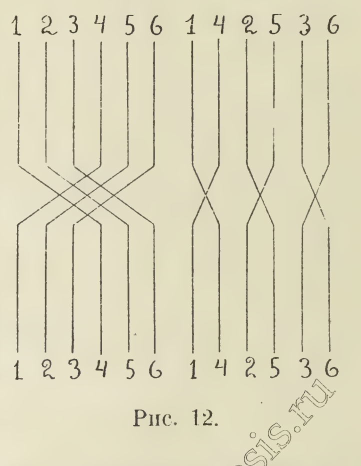


Рис. 12.

17. Въ предыдущихъ рубрикахъ мы разобрали только конечныя значенiя независимой перемѣнной, служащiя точками развѣтвленiя функцiи; но и безконечное значенiе независимой перемѣнной можетъ служить точкой развѣтвленiя и вотъ въ какомъ смыслѣ.

Преобразуемъ въ нашей функціи независимую перемѣнную, положивъ

$$w = \frac{1}{t}; \tag{26}$$

тогда функція $z = f(w)$ превратится въ функцію

$$z = f\left(\frac{1}{t}\right) = \varphi(t).$$

Когда t стремится къ нулю, w стремится къ безконечности; если $t = 0$ есть точка развѣтвленія функціи $\varphi(t)$, то говорятъ, что $w = \infty$ есть точка развѣтвленія функціи $f(w)$; если, напротивъ, значеніе $t = 0$ не служитъ точкой развѣтвленія для функціи $\varphi(t)$, то и $w = \infty$ не есть точка развѣтвленія функціи $f(w)$

Разсмотримъ, напримѣръ, функцію (2), изученную подробно въ рубрикѣ 4. Преобразованіе (26) здѣсь даетъ:

$$z^2 = \frac{1}{t}\cdot \tag{27}$$

Если здѣсь снова положимъ

$$t = \varrho(\cos\omega + i\sin\omega),$$

то получимъ:

$$z^2 = \frac{1}{\varrho}(\cos\omega - i\sin\omega);$$

отсюда два значенія z будутъ:

$$z_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\left(\cos\frac{\omega}{2} - i\sin\frac{\omega}{2}\right)\cdot$$

Если мы теперь, исходя изъ опредѣленной точки t_0 со значеніемъ

$$z_1^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}\left(\cos\frac{\omega_0}{2} - i\sin\frac{\omega_0}{2}\right),$$

обойдемъ полную окружность вокругъ точки $t = 0$, то мы не возвратимся къ значенію $z_1^{(0)}$, а придемъ къ значенію

$$z_2^{(0)} = -\frac{1}{\sqrt{\varrho_0}}\left(\cos\frac{\omega_0}{2} - i\sin\frac{\omega_0}{2}\right)\cdot$$

Въ этомъ мы убѣдимся при помощи тѣхъ же соображеній, которыми мы пользовались въ рубрикѣ 4.

Итакъ, $t=0$ есть точка развѣтвленія двузначной функціи (27), а потому $w=\infty$ есть точка развѣтвленія для функціи (2), опредѣляемой уравненіемъ $z^2=w$.

Это становится особенно ясно, если мы пользуемся вмѣсто комплексной плоскости Римановой сферой. Какъ это дѣлается, вкратцѣ изложено въ текстѣ автора (стр. 173). Быть можетъ, будетъ полезно прибавить нѣсколько словъ для выясненія этой простой идеи. Чрезъ начальную точку S числовой плоскости (рис. 19) проводимъ сферу, касающуюся плоскости въ этой точкѣ. Пусть N будетъ точка, діаметрально противоположная S на этой сферѣ; пусть Q будетъ точка на числовой плоскости, служащая изображеніемъ комплекснаго числа w. Соединимъ точку N съ Q: прямая NQ встрѣтитъ сферу въ нѣкоторой точкѣ P, которую мы примемъ за изображеніе того же числа w на нашей сферѣ. Такимъ образомъ ясно, что каждому комплексному числу w будетъ отвѣчать нѣкоторая точка на Римановой сферѣ; и обратно, каждая точка Римановой сферы будетъ изображеніемъ нѣкотораго числа w. Когда точка Q на плоскости удаляется въ какомъ бы то ни было направленіи въ безконечность, то точка P неизмѣнно приближается къ N; эта точка N является, такимъ образомъ, изображеніемъ безконечнаго значенія w ($w=\infty$).

На Римановой сферѣ особенно ясно, въ какомъ случаѣ значеніе $w=\infty$ будетъ точкой развѣтвленія функціи. *Если при обходѣ точки N на Римановой сферѣ по замкнутой кривой, внутри которой не содержится иныхъ точекъ развѣтвленія, мы всегда возвращаемся къ исходному значенію функціи, то $w=\infty$ есть обыкновенная точка; если же при такомъ обходѣ мы иногда возвращаемся не къ исходному, а къ иному значенію функціи, то $w=\infty$ есть точка развѣтвленія функціи.*

Порядокъ безконечно-удаленной точки развѣтвленія опредѣляется совершенно такъ же, какъ и для другихъ точекъ развѣтвленія. Можно разсуждать и такъ: если для функціи $f(w)$ значеніе $w=\infty$ есть точка развѣтвленія, а при преобразованіи (26) эта функція переходитъ въ функцію $\varphi(t)$, для которой $t=0$ есть точка развѣтвленія μ-аго порядка, то для исходной функціи $f(w)$ значеніе $w=\infty$ есть также точка развѣтвленія μ-й кратности.

18. Итакъ, для функціи, разсмотрѣнной нами въ пунктѣ 4, значеніе $w = \infty$ есть точка развѣтвленія второй кратности, и въ ней соединяются 2 листа Римановой поверхности. Линію развѣтвленія мы проводили изъ точки $w = 0$ въ безконечность. Съ установленной нами теперь новой точки зрѣнія эта линія развѣтвленія соединяетъ двѣ точки развѣтвленія: $w = 0$ и $w = \infty$. Для другихъ функцій, имѣющихъ большее число точекъ развѣтвленія, какъ мы показали, линіи развѣтвленія часто можно проводить различными способами; но если мы теперь прослѣдимъ всѣ разобранные выше случаи, принимая во вниманіе и безконечно удаленныя точки развѣтвленія, то мы убѣдимся, что линія развѣтвленія всегда соединяетъ 2 точки развѣтвленія.

19. Теперь мы можемъ формулировать окончательно, въ чемъ заключается идея униформизаціи многозначной функціи.

Числовая плоскость или числовая сфера расчленяется на столько листовъ, сколько значеній имѣетъ функція; эти значенія, такъ сказать, распредѣляются между этими листами; въ точкахъ развѣтвленія листы скрѣпляются; именно, скрѣпляются тѣ листы, которымъ отнесены значенія, переходящія одно въ другое при обходѣ этой точки развѣтвленія. Точки развѣтвленія соединяются линіями развѣтвленія, по которымъ производятся разрѣзы; затѣмъ края этихъ разрѣзовъ скрѣпляются въ той послѣдовательности, которая соотвѣтствуетъ замѣщенію значеній при обходѣ точки развѣтвленія.

Здѣсь, естественно, возникаетъ вопросъ, всегда ли возможно такъ распредѣлить линіи развѣтвленія, чтобы достигнуть униформизаціи функціи. Это одинъ изъ труднѣйшихъ вопросовъ, рѣшеніе котораго привело къ развитію особой дисциплины, носящей въ настоящее время названіе „Analysis situs“.

20. Въ рубрикѣ 15-й мы уже выяснили, что форма линіи развѣтвленія никакого значенія не имѣетъ; важно только, между какими точками развѣтвленія она проходитъ. Нужно замѣтить, что между однѣми и тѣми же точками иногда проходятъ нѣсколько линій развѣтвленія; если, напримѣръ, черезъ двѣ точки развѣтвленія проходятъ четыре Римановыхъ листа, при чемъ въ обѣихъ точкахъ первый и второй листы скрѣплены между собой,

а третій и четвертый—между собой, то между этими точками проходятъ двѣ линіи развѣтвленія: по одной скрѣплены первые два листа, по второй вторые два. Эти двѣ линіи развѣтвленія могутъ проходить одна надъ другой; но онѣ могутъ быть проведены и независимо одна отъ другой.

Положимъ теперь, что для нѣкоторой функціи установлена соотвѣтствующая Риманова поверхность. Черезъ всѣ точки развѣтвленія проведемъ непрерывную замкнутую линію L. Всѣ линіи развѣтвленія сдвинемъ такъ, чтобы онѣ располагались вдоль этой линіи L. Теперь разрѣжемъ многосвязную поверхность по линіи L. Она распадется на куски, въ каждомъ изъ которыхъ никакихъ точекъ развѣтвленія уже не будетъ. Для значеній независимой перемѣнной w, лежащихъ въ каждой такой области, функція однозначно опредѣлена, и соотвѣтствующія значенія функціи образуютъ нѣкоторую область на плоскости z. Установить то раздѣленіе плоскости z, которое соотвѣтствуетъ частямъ нашей многолистной поверхности, получившимся послѣ разрѣза,—въ этомъ заключается главная задача при изученіи функціи на Римановыхъ поверхностяхъ. Этой задачей авторъ и занимается въ текстѣ по отношенію къ нѣкоторымъ замѣчательнымъ алгебраическимъ функціямъ.


MATHESIS



Книгоиздательство научныхъ и популярно-научныхъ сочиненій изъ области физико-математическихъ наукъ.

Одесса, Новосельская, 66.



Болѣе подробныя свѣдѣнія о нѣкоторыхъ изданіяхъ см. стр. 10—16.

ЧИСТАЯ и ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА.

АДЛЕРЪ, А. ТЕОРІЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ПОСТРОЕНІЙ Перев. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* XXVI+325 стр. 8⁰. Съ 179 рис. 1910. Ц. 2 р. 25 к.

Это качество... дѣлаетъ книгу единственной на русскомъ языкѣ въ данной отрасли геометріи. *Современный міръ.*

АППЕЛЛЬ, П. проф. и **ДОТЕВИЛЛЬ, С.** проф. КУРСЪ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ. Введеніе въ изученіе физики и прикладной механики. Пер. съ франц. I. Левинтова подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.*

Вып. I. (механика точки и геометрія массъ). XV+385 стр. 8⁰. Съ 136 черт. 1912. Ц. 2 р. 50 к.

Вып. II (механика системы) +380 стр. 8⁰ съ 87 черт. 1912. Ц. 2 р. 50 к.

Книга по содержащемуся въ ней матеріалу соотвѣтствуетъ университетскому курсу теоретической механики и представляетъ собой сокращенную переработку обширн. трехтомнаго трактата *П. Аппелля* по теоретич. механикѣ.

АРХИМЕДЪ, ГЮЙГЕНСЪ, ЛЕЖАНДРЪ, ЛАМБЕРТЪ. О КВАДРАТУРѢ КРУГА. Съ приложеніемъ исторіи вопроса, составлен. проф. **Ф Рудіо.** (*Библ. класс.*). Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. Бернштейна.* VIII+155 стр. 8⁰. Съ 21 черт. 1911. Ц. 1 р. 20 к.

БОЛЬЦАНО, Б. ПАРАДОКСЫ БЕЗКОНЕЧНАГО. (*Библ. класс.*). Перев. съ нѣм. подъ ред. проф. *И. В. Слешинскаго.* VIII+120 стр. 8⁰. Съ 12 черт. 1911. Ц. 80 к.

БОРЕЛЬ, Э. проф. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА. Въ обработкѣ проф. *В. Штёккеля.* Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ дополненіями прив.-доц. *В. Ф. Кагана.*

Ч. I. Ариѳметика и Алгебра. LXIV+434 стр. 8⁰. 1911. Ц. 3 р.

Ч. II. Геометрія. XXII+334 стр. 8⁰. Съ 403 черт. 1912. Ц. 2 р.

ВЕБЕРЪ, Г. проф. и **ВЕЛЬШТЕЙНЪ, I.** проф. ЭНЦИКЛОПЕДІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ. Руководство для преподающихъ и изучающихъ элементарную математику. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *В. Кагана.*

Томъ I. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА и АНАЛИЗЪ. * обраб. проф. *Веберомъ.* XXIV+666 стр. 8⁰. Съ 38 черт. *2-е изд.* 1911. Ц. 4 р.

Вы все время видите передъ собой мастера своего дѣла, который съ любовью показываетъ великія творенія человѣческой мысли, извѣстныя ему до тончайшихъ подробностей. *Педагогическій Сборникъ.*

---

* *Изданія, отмѣченныя звѣздочкой, признаны Учен. Ком. Мин. Нар. Просв. подлежащими внесенію въ списокъ книгъ, заслуживающихъ вниманія при пополненіи учен. библіотекъ средн. учебн. заведеній.*

Томъ II. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРІЯ, составленная *Веберомъ, Вельштейномъ и Якобсталемъ.*

Книга I. ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ. * Составилъ *І. Вельштейнъ.* XII+362 стр., больш. 8⁰. Съ 142 черт. и 5 рис. 1909. Ц. 3 р.

Особый интересъ представляетъ въ книгѣ г. Вельштейна своеобразное изложеніе не-евклидовой геометріи, а также изложеніе проективной геометріи. *Жур. Мин. Н. Пр.*

Книга II и III. ТРИГОНОМЕТРІЯ, АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ и СТЕРЕОМЕТРІЯ. Составили *Г. Веберъ и В. Якобсталь.* VIII+321 стр. больш. 8⁰. Съ 107 черт. 1910. Ц. 2 р. 50 к.

ГЕЙБЕРГЪ, І. проф. НОВОЕ СОЧИНЕНІЕ АРХИМЕДА *. Посланіе Архимеда къ Эратосѳену о нѣкоторыхъ вопросахъ механики. (*Библ. класс.*). Переводъ съ нѣм. подъ ред. и съ предисловіемъ прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* XV+27 стр. 8⁰. Съ 15 рис. 1909. Ц. 40 к.

Математикамъ... будетъ весьма интересно познакомиться съ новой драгоцѣнной научной находкой... *Образованіе.*

ДЕДЕКИНДЪ, Р. проф. НЕПРЕРЫВНОСТЬ и ИРРАЦІОНАЛЬНЫЯ ЧИСЛА *. (*Библ. класс.*). Пер. съ нѣм. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго,* съ присоед. его статьи: „Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ". *2-е изд.* 40 стр. 8⁰. 1909. Ц. 40 к.

Небольшой по объему, но, такъ сказать, законодательный по содержанію трудъ... *Русская Школа.*

ДЗІОБЕКЪ, О. проф. КУРСЪ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ примѣч. проф. СПБ. высшихъ женск. курсовъ *Вѣры Шиффъ.*

Часть I. Аналитическая геометрія на плоскости. VIII+390 стр. 8⁰. Съ 87 черт. 1912. Ц. 2 р. 50 к.

Часть II. Аналитическая геометрія въ пространствѣ. Печатается.

КАГАНЪ, В. прив.-доц. ЗАДАЧА ОБОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ ВЪ СОВРЕМЕННОЙ ПОСТАНОВКѢ. Рѣчь, произнесенная при защитѣ диссертаціи на степень магистра чистой математики. 35 стр. 8⁰. Съ 11 черт. 1908. Ц. 35 к.

КАГАНЪ, В. пр.-доц. ЧТО ТАКОЕ АЛГЕБРА? * 72 стр. 16⁰. 1910. Ц. 40 к.

Книжка написана яснымъ простымъ языкомъ и, несомнѣнно, вызоветъ къ себѣ интересъ. *Русская Мысль.*

КЛЕЙНЪ, Ф. проф. ВОПРОСЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ и ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ. Лекціи, читанныя для учителей. Пер. со нѣм. подъ ред. и съ дополн. прив.-доц. *В. Ф. Кагана.* XVI+486 стр. 8⁰. 1912. Ц. 3 р.

КОВАЛЕВСКІЙ, Г. проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ИСЧИСЛЕНІЕ БЕЗКОНЕЧНО-МАЛЫХЪ. * Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+140 стр. 8⁰. Съ 18 черт. 1909. Ц. 1 р.

Книга проф. Ковалевскаго, несомнѣнно, прекрасное введеніе въ высшій анализъ. *Русская Школа.*

КОВАЛЕВСКІЙ, Г. проф. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО и ИНТЕГРАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЙ. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+503 стр. 8⁰. 1911. Ц. 3 р. 50 к.

Курсъ профессора боннскаго университета, несомнѣнно, является однимъ изъ лучшихъ по ясности и чрезвычайной строгости обоснованія одного изъ могущественныхъ методовъ современнаго анализа. *Соврем. Міръ.*

КУТЮРА, Л. АЛГЕБРА ЛОГИКИ. Пер. съ франц. съ прибавленіями проф. *И. Слешинскаго.* IV+107+XIII стр. 8⁰. 1909. Ц. 90 к.

КЭДЖОРИ, Ф. проф. ИСТОРІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ (съ указаніями на методы преподаванія) *. Пер. съ англ. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* VIII+368 стр. 8⁰. Съ рис. 1910. Ц. 2 р. 50 к.

Книга читается съ большимъ интересомъ и весьма полезна... Мы настоятельно рекомендуемъ „Исторію элем. мат.“ Кэджори. *Вѣстн. Воспит.*

МАРКОВЪ, А. акад. ИСЧИСЛЕНІЕ КОНЕЧНЫХЪ РАЗНОСТЕЙ. Въ 2 частяхъ. Изданіе 2-е, исправленное и дополненное. VIII+274 стран. 8⁰. 1911. Ц. 2 р. 25 к.

НЕТТО, Е. проф. НАЧАЛА ТЕОРІИ ОПРЕДѢЛИТЕЛЕЙ. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+156 стр. 8⁰. 1912. Ц. 1 р. 20 к.

ПУАНКАРЕ, Г. проф. НАУКА и МЕТОДЪ. Пер. съ франц. *И. Брусиловскаго* подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.* VIII+384 стр. 16⁰. 1910. Ц. 1 р. 50 к.

... книгу Пуанкаре можно рекомендовать особому вниманію преподавателей математики и естествознанія. *Вѣстникъ Воспитанія.*

РОУ, С. ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ УПРАЖНЕНІЯ СЪ КУСКОМЪ БУМАГИ. Пер. съ англ. XVI+173 стр. 16⁰. Съ 87 рис. 1910. Ц. 90 к.

Производитъ впечатлѣніе гармоничнаго цѣлаго и читается съ большимъ интересомъ. *Русская Школа.*

РУССКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛІОГРАФІЯ. Вып. I. Списокъ сочиненій по чистой и прикл. математикѣ, напечатанныхъ въ Россіи въ 1908 г. Подъ ред. проф. *Д. М. Синцова.* 76 стр. 8⁰. 1911. Ц. 60 к.

Такой указатель чрезвычайно цѣненъ. *Природа и Люди.*

ЦИММЕРМАНЪ, В. проф. ОБЪЕМЪ ШАРА, ШАРОВОГО СЕГМЕНТА и ШАРОВОГО СЛОЯ. 34 стр. 16⁰. Съ 6 чер. 1908. Ц. 25 к.

Распространеніе подобнаго рода элементарныхъ монографій среди учащихся весьма желательно. *Русская Школа.*

ШУБЕРТЪ, Г. проф. МАТЕМАТИЧЕСКІЯ РАЗВЛЕЧЕНІЯ и ИГРЫ. Пер. съ нѣм. *I. Левинтова,* подъ ред., съ прим. и доб. „В. О. Ф. и Элем. Мат.“ XIV+358 стр. 16⁰. Со мног. табл. 1911. Ц. 1 р. 40 к.

ФИЗИКА.

АБРАГАМЪ, Г. проф. СБОРНИКЪ ЭЛЕМЕНТАРНЫХЪ ОПЫТОВЪ ПО ФИЗИКѢ. * Пер. съ франц. подъ ред. проф. *Б. П. Вейнберга.*

Часть I: XVI+272 стр. 8⁰. Свыше 300 рис. *2-е изд.* 1909. Ц. 1 р. 50 к.

Систематически составленный сводъ наиболѣе удачныхъ, типичныхъ и поучительныхъ опытовъ. *Вѣстникъ и Библіотека Самообразованія.*

Часть II: 434+LXXV стр. 8⁰. Свыше 400 рис. *2-е изд.* 1910 г. Ц. 2 р. 75 к.

Мы надѣемся, что разбираемый трудъ станетъ настольной книгой каждой физической лабораторіи въ Россіи. *Русская Мысль.*

АУЭРБАХЪ, Ф. проф. ЦАРИЦА МІРА и ЕЯ ТѢНЬ. * Общедоступное изложеніе основаній ученія объ **энергіи и энтропіи**. Пер. съ нѣм. VIII+50 стр. 8⁰. *5-е изданіе* 1911. Ц. 40 к.

Слѣдуетъ признать брошюру Ауэрбаха чрезвычайно интересной. *Ж. М. Н. Пр.*

БРАУНЪ, Ф. проф. МОИ РАБОТЫ ПО БЕЗПРОВОЛОЧНОЙ ТЕЛЕГРАФІИ и ПО ЭЛЕКТРООПТИКѢ. Рѣчь, произн. по случаю полученія Нобелевской преміи, съ дополнен. автора. Пер. съ рукописи *Л. Мандельштама* и *Н. Папалекси,* со вступительной статьей переводчиковъ. XXIV+92 стр. 16⁰. Съ 25 рис. и портр. авт. 1911. Ц. 70 к.

БРУНИ, К. проф. ТВЕРДЫЕ РАСТВОРЫ *. Пер. съ итал. подъ ред. „*Вѣстн. Оп. Физ. и Элем. Мат.*“ 37 стр. 16⁰. 1909. Ц. 25 к.

ВЕТГЭМЪ, В. проф. СОВРЕМЕННОЕ РАЗВИТІЕ ФИЗИКИ *. Пер. съ англ. подъ ред. проф. *Б. П. Вейнберга* и прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* Съ прилож. рѣчи *А. Бальфура.* НѢСКОЛЬКО МЫСЛЕЙ О НОВОЙ ТЕОРІИ ВЕЩЕСТВА. VIII+277 стр. 8⁰. Съ 5 порт. и 39 рис. *2-е изд.* 1912. Ц. 2 р.

... рисуетъ читателю дѣйствительно захватывающую картину грандіозныхъ завоеваній человѣческаго генія. *Современный Міръ.*

ВЕЙНБЕРГЪ, Б. П. проф. СНѢГЪ, ИНЕЙ, ГРАДЪ, ЛЕДЪ и ЛЕДНИКИ *. IV+127 стр. 8⁰. Съ 137 рис. и 2 фототип. табл. 1909. Ц. 1 р.

„Mathesis“ можетъ гордиться этимъ изданіемъ. *Ж. М. Н. Пр.*

ВИНЕРЪ, О. проф. О ЦВѢТНОЙ ФОТОГРАФІИ и РОДСТВЕННЫХЪ ЕЙ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫХЪ ВОПРОСАХЪ *. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина.* VI+69 стр. 8⁰. Съ 3 цвѣт. табл. 1911. Ц. 60 к.

Авторъ этой книги — одинъ изъ наиболѣе выдающихся германскихъ физиковъ *Ж. М. Н. Пр.*

ГЕРНЕТЪ, В. А. ОБЪ ЕДИНСТВѢ ВЕЩЕСТВА. 46 стр, 16⁰. Ц. 25 к.

ЗЕЕМАНЪ, П. проф. ПРОИСХОЖДЕНІЕ ЦВѢТОВЪ СПЕКТРА. Съ прилож. статьи *В. Ритца* „Линейные спектры и строеніе атомовъ“. Пер. съ нѣм. 50 стр. 16⁰. 1910. Ц. 30 к.

Небольшая книжка, принадлежащая перу одного изъ извѣстныхъ ученыхъ нашей эпохи. *Русская Мысль.*

КАЙЗЕРЪ, Г. проф. РАЗВИТІЕ СОВРЕМЕННОЙ СПЕКТРОСКОПІИ *. Пер. съ нѣм. подъ ред. „*Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.*“. 45 стр. 16⁰. 1910. Ц. 25 к.

Одинъ изъ лучшихъ обзоровъ... Онъ содержитъ, въ сжатомъ видѣ, исторію открытія спектральнаго анализа и дальнѣйшаго ея развитія до нашихъ дней. *Ж. М. Н. Пр.*

КЛОССОВСКІЙ, А. проф. ОСНОВЫ МЕТЕОРОЛОГІИ *. XVI+527 стр. больш. 8⁰. Съ 199 рис., 2 цвѣтн. и 3 черн. табл. 1910. Ц. 4 р.

Честь и слава „Mathesis“ за изданіе этой прекрасной книги, которою можетъ гордиться русская наука. *Ж. М. Н. Пр.*

КЛОССОВСКІЙ, А. проф. ФИЗИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ НАШЕЙ ПЛАНЕТЫ НА ОСНОВАНІИ СОВРЕМЕННЫХЪ ВОЗЗРѢНІЙ. * 46 стр. 8⁰. 2-е изданіе, испр. и дополн. 1908. Ц. 40 к.

Рѣдко можно встрѣтить изложеніе, въ которомъ въ такой степени соединялась бы высокая научная эрудиція съ картинностью и увлекательностью рѣчи. *Педагогическій Сборникъ.*

КОНЪ, Э. проф. и **ПУАНКАРЕ, Г.** акад. ПРОСТРАНСТВО и ВРЕМЯ СЪ ТОЧКИ ЗРѢНІЯ ФИЗИКИ. Пер. подъ ред. „*Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.*“. 81 стр. 16⁰. Съ 11 рис. 1912. Ц. 40 к.

ЛАКУРЪ, П. и **АППЕЛЬ, Я.** ИСТОРИЧЕСКАЯ ФИЗИКА. * Пер. съ нѣм. подъ ред. „*Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.*“. Въ 2-хъ томахъ больш. формата 892 стр. Съ 799 рисунк. и 6 отд. цвѣтн. табл. 1908. Ц. 7 р. 50 к.

Нельзя не привѣтствовать этого интереснаго изданія... Книга читается легко; содержитъ весьма удачно подобранный матеріалъ и обильно снабжена хорошо выполненными рисунками. Переводъ никакихъ замѣчаній не вызываетъ. *Ж. М. Н. Пр.*

ЛЕМАНЪ, О. проф. ЖИДКІЕ КРИСТАЛЛЫ и ТЕОРІИ ЖИЗНИ. Пер. съ нѣм. *П. В. Казанецкаго.* VIII+43 стр. 8⁰. Съ 30 рис. 1908. Ц. 40 к.

... весьма кстати является краткая сводка главныхъ фактовъ, сдѣланная проф. Леманомъ. *Педагогическій Сборникъ.*

ЛИНДЕМАНЪ, Ф. проф. СПЕКТРЪ и ФОРМА АТОМОВЪ. Рѣчь ректора Мюнхенскаго университета. 23 стр. 16⁰. *2-е изд.* 1909. Ц. 15 к.

ЛОДЖЪ, О. проф. МІРОВОЙ ЭѲИРЪ. Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *Д. Д. Хмырова.* VI+216 стр. 16⁰. Съ 19 рис. 1911. Ц. 80 к.

Въ лицѣ Лоджа мы имѣемъ выдающагося и ревностнаго сторонника идеи всеобъемлющаго значенія эѳира для вселенной.
Русское Богатство.

ЛОРЕНЦЪ, Г. проф. КУРСЪ ФИЗИКИ *. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина.* Съ добавленіями автора къ русскому изданію.

Т. I. VIII+356 стр. больш. 8⁰. Съ 236 рис. *2-е изд.* 1912. Ц. 2 р. 75 к.

Т. II. VIII+466 стр. больш. 8⁰. Съ 257 рис. 1910. Ц. 3 р. 75 к.

Съ появленіемъ этого перевода русская литература обогатилась превосходнымъ курсомъ физики. *Ж. М. Н. Пр.*

МАЙКЕЛЬСОНЪ, А. проф. СВѢТОВЫЯ ВОЛНЫ и ИХЪ ПРИМѢНЕНІЯ. Перевела съ англ. *В. О. Хвольсонъ* подъ ред. заслуж. проф. *О. Д. Хвольсона* съ дополн. статьями и примѣч. редактора. VIII+189 стр. Съ 109 рис. и 3 цвѣтн. табл. 1912. Ц. 1 р. 50 к.

МОРЕНЪ, Ш. ФИЗИЧЕСКІЯ СОСТОЯНІЯ ВЕЩЕСТВА. Пер. съ франц. подъ ред. проф. *Л. В. Писаржевскаго.* XIII+224 стр. 8⁰. Съ 21 рис. 1912. Ц. 1 р. 40 к.

ПЕРРИ, ДЖ. проф. ВРАЩАЮЩІЙСЯ ВОЛЧОКЪ *. Публ. лекція. Съ добавл. статьи проф. *Б. Доната.* „Волчокъ и его будущее въ техникѣ". Пер. съ англ. и нѣмецк. VIII+116 стр. 8⁰. Съ 73 рис. *3-е изданіе.* 1912. Ц. 60 к.

Книжка, воочію показывающая, какъ люди истиннаго знанія, не цеховой только науки, умѣютъ распоряжаться научнымъ матеріаломъ при его популяризаціи. *Русская Мысль.*

ПЛАНКЪ, М. проф. ОТНОШЕНІЕ НОВѢЙШЕЙ ФИЗИКИ КЪ МЕХАНИСТИЧЕСКОМУ МІРОВОЗЗРѢНІЮ. Пер. съ нѣм. *І. Левинтова,* подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат."* 42 стр. 16⁰. 1911. Ц. 25 к

РАМЗАЙ, В проф. БЛАГОРОДНЫЕ и РАДІОАКТИВЫЕ ГАЗЫ Пер. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат."*. 37 стр. 16⁰. Съ 16 рис 1909. Ц. 25 к.

РИГИ, А. проф. СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРІЯ ФИЗИЧЕСКИХЪ ЯВЛЕНІЙ. * (Радіоактивность, іоны, электроны). Переводъ съ 3 итальянскаго изданія. VIII+146 стр. 8⁰. Съ 21 рис. *2-е изд.* 1910. Ц. 90 к.

Книгу Риги можно смѣло рекомендовать образованному читателю, какъ лучшее имѣющееся у насъ изложеніе новѣйшихъ взглядовъ на обширную область физическихъ явленій. *Педагогическій Сборникъ.*

РИГИ, А. проф. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРИРОДА МАТЕРІИ. * Вступительная лекція. Пер. съ итальян. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат."*. 27 стр. 8⁰. *2-е изд.* 1911. Ц. 30 к.

Эта прекрасная рѣчь обладаетъ всѣми преимуществами многочисленныхъ популярныхъ сочиненій знаменитаго профессора Болоньскаго университета. *Ж. М. Н. Пр.*

СЛАБИ, А. проф. БЕЗПРОВОЛОЧНЫЙ ТЕЛЕФОНЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат."*. 28 стр. 8⁰. Съ 28 рис. 1909. Ц. 30 к.

СЛАБИ, А. проф. РЕЗОНАНСЪ и ЗАТУХАНІЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХЪ ВОЛНЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“*. 41 стр. 8⁰. Съ 36 рис. Ц. 40 к.

Обѣ брошюры принадлежатъ перу большого знатока предмета и выдающагося самостоятельнаго работника въ области практическаго примѣненія электрическихъ волнъ. *Педагогическій Сборникъ.*

СОДДИ, Ф. проф. РАДІЙ и ЕГО РАЗГАДКА.* Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *Д. Хмырова.* XVI+185 стр. 8⁰. Съ 31 рис. 1910. Ц. 1 р. 25 к.

... авторъ въ увлекательномъ изложеніи вводитъ читателя въ необыкновенно заманчивую область... *Педагогическій Сборникъ.*

ТОМСОНЪ, Дж. Дж. проф. КОРПУСКУЛЯРНАЯ ТЕОРІЯ ВЕЩЕСТВА. Пер. съ англ. *І. Левинтова*, подъ ред. *„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“*. VIII+162 стр. 8⁰. Съ 29 рис. 1910. Ц. 1 р. 20 к.

ТОМПСОНЪ, СИЛЬВАНУСЪ, проф. ДОБЫВАНІЕ СВѢТА. * Общедоступная лекція для рабочихъ, прочитанная на собраніи Британской Ассоціаціи 1906. Пер. съ англ. VIII+88 стр. 16⁰. Съ 28 рис. 1909. Ц. 50 к.

Въ этой весьма интересно составленной рѣчи собранъ богатый матеріалъ по вопросу добыванія свѣта. *Жур. Мин. Н. Пр.*

УСПѢХИ ФИЗИКИ. Сборникъ статей подъ ред. *„Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“*.

Выпускъ I. * VIII+148 стр. 8⁰. Съ 41 рис. и 2 таб. *3-е изд.* 1909. Ц. 75 к.

Изящно изданный и недорогой сборникъ прочтется каждымъ интересующимся съ большимъ интересомъ. *Вѣстникъ Знанія.*

Выпускъ II. IV+204 стр. 8⁰. Съ 50 рис. 1911. Ц. 1 р. 20 к.

ХИМІЯ.

МАМЛОКЪ, Л. д-ръ. СТЕРЕОХИМІЯ. (Ученіе о пространственномъ расположеніи атомовъ въ молекулѣ). Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* VIII+164 стр. 8⁰. Съ 58 рис. 1911. Ц. 1 р. 20 к.

Стереохимія Л. Мамлока написана очень общедоступно. *Природа и Люди.*

РАМЗАЙ, В. проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ИЗУЧЕНІЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ХИМІИ. Пер. съ англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* VIII+75 стр. 16⁰. 1910. Ц. 40 к.

Главный интересъ обзора конечно въ томъ, что онъ сдѣланъ крупнымъ самостоятельнымъ изслѣдователемъ въ этой области. *Пед. Сборн.*

СМИТЪ, А. проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ НЕОРГАНИЧЕСКУЮ ХИМІЮ. Пер. съ англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* XVI+840 стр. 8⁰. Съ 107 рис. 1911. Ц. 3 р. 50 к.

Такіе первоклассные ученые, какъ Лёбъ, Оствальдъ и др. признали, что „Введеніе въ неорганическую химію“ Смита обогащаетъ учебную литературу и въ ряду многочисленныхъ руководствъ по химіи должно занять особое, значительное мѣсто. *Рѣчь.*

ШЕЙДЪ, К. ХИМИЧЕСКІЕ ОПЫТЫ ДЛЯ ЮНОШЕСТВА. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *Е. С. Ельчанинова.* IV+191 стр. 8⁰. Съ 79 рис. 1907. Ц. 1 р. 20 к.

ШТОКЪ, А. проф. и **ШТЕЛЛЕРЪ,** прив.-доц. ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО ПО КОЛИЧЕСТВЕННОМУ АНАЛИЗУ. Пер. съ нѣм. лабор. Новор. Унив. *А. Коншина* подъ ред. проф. *П. Г. Меликоеа.* Пер. съ нѣм. VIII+173 стр. 8⁰. Съ 37 рис. 1911. Ц. 1 р. 20 к.

... Книга заключаетъ въ себѣ рядъ удачно подобранныхъ и превосходно описанныхъ работъ по объемному вѣсовому анализу. *Рѣчь.*

АСТРОНОМІЯ.

АРРЕНІУСЪ, Св. проф. ОБРАЗОВАНІЕ МІРОВЪ*. Перев. съ нѣм. подъ ред. проф. *К. Д. Покровскаго.* VIII+200 стр. 8⁰. Съ 60 рис. *2-е изд.* 1912. Ц. 1 р. 75 к.

Книга чрезвычайно интересна и богата содержаніемъ. *Пед. Сборн.*

АРРЕНІУСЪ, СВ. проф. ФИЗИКА НЕБА*. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* VIII+250 стр. 8⁰. Съ 68 рис., 1 черн. и 1 спектр. табл. 1905. *Изданіе распродано.*

Научность содержанія, ясность и простота изложенія и превосходный переводъ соперничаютъ другъ съ другомъ. *Русская Мысль.*

БОЛЛЪ, Р. проф. ВѢКА и ПРИЛИВЫ. Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* IV+104 стр. 8⁰. Съ 4 рис. и 1 тб. 1909. Ц. 75 к.

... настоящее изданіе „Mathesis" слѣдуетъ привѣтствовать наравнѣ съ прочими, какъ почтенный, заслуживающій распространенія и серьезнаго вниманія, вкладъ въ русскую науку. *Русская Школа.*

ВИХЕРТЪ, Э. проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ГЕОДЕЗІЮ*. Перев. съ нѣм. IV+95 стр. 16⁰. Съ 41 рис. *2-е изд.* 1912. Ц. 35 к.

Излагаетъ основы низшей геодезіи, имѣя въ виду пользованіе ею въ школѣ въ качествѣ практическаго пособія... Изложеніе очень сжато, но полно и послѣдовательно. *Вопросы Физики.*

ГРАФФЪ, К. КОМЕТА ГАЛЛЕЯ*. Пер. съ нѣм. X+71 стр. 16⁰. Съ 13 рис. и 2 отд. табл. Изд. второе испр. и дополн. 1910. Ц. 30 к.

Брошюра Граффа хорошо выполняетъ свое назначеніе. *Пед. Сборн.*

ГАЛЕЕВА КОМЕТА ВЪ 1910 ГОДУ. *Общедоступное изданіе.* Содержаніе: О вселенной — О кометахъ — О кометѣ Галлея. 32 стр. 8⁰. Съ 12 иллюстраціями. 1910. Ц. 12 к.

ЛОВЕЛЛЪ, П. проф. МАРСЪ и ЖИЗНЬ НА НЕМЪ. Пер. съ англ. подъ ред. и съ пред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* XXI+272 стр. 8⁰. Со многими рис. и 1 цвѣтн. табл. 1912. Ц. 2 р.

НЬЮКОМЪ, С. проф. АСТРОНОМІЯ ДЛЯ ВСѢХЪ*. Пер. съ англ. подъ ред. и съ предисл. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* XX+288 стр. 8⁰. Съ порт. автора, 64 рис. и 1 табл. *2-е изд.* 1911. Ц. 1 р. 50 к.

Вполнѣ научно, и совершенно доступно, и изящно написанная книга... переведена и издана очень хорошо. *Вѣстникъ Воспитанія.*

НЬЮКОМЪ, С. проф. ТЕОРІЯ ДВИЖЕНІЯ ЛУНЫ. (Исторія и современное состояніе этого вопроса). 26 стр. 16⁰. *Изд. распродано.* Ц. 20 к.

ФУРНЬЕ ДАЛЬБЪ. ДВА НОВЫХЪ МІРА. 1. Инфра-міръ. 2. Супраміръ. Пер. съ англ. VIII+119 стр. 8⁰. Съ 1 рис. и 1 табл. 1911. Ц. 80 к.

Нельзя отказать французскому ученому въ смѣлости и своеобразной красотѣ выводовъ изъ сухихъ цифровыхъ данныхъ положительнаго знанія. *Электричество и Жизнь.*

БІОЛОГІЯ.

ВЕРИГО, Б. проф. ЕДИНСТВО ЖИЗНЕННЫХЪ ЯВЛЕНІЙ. (*Основы общей біологіи 1.).* VIII+276 стр. 8⁰. Съ 81 рис. 1912. Ц. 2 р.

ЛЁБЪ, Ж. проф. ДИНАМИКА ЖИВОГО ВЕЩЕСТВА. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+353 стр. 8⁰. Съ 64 рис. 1910. Ц. 2 р. 50 к.

Классическая книга Лёба, отъ чтенія которой трудно оторваться, устанавливаетъ вѣхи достигнутаго въ познаніи динамики живого вещества. *Русское Богатство.*

ЛЁБЪ, Ж. проф. ЖИЗНЬ. Пер. съ нѣм. 30 стр. 8⁰. 1912. Ц. 30 к.

УШИНСКІЙ, Н. проф. ЛЕКЦІИ ПО БАКТЕРІОЛОГІИ. VIII+135 стр. 8⁰. Съ 34 черн. и цвѣтн. рис. на 15 отдѣльн. табл. 1908. Ц. 1 р. 50 к.

VARIA.

ГАМПСОНЪ-ШЕФЕРЪ. ПАРАДОКСЫ ПРИРОДЫ *. Книга для юношества, объясняющая явленія, которыя находятся въ противорѣчіи съ повседневнымъ опытомъ. Пер. съ нѣм. VIII+193 стр. 8⁰. Съ 64 рис. и 3 табл. 1910. Ц. 1 р. 20 к.

Матеріалъ подобранъ интересный. *Ж. М. Н. Пр.*

ГАССЕРТЪ, К. проф. ИЗСЛѢДОВАНІЕ ПОЛЯРНЫХЪ СТРАНЪ. * Исторія путешествій къ сѣверному и южному полюсамъ съ древнѣйшихъ временъ до настоящаго времени. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ дополн. проф. *Г. И. Танфильева.* XII+215 стр. 8⁰. Съ двумя цвѣтн. картами. 1912. Ц. 1 р. 50 к.

Книга заслуживаетъ самаго широкаго распространенія. *Естествознаніе и Географія.*

ГРОТЪ, П. проф. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ХИМИЧЕСКУЮ КРИСТАЛЛОГРАФІЮ Перев. съ нѣм. І. Левинтова подъ ред. проф. *М. Д. Сидоренко.* VIII+104 стр. 8⁰ Съ 6 черт. 1912. Ц. 80 к.

НИМФЮРЪ, Р. ВОЗДУХОПЛАВАНІЕ *. Научныя основы и техническое развитіе. Пер. съ нѣм. VIII+161 стр. 8⁰. Съ 52 рис. 1910. Ц. 90 к.

Въ книгѣ собранъ весьма обширный описательный матеріалъ. *Ж. М. Н. Пр.*

СНАЙДЕРЪ, К. проф. КАРТИНА МІРА ВЪ СВѢТѢ СОВРЕМЕННАГО ЕСТЕСТВОЗНАНІЯ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+193 стр. 8⁰. Съ 16 отд. порт. 1909. Ц. 1 р. 50 к.

Книга касается интереснѣйшихъ вопросовъ о природѣ. *Пед. Сборн.*

ТРОМГОЛЬТЪ, С. ИГРЫ СО СПИЧКАМИ. Задачи и развлеченія. Пер. съ нѣм. 146 стр. 16⁰. Свыше 250 рис. и черт. *2-е изд.* 1912. Ц. 50 к.

ШМИДЪ, Б. проф. ФИЛОСОФСКАЯ ХРЕСТОМАТІЯ.* Пер. съ нѣм. *Ю. Говсѣева,* подъ ред. и съ пред. проф. *Н. Н. Ланге.* VIII + 172 стр. 8⁰. 1907. Ц. 1 р.

... Для человѣка, занятаго самообразованіемъ и немного знакомаго съ философіей и наукой, она (книга) дастъ разнообразный и интересный матеріалъ. *Вопросы философіи и психологіи.*

Имѣются на складѣ:

БИЛЬТЦЪ, Г. и В. УПРАЖНЕНІЯ ПО НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМІИ. Пер. съ нѣм. *А. Комаровскаго,* съ пред. проф. *Л. В. Писаржевскаго.* XVI+272 стр. 8⁰ Съ 24 рис. Ц. 1 р. 60 к.

Книга Biltz'a способна вызвать самое горячее увлеченіе химіей. *W. Ostwald. Zeitschrift für Physikalische Chemie.*

МУЛЬТОНЪ, Ф. проф. ЭВОЛЮЦІЯ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ. Пер. съ англійск. VI+83 стр. 16⁰. Съ 12 рис. 1908. Ц. 50 к.

Изложеніе гипотезы образованія солнечной системы изъ спиральной туманности съ попутной критикой космогонической теоріи Лапласа.

Выписывающіе изъ главнаго склада изданій „Матезисъ“ (Одесса, Новосельская, 66) на сумму 5 руб. и болѣе за пересылку не платятъ.

Подробный каталогъ высылается по требованію безплатно.

Печатаются и готовятся къ печати:

АНДУАЙЕ, проф. КУРСЪ АСТРОНОМІИ. Пер. съ франц.

БАХМАНЪ, проф. ОСНОВЫ НОВѢЙШЕЙ ТЕОРІИ ЧИСЕЛЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. О Шатуновскаго.*

ВЕРИГО, Б. Ф. проф. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ БІОЛОГИИ. II. „Біологія клѣтки и ея значеніе для общей біологіи“.

ДАННЕМАННЪ, Ф. проф. КРАТКАЯ ИСТОРІЯ ЕСТЕСТВОЗНАНІЯ. Пер. съ нѣмецкаго подъ ред. проф. С.-П.-Б. унив. *И. И. Боргмана.*

ДЗІОБЕКЪ, О. проф. КУРСЪ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ. *Часть 2-я.* Аналитическая геометрія въ пространствѣ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. С.-П-Б. высш. жен. курсовъ *В. І. Шиффъ.*

КЛАРКЪ, А. ИСТОРІЯ АСТРОНОМІИ XIX СТОЛѢТІЯ. Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. С.-П.-Б. универ. *В. Серафимова.*

КОЛЬРАУШЪ, Ф. проф. КРАТКОЕ РУКОВОДСТВО КЪ ПРАКТИЧЕСКИМЪ ЗАНЯТІЯМЪ ПО ФИЗИКѢ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина.*

КОРБИНЪ, Т. СОВРЕМЕННЫЯ УСПѢХИ ТЕХНИКИ. Пер. съ англ.

ЛАДЕНБУРГЪ, А. проф. ЛЕКЦІИ ПО ИСТОРІИ ХИМІИ ОТЪ ЛАВУАЗЬЕ ДО НАШИХЪ ДНЕЙ. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *Е. С. Ельчанинова.*

ЛЕВИ. МАТЕМАТИКА СТРАХОВАНІЙ. Пер. съ нѣмецкаго.

ЦЕНТНЕРШВЕРЪ, М. ОЧЕРКИ ИСТОРІИ ХИМІИ.

МИ, Г. проф. КУРСЪ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА и МАГНЕТИЗМА Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *О. Д. Хвольсона.*

ПЁШЛЬ. ВВЕДЕНІЕ ВЪ ХИМІЮ КОЛЛОИДОВЪ. Пер. съ нѣм. *Л. С. Комаровскаго и Я. П. Мосешвили.*

ПОЙНТИНГЪ, Дж. проф. СВѢТОВОЕ ДАВЛЕНІЕ. Пер. съ англ.

САКСЛЬ и РУДИНГЕРЪ. БІОЛОГІЯ ЧЕЛОВѢКА. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *Л. А. Тарасевича.*

РУССКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛІОГРАФІЯ. Вып. II. За 1909 г. Подъ ред. проф. *Д. М. Синцова.*

ЧЕЗАРО, Э. проф. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ УЧЕБНИКЪ АЛГЕБРАИЧЕСКАГО АНАЛИЗА и ИСЧИСЛЕНІЯ БЕЗКОНЕЧНОМАЛЫХЪ. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. С.-П.-Б. унив. *К. А. Поссе.*

ШТОЛЬЦЪ и ГМЕЙНЕРЪ. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ АРИѲМЕТИКА. Пер. съ нѣмецкаго.

ШУЛЬЦЕ, д-ръ ВЕЛИКІЕ ФИЗИКИ и ИХЪ ТВОРЕНІЯ. Пер. съ нѣмецкаго.

ФИЛИППОВЪ, А. ЧЕТЫРЕ АРИѲМЕТИЧЕСКІЯ ДѢЙСТВІЯ.

ЩУКАРЕВЪ, А. проф. ПРОБЛЕМЫ ТЕОРІИ ПОЗНАНІЯ ВЪ ОБЛАСТИ ЕСТЕСТВОЗНАНІЯ.

ЮНГЪ, проф. ОСНОВНЫЯ ПОНЯТІЯ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРІИ. Пер. съ англійскаго.

Прив.-доц. А. АДЛЕРЪ

ТЕОРІЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ПОСТРОЕНІЙ

Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей и съ примѣчаніѣми прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* XXVI + 325 стр. 8⁰. Съ 179 рис. 1910 г. Цѣна 2 руб. 25 коп.

Содержаніе: Предисловіе автора. Предисловіе редактора. Введеніе редактора. Историческія замѣчанія. I Методы рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе. II. Построенія, выполняемыя съ помощью проведенія лишь прямыхъ линій при пользованіи данными фигурами (Щтейнеровы построенія). III. Построенія, выполняемыя помощью описыванія окружностей (Маскероніевы построенія) IV. Построенія съ помощью линейки о двухъ параллельныхъ краяхъ (двѣ параллельныя прямыя на постоянномъ разстояніи); построенія съ помощью подвижного прямого угла; построенія съ помощью произвольнаго подвижного угла; построенія съ помощью линейки и эталона длины; построенія съ помощью биссектора. V. Задачи на построеніе первой и второй степени. VI. Доказательства невозможности. VII. Дѣленіе окружности (Построеніе правильныхъ многоугольниковъ). VIII. Геометрическія построенія третьей и четвертой степени. IX. Историческія замѣчанія относительно квадратуры круга; приближенное выпрямленіе окружности; правила для возможно болѣе точнаго построенія. X. Геометрографія.

ИЗЪ ОТЗЫВОВЪ. „Предлагаемая вниманію читателей книга А. Адлера представляетъ крупнѣйшій интересъ во многихъ отношеніяхъ... Она имѣетъ цѣлью не столько изложеніе различныхъ частныхъ пріемовъ рѣшенія конструктивныхъ задачъ, сколько систематическое изложеніе общихъ методовъ рѣшенія задачъ на построеніе при помощи тѣхъ или иныхъ чертежныхъ приборовъ и, въ особенности, установленіе критеріевъ разрѣшимости или неразрѣшимости данной задачи при помощи этихъ приборовъ. Этотъ послѣдній вопросъ, представляющій величайшій теоретическій и практическій интересъ, въ настоящее время является вполнѣ рѣшеннымъ для наиболѣе употребительныхъ приборовъ, какъ циркуль, линейка, и т. д... Совмѣстнымъ усиліемъ алгебры и геометріи удалось постепенно создать теорію геометрическихъ построеній, которая по существу завершена въ настоящее время, являясь однимъ изъ наиболѣе блестящихъ завоеваній математическаго генія... Если прибавить обиліе интересныхъ задачъ для самостоятельнаго упражненія, то нельзя не признать, что сочиненіе Адлера является въ высокой степени цѣннымъ вкладомъ въ элементарную геометрическую литературу. Отдѣльныя главы этой книги могутъ быть использованы преподавателями средней школы во время общаго изученія геометріи, что, несомнѣнно, будетъ содѣйствовать оживленію интереса къ этой наукѣ... Въ заключеніе отмѣчу весьма интересное введеніе и примѣчанія редактора перевода прив. доц. С. Шатуновскаго еще болѣе увеличивающія цѣнность этой прекрасной во всѣхъ отношеніяхъ книги“. Прив.-доцентъ С. Бернштейнъ (*Педагогическій Сборникъ*).

„Надо признать, что ни въ одномъ изъ трудовъ, посвященныхъ тому же предмету, вопросъ о геометрическихъ построеніяхъ не разсматривается при полной доступности изложенія съ такой широтой, какъ въ данной книгѣ... Для большинства лицъ, интересующихся геометрическимъ построеніемъ, наиболѣе удобнымъ пособіемъ для обозрѣнія и изученія всего того, что сдѣлано въ этой области съ самыхъ отдаленныхъ временъ до нашихъ дней, будетъ разсматриваемое сочиненіе... Надо пожелать, чтобы переводъ сочиненія Адлера получилъ у насъ такое же распространеніе, какъ его оригиналъ заграницей“. А. К. (*Рѣчь*, 28 марта 1911 года).

„Геометрическіе вопросы, связанные съ геометрическими построеніями, изложены въ этой книгѣ съ достаточной полнотой. Это качество въ связи съ разнообразіемъ примѣровъ и задачъ дѣлаетъ книгу единственной на русскомъ языкѣ въ данной отрасли геометріи“ Л. Б. (*Современный Міръ*, мартъ 1911 г.).

„До сихъ поръ у насъ почти не было руководствъ, приводящихъ въ систему разнообразные методы рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе. Новое изданіе „Mathesis“ удачно восполняетъ этотъ пробѣлъ... Книга Адлера не предполагаетъ въ читателѣ никакихъ познаній изъ высшей математики и вполнѣ доступна для всякаго, прошедшаго курсъ элементарной математики. Многочисленныя задачи для упражненія еще болѣе повышаютъ цѣнность этого прекраснаго руководства“. I. (*Природа и Люди*, № 10 1911 г.).

Проф. Э. Борель.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Въ обработкѣ проф. В. ШТЕККЕЛЯ.

Часть I. АРИѲМЕТИКА и АЛГЕБРА.

Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей прив.-доц. В. Ф. Кагана и съ приложеніемъ его статьи. LXIV+434 стр. 8^0. 1911 г. Ц. 3 р.

Содержаніе: В. КАГАНЪ. „О реформѣ преподаванія математики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Германіи и Франціи“.

Ариѳметика. Десятичное счисленіе. Сложеніе и вычитаніе. Умноженіе цѣлыхъ чиселъ. Дѣленіе. Дѣлимость. Общій наибольшій дѣлитель и общее наименьшее кратное. Простыя числа. Обыкновенныя дроби. Десятичныя дроби, приближенныя частныя. Квадраты. Квадраткый корень. Алгебра. Употребленіе буквъ; алгебраическія выраженія. Положительныя и отрицательныя числа. Примѣненіе положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ; равномѣрное движеніе. Начальныя основанія алгебраическаго счисленія. Уравненія и неравенства первой степени. Задачи первой степени. Изслѣдованіе двучлена первой степени; графическое изображеніе. Уравненія второй степени. Задачи второй степени. Изслѣдованіе и графическое изображеніе хода измѣненій гомографической функціи. Ряды и логариѳмы. Сложные проценты. Таблицы. Логариѳмы съ четырьмя десятичными знаками. Антилогариѳмы съ четырьмя десятичными знаками.

ИЗЪ ОТЗЫВОВЪ: „Вопросъ о реформѣ преподаванія математики въ русской средней школѣ для своего разрѣшеніи въ благопріятномъ смыслѣ требуетъ, конечно, не однихъ лишь измѣненій въ учебныхъ планахъ, какъ ни полезны были бы эти измѣненія, пока еще не осуществленныя. Чрезвычайно важно показать, какъ реформу можно провести практически, какъ слѣдуетъ въ соотвѣтствіи съ новыми взглядами вести преподаваніе въ томъ или другомъ опредѣленномъ отдѣлѣ курса, Насколько трудно написать учебникъ, соотвѣтствующій современному уровню педагогическихъ требованій, видно изъ того, что въ Германіи, такъ много сдѣлавшей для выясненія значенія реформы и во многихъ учебныхъ заведеніяхъ ее уже осуществившей, до сихъ поръ нѣтъ руководства, которое въ такой мѣрѣ отвѣчало бы запросамъ школы, какъ разбираемый нами теперь [въ переработкѣ Штеккеля] курсъ французскаго профессора Бореля. Учителя математики и всѣ интересующіеся преподаваніемъ этого предмета найдутъ въ книгѣ въ вступительныхъ статьяхъ всѣ необходимыя для преподавателя указанія ея особенностей и нѣкоторыхъ недочетовъ. Появленіе перевода можно только привѣтствовать: изъ него познакомятся съ многимъ не только друзья, но и противники реформы“. А. К. (*Рѣчь*, 28 марта 1911 г.).

Часть II. ГЕОМЕТРІЯ.

Переводъ съ нѣмецкаго подъ редакціей прив.-доц. В. Кагана, XXIII+334 стр. 8^0. Съ 403 черт. 1912 г. Ц. 2 р.

Содержаніе: Какъ и I часть, книга представляетъ руководство по геометріи въ духѣ реформы, которая проводится въ настоящее время въ Германіи и Франціи. Сущность и задачи реформы выяснены авторомъ во вступительной статьѣ къ I части книги. Характерная особенность построенія геометріи у Бореля заключается въ томъ, что все изложеніе проникнуто идеей свести геометрію къ группѣ движеній. Книга распадается на слѣдующія части: I Введеніе содержитъ краткій предварительный обзоръ основныхъ геометрическихъ образованій. II. Прямая и окружность. III. Плоскость и круглыя тѣла. IV. Подобіе. V. Измѣреніе площадей и объемовъ. Дополненія: сюда отнесены элементы ученія о коническихъ сѣченіяхъ.

Проф. Ф. КЭДЖОРИ.

ИСТОРІЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

съ указаніемъ на методы преподаванія

ПЕРЕВОДЪ СЪ АНГЛІЙСКАГО

ПОДЪ РЕД., СЪ ПРИМѢЧ. И ПРИБАВЛ. ПРИВ.-ДОЦ. С. Ю. Тимченко.

VIII+368 стр. 8°. Съ рис. 1910 г. Ц. 2 р. 50 к.

СОДЕРЖАНІЕ:

Древній періодъ. *Системы счисленія и числовые знаки.—Ариѳметика и алгебра*: Египетъ, Греція, Римъ. — *Геометрія и тригонометрія*: Египетъ и Вавилонія, Греція, Римъ. **Средніе вѣка.** *Ариѳметика и алгебра*: Индусы, Арабы, Европа въ средніе вѣка. — *Геометрія и тригонометрія*: Индусы, Арабы, Европа въ средніе вѣка. **Новое время.** *Ариѳметика:* Ея развитіе, какъ науки и искусства. Англійскіе вѣса и мѣры. Развитіе школы коммерческой ариѳметики въ Англіи. Причины задержки развитія теоретической ариѳметики въ Англіи. Реформы въ преподаваніи ариѳметики. Ариѳметика въ Соединенныхъ Штатахъ. „Вопросы для забавы и развлеченія". — *Алгебра:* Возрожденіе. Послѣдніе три вѣка.—*Геометрія и тригонометрія:* Изданія Евклида. Раннія изслѣдованія. Начала современной синтетической геометріи. Современная элементарная геометрія. *Прибавленія редактора.*

Проф. Г. ШУБЕРТЪ.

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ РАЗВЛЕЧЕНІЯ и ИГРЫ

ПЕРЕВОДЪ СЪ НѢМЕЦКАГО І. ЛЕВИНТОВА

подъ редакц., съ примѣч. и добавл. „Вѣст. Оп. Физ. и Элемент. Матем.".

XIV+357 стр. 16°. Со многими таблицами. 1911 г. Ц. 1 р. 40 к.

СОДЕРЖАНІЕ:

I Отдѣлъ: Задачи, относящіяся къ числамъ. §§ 1 — 17: Отгадываніе задуманныхъ чиселъ. — Предугадываніе полученныхъ результатовъ. — Замѣчательные ряды цифръ.— Весьма большія числа. — Отгадываніе числа очковъ прикрытыхъ картъ.— Задачи на переливаніе.— Повѣрка при помощи девятки и фокусы съ девяткой.—Фокусы съ костями.—Цѣпи домино.—Представленіе всѣхъ чиселъ въ видѣ суммы степеней числа 2. Задачи Баше о гиряхъ.— Отгадываніе владѣльцевъ различныхъ вещей. — Игра двухъ лицъ, которыя поочередно прибавляютъ. — Совершенныя числа. — Пиѳагоровы и Героновы числа. — Затрудненное дѣленіе.— Софизмы. *II Отдѣлъ:* Задачи, относящіяся къ расположенію. §§ 18—25: О 15 христіанахъ и 15 туркахъ. — Магическіе квадраты. — Ходъ коня. — Такенъ или игра въ пятнадцать. — Вѣчный календарь для дней недѣли и Пасхи.— Вѣчный календарь для новолуній и полнолуній.—Эйлеровы странствованія. — Гамильтоновы круговыя поѣздки.

Примѣчанія и добавленія: Къ задачѣ о переливаніяхъ. — Цѣпи домино. — О гиряхъ. — О непрерывномъ вычерчиваніи фигуръ.

Изъ предисловія: Предлагаемый сборникъ требуетъ отъ читателя знакомства лишь съ первоначальными элементами ариѳметики. Какъ въ сборникахъ Люка и Болла, здѣсь представлены въ историко-критическомъ изложеніи важнѣйшія запутанныя игры и задачи математической природы, которыя могутъ служить для развлеченія.

БИБЛІОТЕКА КЛАССИКОВЪ ТОЧНАГО ЗНАНІЯ

Библіотека содержитъ только такія классическія творенія великихъ мыслителей въ области математики и естествознанія, которыя читаются безъ большого напряженія и не требуютъ особенной подготовки со стороны читателя. Редакторы снабжаютъ каждый переводъ примѣчаніями и разъясненіями тѣхъ мѣстъ, пониманіе которыхъ представляется сколько-нибудь затруднительнымъ. Научная комиссія „Mathesis“ въ своемъ выборѣ книгъ для Библіотеки классиковъ стремится дать возможность молодому поколѣнію черпать доступныя для него знанія изъ первоисточниковъ.

Въ настоящее время вышли въ свѣтъ слѣдующіе выпуски:

I. **Р. ДЕДЕКИНДЪ. Непрерывность и ирраціональныя числа.** Пер. съ нѣм. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* 40 стр. 8⁰. Изд. 2-е. Ц. 40 к.

Идеи, развитыя въ этомъ замѣчательномъ трудѣ, составляютъ въ настоящее время основу всего высшаго анализа. Къ книгѣ приложена статья переводчика: „Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ (по Cantor'у)“.

II. **АРХИМЕДЪ. Посланіе къ Эратосѳену о нѣкоторыхъ теоремахъ механики.** Пер. съ нѣм. подъ ред. „Вѣстника Оп. Физики и Элем. Математики“. Съ предисл. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* XV + 27 стр. 8⁰ Ц. 40 к. (См. каталогъ І. Гейбергъ. Новое сочиненіе Архимеда).

Сочиненіе содержитъ въ себѣ общіе методы, какими пользовался Архимедъ при нахожденіи площадей, объемовъ и центровъ тяжести; эти методы свидѣтельствуютъ, что великій греческій геометръ былъ весьма близокъ къ идеямъ современнаго интегральнаго исчисленія.

III. **АРХИМЕДЪ, ГЮЙГЕНСЪ, ЛЕЖАНДРЪ, ЛАМБЕРТЪ. О квадратурѣ круга.** Съ приложеніемъ исторіи вопроса, составленной проф. **Ф. Рудіо**. Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. Н. Бернштейна.* VIII + 155 стр. 8⁰. Съ 21 черт. Ц. 1 р. 20 к.

Послѣ того, какъ задача о квадратурѣ круга была совершенно исчерпана доказательствомъ трансцендентности числа π, профессоръ Рудіо счелъ нужнымъ обратить вниманіе на тѣ древнѣйшія работы, которымъ задача о квадратурѣ круга обязана своимъ развитіемъ.

IV. **Б. БОЛЬЦАНО. Парадоксы безконечнаго,** изданные по посмертной рукописи автора *др. Фр. Пржигонскимъ.* Переводъ съ нѣмецкаго подъ ред. проф. *И. В. Слешинскаго.* VIII + 119 стр. 8⁰. Ц. 80 к.

Въ этомъ сочиненіи Больцано является предшественникомъ Кантора въ теоріи безконечныхъ многообразій. Онъ устанавливаетъ и развиваетъ тѣ свойства безконечнаго, которыя легли въ основаніе теоріи Кантора.

Печатаются и готовятся къ печати:

V. **І. ЛАГРАНЖЪ. Прибавленія къ „Элементамъ Алгебры“ Эйлера. Неопредѣленный анализъ.** Переводъ съ французскаго подъ редакціей привать-доцента *С. О. Шатуновскаго.*

Въ этихъ прибавленіяхъ впервые дано полное рѣшеніе неопредѣленнаго квадратнаго уравненія съ двумя неизвѣстными въ самомъ общемъ видѣ. По изяществу и глубинѣ методовъ эта книга несомнѣнно представляетъ собой одинъ изъ перловъ среди твореній великаго геометра.

VI. **ЕВКЛИДЪ. Первыя шесть книгъ „Началъ“.** Переводъ проф. *Д. М. Синцова* и пр.-доц. *С. Н. Бернштейна.*

VII. **САДИ-КАРНО. О движущей силѣ огня.**

VIII. **БРАВЕ. Математическія начала кристаллографіи.**

УСПѢХИ ТОЧНАГО ЗНАНІЯ.

Въ серію книгъ подъ этимъ общимъ заглавіемъ входятъ:

I. УСПѢХИ ФИЗИКИ. Сборникъ статей о важнѣйшихъ открытіяхъ послѣднихъ лѣтъ въ общедоступномъ изложеніи, подъ редакціей „Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“

Выпускъ I. VIII+148 стр. 8⁰. Съ 41 рис. и 2 табл. *Изданіе 3-е.* 1910 г. Ц. 75 к.

Содержаніе: *Винеръ.* Расширеніе нашихъ чувствъ.—*Пильчиковъ.* Радій и его лучи.—*Дедіернъ.* Радій и радіоактивность.—*Рихарцъ.* Электрическія волны.—*Слаби.* Телеграфированіе безъ проводовъ.—*Шмидтъ.* Задача объ элементарномъ веществѣ (основанія теоріи электроновъ).

Выпускъ II. IV+204 стр. Съ 50 рис. 1911 г. Ц. 1 р. 20 к.

Содержаніе: *Максъ Планкъ.* Единство физическаго міросозерцанія.—*А. Риги.* Новые взгляды на внутреннее строеніе вещества.—*Е. Ретгерфордъ.* Атомная теорія въ физикѣ.—*Э. Рике.* О радіоактивномъ превращеніи —*Дж. Дж. Томсонъ.* О новѣйшихъ успѣхахъ физики.—*А. Слаби.* Спутники электричества—тепло и свѣтъ. *К. Штреккеръ.* Современное состояніе безпроволочной телеграфіи.

Печатаются и готовятся къ печати:

II. УСПѢХИ ХИМІИ. Сборникъ статей по химіи подъ редакціей журнала „Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“

Содержаніе выпуска I: *Беккерель.* Новѣйшія идеи о строеніи матеріи.—*Жоли.* Брауновское движеніе.—*Перренъ.* Можно ли съ точностью взвѣсить атомъ?—*Рамзай.* Открытіе новыхъ газовъ.—*Рамзай.* Опредѣленія беконечно малыхъ количествъ вещества.—*Вальденъ.* О сущности процесса растворенія и роли растворителя.—*Бруни.* Труды Вантъ-Гоффа.—*Оствальдъ.* Катализъ.—*Э. Фишеръ.* Органическій синтезъ и біологія.—*Юнгфлейшъ.* Труды Бертело.

III. УСПѢХИ АСТРОНОМІИ. Сборникъ статей по астрономіи подъ редакціей журнала „Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат“.

Содержаніе выпуска I-го: *Гофъ.* Задачи точной астрономіи.—*Кроммелинъ.* Происхожденіе и природа кометъ.—*Ловеллъ.* Марсъ —*Маундеръ.* Марсъ.—*Гэль.* Новѣйшія изслѣдованія солнца.—*Лаллеманъ.* Приливы и отливы въ морской корѣ и упругость земного шара.—*Риги.* Кометы и электроны.—*Генкель.* Джорджъ Дарвинъ и его творенія.

IV. УСПѢХИ БІОЛОГІИ. Сборникъ статей по біологіи подъ редакціей проф. ***В. В. Завьялова.***

Содержаніе выпуска I-го. *Дж. Лёбъ.* Новѣйшие успѣхи біологіи.—*Г. де-Фризъ* Мутаціи и мутаціонные періоды въ связи съ происхожденіемъ видовъ.—*К. С. Шеррингтонъ.* Ассоціація спинномозговыхъ рефлексовъ и принципъ общаго поля—*Леонъ Фредерикъ.* Химическая координація жизненныхъ явленій.—*Р. Франсэ.* Реакціонная способность растеній.—*Р. Геберъ* Біологическое значеніе коллоидовъ.—*М. Ферворнъ.* О процессахъ въ элементарныхъ единицахъ нервной системы.—*Г. Боруттау.* Старое и новое по вопросу о сущности нервнаго проведенія.—*А. Бэтэ.* Новѣйшіе взгляды на сущность біо-электрическихъ токовъ.—*Л. Амоффъ.* Теорія боковыхъ цѣпей Эрлиха.—*В. Эбштейнъ.* Къ исторіи развитія понятія о болѣзни.—*П. Жанэ.* Подсознательное.

Библіотека элементарной математики.

Издается подъ общей редакціей прив.-доц. **С. О. Шатуновскаго.**

Библіотека элементарной математики будетъ состоять изъ отдѣльныхъ книжекъ, не зависящихъ другъ отъ друга по содержанію и имѣющихъ размѣръ около пяти печатныхъ листовъ малаго формата каждая. Книжки библіотеки будутъ посвящены разработкѣ наиболѣе важныхъ или интересныхъ вопросовъ элементарной математики въ историческомъ и, по возможности, философскомъ освѣщеніи, при чемъ **полная доступность изложенія**, какъ основное требованіе, ставится на первый планъ.

Всѣ сочиненія, которыя войдутъ въ эту библіотеку, предполагаютъ въ читателѣ лишь элементарныя свѣдѣнія по математикѣ въ предѣлахъ курса среднихъ учебныхъ заведеній, и потому **книжки библіотеки должны быть доступны для учащихся старшихъ классовъ среднихъ учебныхъ заведеній,** сохраняя интересъ и для лицъ, владѣющихъ болѣе полнымъ математическимъ образованіемъ.

Печатаются:

I. *Е. Фурре.* Очеркъ исторіи геометріи.
II. *В. Аренсъ.* Мысли и изреченія великихъ математиковъ.
III. *В. Лицманъ.* Теорема Пиѳагора.
IV. *Е. Фурре.* Геометрическія головоломки и курьезы.
V. *Г. Вилейтнеръ.* Понятіе о числѣ.
VI. *Э. Лёфлеръ.* Цифры и цифровыя системы главнѣйшихъ культурныхъ народовъ.
VII. *О. Мейснеръ.* Элементы теоріи вѣроятностей.

Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики.

выходитъ 24 раза въ годъ отдѣльными выпусками, въ 24 и 32 стр. каждый,

подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА: Оригинальныя и переводныя статьи изъ области физики и элементарной математики. Статьи, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики. Опыты и приборы. Научная хроника. Разныя извѣстія. Математическія мелочи. Темы для сотрудниковъ. Задачи для рѣшенія. Рѣшенія предложенныхъ задачъ съ фамиліями рѣшившихъ. Упражненія для учениковъ. Задачи на премію. Библіографическій отдѣлъ: обзоръ спеціальныхъ журналовъ; замѣтки и рецензіи о новыхъ книгахъ.

Условія подписки:

Подписная цѣна съ пересылкой: за годъ **6 руб.**, за полгода **3 руб.** Учителя и учительницы низшихъ училищъ и всѣ учащіеся, выписывающіе журналъ **непосредственно изъ конторы редакціи,** платятъ за годъ **4 руб.**, за полугодіе **2 руб.** Допускается разсрочка подписной платы по соглашенію съ конторой редакціи. Книгопродавцамъ 5% уступки.

Журналъ за прошлые годы по 2 р. 50 к., а учащимся и книгопродавцамъ по 2 р. за семестръ. **Отдѣльные номера** текущаго семестра по 30 к., прошлыхъ семестровъ по 25 коп.

Адресъ для корреспонденцій:

Одесса. Въ редакцію „Вѣстника Опытной Физики".





Тип. Акц. Южно-Русскаго
Общества Печатнаго Дѣла,
Одесса, Пушкинская, № 18.

Ц. 3 р.